Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

Mohamed NASSIRI

Etant donnée (u_n), une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on va s'intéresser à la somme de ses termes (*i.e.*) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$. On se ramène à l'étude d'une suite en posant *la série* (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$

Le critère de Cauchy va nous fournir un critère de convergence d'une série sans connaître la limite de la série.

On va définir plusieurs convergences qui vont nous permettre de faciliter l'étude de la convergence de (S_n) : convergence simple (CVS), convergence absolue (CVA) et semi-convergence (SMCV). On a les relations suivantes entre les différents modes de convergence :

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\sum f_n \text{ SMCV}} \arrow[d, Rightarrow] \\
\boxed{\sum f_n \text{ CVA}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{\sum f_n \text{ CVS}}
\end{tikzcd}$$

Le fait que la convergence absolue implique la convergence simple va nous permettre de nous limiter à l'étude des suites à termes positifs. De plus, quand les séries ne sont pas absolument convergentes, il se passe des phénomènes plutôt étranges ... Par exemple, la série (harmonique alternée) est convergente et on a

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ... = \ln 2$$

Pourtant, en réarrangeant les termes (par paquets de 3), on a

$$\begin{aligned}
S &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + ... \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + ... + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + ... \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} ...\right) = \frac{1}{2} S \text{ !!!}
\end{aligned}$$

Pour finir, l'étude des séries entières et des séries de Fourier nous permet d'avoir des développements remarquables comme :

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}, \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Références

[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, El Amrani Mohammed
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[FGNan1] Analyse 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas

Développements

Méthode de Newton

1 Convergence des séries

1.1 Définitions et premières propriétés [ELAM] p.79→83

Définition 1 *Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle <u>série</u> de terme général u_n, la suite (S_n) définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n.$$

On note cette série $\sum u_n$ et S_n s'appelle la <u>somme partielle</u> d'indice n de $\sum u_n$.

Définition 2 *On dit que la série $\sum u_n$ <u>converge</u> si la suite (S_n) converge. On note*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

Exemple 3 *Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|a| < 1$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a} \right) = \frac{1}{1-a}$$

Définition 4 *Si $\sum u_n$ est une série convergente de somme S, le nombre $R_n = S - S_n$ est appelé le <u>reste</u> d'indice n de la série.*

Proposition 5 *Si une série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$*

Remarque 6 *La réciproque est fausse. Exemple : la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ pour $n \geq 1$.*

Définition 7 *On dit qu'une série $\sum u_n$ <u>diverge grossièrement</u> si la suite (u_n) ne tend pas vers 0.*

Définition 8 *On appelle <u>série télescopique</u> associée à une suite (a_n), la série $\sum u_n$, où $u_n = a_n - a_{n-1}$*

Proposition 9 *Soit $\sum u_n$ une série télescopique associée à une suite (a_n). Alors la série $\sum u_n$ et la suite (a_n) sont de la même nature, et en cas de convergence, on a*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} u_n - a_0$$

Exemple 10

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

1.2 Critère de Cauchy [ELAM] p.83→85

Théorème 11 *<u>Critère de Cauchy :</u>*
Une suite numérique $\sum u_n$ converge si et seulement si elle satisfait le critère de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ n \geq N$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \epsilon$$

Exemple 12 *La série harmonique (de terme général $\frac{1}{n}$) diverge.*

Définition 13 *Une série $\sum u_n$ est dite <u>absolument convergente</u> si la série $\sum |u_n|$ converge.*

Théorème 14 *Toute série absolument convergente est convergente.*

2 Séries à termes positifs [ELAM] p.85→93

Proposition 15 *Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.*
Si la série diverge, alors la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Théorème 16 *<u>Règle de comparaison</u> Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$. Alors*
1) si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

2) si la série $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exemple 17 *La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$ est convergente.*

Théorème 18 *<u>Règle d'équivalence</u> Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ lorsque $n \to +\infty$. Alors*
1) Les séries sont de même nature.
2) En cas de convergence, les restes sont équivalents.
3) En cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Théorème 19 *<u>Séries de Riemann :</u>*
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 20 *<u>Règle de domination</u> Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$ (resp. $u_n = o(v_n)$) lorsque $n \to +\infty$.*

Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right) \quad \textit{lorsque } n \to +\infty$$

$$\left(\textit{resp. } \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)\right)$$

Remarque 21 *Le théorème reste vrai si la série $\sum u_n$ est à valeurs complexes en considérant $|u_n|$ au lieu de u_n.*

Théorème 22 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive et décroissante.*
Alors la série $\sum f(n)$ (avec $n \geq a$) et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 23 ♠ *Développement asymptotique de la série harmonique* ♠
On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + ...\frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$.
Alors le développement asymptotique de H_n à quatre termes est :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où γ est la constante d'Euler

Proposition 24 *Séries de Bertrand : La série de Bertrand*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2)$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta > 1$).

3 Séries à termes quelconques

3.1 Règles de Cauchy et d'Alembert [ELAM] p.93→95

Définition 25 *Soit (u_n) une suite réelle. On appelle limite supérieure (resp. limite inférieure) de (u_n), la plus grande (resp. la plus petite) de ses valeurs d'adhérence dans $\overline{\mathbb{R}}$.*
On note $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n$.

Théorème 26 *Règle de Cauchy : Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes et soit $L = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors*
1) si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument,
2) si $L > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 27 *La série $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge.*

Théorème 28 *Règle de d'Alembert Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes non nuls à partir d'un certain rang. On note*

$$L = \limsup_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \quad \textit{et} \quad l = \liminf_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$$

1) si $L < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument,
2) si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Exemple 29 *La série $\sum \frac{a^n}{n}$ converge si $a < 1$ et diverge si $a \geq 1$.*

3.2 Séries semi-convergentes [ELAM] p.97→100

Définition 30 *Une série qui converge mais qui ne converge pas absolument est dite semi-convergente.*

Exemple 31 *On verra que $\sum (-1)^n/n$ est semi-convergente.*

Théorème 32 *Critère de Leibniz : Soit (a_n) une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série alternée $\sum (-1)^n a_n$ est convergente.*
De plus, sa somme S vérifie vérifie $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n, et son reste R_n d'indice n vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple 33 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la $\sum (-1)^{n-1} n^{-\alpha}$ est convergente.*

Théorème 34 *Critère d'Abel : Soit (u_n) une suite numérique telle que $u_n = a_n b_n$ pour tout entier $n \geq 0$. On suppose que*
1) (a_n) une suite à termes strictement positifs, décroissante et tendant vers 0,
2) il existe $M > 0$ telle que, quels que soient $n \geq 0$ et $m \geq n$, on ait

$$|b_n + b_{n+1} + ... + b_m| \leq M$$

. Alors la série $\sum u_n$ converge, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|R_n| = \left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p\right| \leq M a_{n+1}$$

Corollaire 35 *Soit (a_n) une suite à termes strictement positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors, pour tout $\theta \neq 2k\pi$, les séries*

$$\sum a_n \cos(n\theta) \quad \textit{et} \quad \sum a_n \sin(n\theta)$$

sont convergentes.

4 Séries entières et séries de Fourier

4.1 Séries entières [ELAM] p.229→250

Définition 36 *On appelle <u>série entière complexe de la variable complexe</u> toute série de la forme $\sum a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes appelée <u>suite de coefficients</u> de la série entière.*

Proposition 37 *<u>Lemme d'Abel :</u> Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Supposons que la suite $(a_n z_0^n)$ soit bornée. Alors, pour tout nombre complexe z tel que $0 \leq |z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.*

Définition 38 *Soit f une fonction complexe de la variable réelle, définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. On dit que f est <u>développable en série entière</u> en 0, s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et un nombre $r \in]0, R]$ avec $]-r, r[\subset X$ tel que*

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Proposition 39 *Soit f une fonction de classe $C^{+\infty}$ sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, contenant 0. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$, et notons $R_n(x)$ le reste d'ordre n définie par*

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

. Alors f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe un intervalle ouvert contenant 0 sur lequel la suite (R_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Proposition 40 *Soit f une fonction de classe $C^{+\infty}$ sur un intervalle ouvert $I =]-\alpha, \alpha[$ avec $\alpha > 0$, et s'il existe $\rho > 0$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tels que*

$$\forall x \in I, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}$$

alors f est développable en série entière en 0 sur l'intervalle $]-R, R[$ où $R = \min(\alpha, \rho)$.

Application 41 *<u>Développements en série entière classiques :</u>*
• $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

En particulier, $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$
• $\forall x \in]-1, 1[$,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

• *Pour $\alpha = 1$ et en primitivant, $\forall x \in]-1, 1[$,*

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$

En particulier, $\ln(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$
• *De même,* $\forall x \in]-1, 1[$,

$$\text{arcsin} x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

En particulier,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{(2^n n!)^2} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2k+1}$$

4.2 Série de Fourier [ELAM] p.298→319

Définition 42 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. On appelle <u>coefficients de Fourier exponentiels</u> de f, les scalaires :*

$$c_n := c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

On définit également les <u>coefficients de Fourier trigonométriques</u> de f, les scalaires :

$$a_n := a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) \mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$b_n := b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) \mathrm{d}t \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

On appelle <u>série de Fourier</u> de f, la série

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$$

Proposition 43 *<u>Formule de Parseval :</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et continue par morceaux. Alors*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

Théorème 44 *<u>Théorème de Dirichlet :</u> Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ et on a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{N \to +\infty} S_N(f)(t) = \frac{f(t^-) + f(t^+)}{2}$$

Théorème 45 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ avec pour somme la fonction f.*

Application 46 • $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

Questions

Exercice : Soit (u_n) une suite décroissante de réels positifs et telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$.

Solution : Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Il faut penser astucieusement à l'égalité puis la minoration suivantes :

$$u_n + ... + u_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{n-1}$$

Comme la suite (u_n) est décroissante, les n éléments du membres de gauche sont tous inférieurs à u_{2n}. Par suite,

$$0 \leq nu_{2n} \leq S_{2n-1} - S_{n-1}$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge,

$$\lim_{n\to+\infty} = S_{2n-1} - S_{n-1} = S - S = 0$$

Par conséquent, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_{2n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$ Montrons que l'on a la même chose pour les termes impairs et on aura terminé.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$(2n+1)u_{2n+1} = 2nu_{2n+1} + u_{2n+1}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 0$ car la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, et de plus, $2nu_{2n+1} \leq 2nu_{2n}$ car la suite (u_n) est décroissante (et on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nu_{2n} = 0$).
Par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n+1)u_{2n+1} = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 0$

Remarque : Sans la décroissance de (u_n) le résultat est faux. Exemple :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n = 2^p,\ p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(u_n) est bien une suite (non décroissante) de réels positifs et telle que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} < +\infty$$

Pourtant,

$$nu_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2^p,\ p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ne converge pas vers 0.

Exercice : On considère la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + e^{-u_n} \\ u_0 \geq 0 \end{cases}$$

1) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2) En posant $v_n = e^{u_n}$ et regardant $v_{n+1} - v_n$, donnez un équivalent de u_n.

Solution : 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = e^{-u_n} > 0$, donc (u_n) est croissante.
Si (u_n) était majorée, elle convergerait vers $l \in \mathbb{R}^*$ et comme la fonction $x \mapsto x + e^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, alors on a $l = f(l)$ (*i.e.*) $l = l + e^{-l}$. Ce qui est absurde car $e^{-l} \neq 0$.
Donc (u_n) n'est pas majorée donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = e^{-u_{n+1}} - e^{-u_n} = e^{-u_n + 1/v_n} - e^{-u_n} = e^{-u_n}(e^{1/v_n} - 1) = v_n(e^{1/v_n} - 1)$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$ et donc $e^{1/v_n} - 1 \sim \frac{1}{v_n}$. Par suite, $v_{n+1} - v_n \sim 1$.
Par le théorème de sommation des équivalents, on a

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)}_{v_n - v_0} \sim \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} 1}_{=n}$$

Par suite $v_n \sim n$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} & v_n = n(1 + \epsilon_n) \qquad \text{avec } \lim_{n \to +\infty} \epsilon_n = 0 \\ \Rightarrow\ & \ln(v_n) = \ln(n) + \ln(1 + \epsilon_n) \\ \Rightarrow\ & u_n = \ln(n) + o(1) \end{aligned}$$

Par conséquent, $u_n \sim \ln(n)$.

Remarque : Si on n'est pas à l'aise avec le théorème de sommation des équivalents, on peut toujours invoquer le théorème de Césaro :

Soit (u_n) une suite numérique et soit (v_n) la suite des moyennes de Cesàro, c'est-à-dire la suite de terme général $$v_n = \frac{u_1 + ... + u_n}{n}$$ Alors si (u_n) converge vers un nombre complexe l, (v_n) converge aussi vers l.

Dire que $v_{n+1} - v_n \sim 1$, c'est exactement dire que $\lim\limits_{n \to +\infty}(v_{n+1} - v_n) = 1$.
Considérons la suite (w_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} w_n = v_n - v_{n-1} \\ w_0 = v_0 \end{cases}$$

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 1$ et par le théorème de Césaro, on a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{w_0 + ... + w_n}{n} = 1 \quad \underset{\text{télescopage}}{\Leftrightarrow} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{n} = 1$$

Exercice : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[$$

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solution : Il faut bien évidemment ici penser aux série de Fourier.
Calculons les coeffcients de Fourier de f :
Comme f est paire, $b_n(f) = 0$ pour tout n. Ensuite,

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \mathrm{d}x \underset{t = x - \pi}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \mathrm{d}t = \frac{2\pi^2}{3}$$

Pour tout $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&\underset{t=x-\pi}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt+n\pi)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\left\{\cancel{\left[t^2\frac{\sin(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi}} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t\right\} \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)\mathrm{d}t \\
&= -\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2}{n}\left\{\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\cancel{\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t}\right\} \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{4}{n^2}(-1)^n\pi = \frac{4}{n^2}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la série de Fourier de f est

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors par le théorème de Dirichlet, on a

$$S(f)(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent, pour $x = 0$, on a

$$\pi^2 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n.0)}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Par suite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
