Equation de Bessel

Mohamed NASSIRI

Référence :

Exercices de mathématiques : Oraux X-ENS, Analyse 4, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas, p.101 $\to$ 103

Recasage :

• • • • • 220 : Equations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
• • • • • 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
• • • • • 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.
• • • • ○ 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
• • • ○ ○ 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

Résumé :

Ce développement illustre une méthode de résolution des équations différentielles par les fonctions développables en série entière. De plus, par l'utilisation du *wronskien*, on aura une jolie égalité entre une série entière et une intégrale à paramètre.

Prérequis :

Equations différentielles - Wronskien - Séries entières - Intégrales à paramètres - Théorème de dérivation sous le signe intégral

---

Théorème : On considère l'équation différentielle (dite *de Bessel*) suivante :

$$xy'' + y' + xy = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

(i) Alors il existe une unique solution f_0 développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(ii) Soit g une solution de $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]0, a[$, avec $a > 0$. Alors

$$((g, f_0) \text{ est libre}) \ \Leftrightarrow\ (f \text{ n'est pas bornée au voisinage de } 0)$$

(iii) On en déduit donc que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Démonstration.
(i) Analyse : Soit f une solution de $(\mathcal{E})$ développable en série entière au voisinage de 0. Ainsi, il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $R>0$ tels que, pour tout $x\in]-R,R[$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

On a alors, pour tout $x\in]-R,R[$,

$$\begin{aligned}xf(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n\\ f'(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\ xf''(x)&=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}0=xf(x)+f'(x)+xf''(x)&=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n\\ &=\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2a_{n+1}x^n\\ &=a_1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left((n+1)^2a_{n+1}+a_{n-1}\right)x^n\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on a nécessairement

$$\begin{cases}a_1=0\\ (n+1)^2a_{n+1}=-a_{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

On en déduit donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases}a_{2n+1}=0\\ a_{2n}=\frac{(-1)^na_0}{(2n)^2(2n-2)^2\dots2^2}=\frac{(-1)^na_0}{4^n(n!)^2}\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x\in]-R,R[$, on a

$$f(x)=a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

Synthèse : On pose

$$a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

La série a un rayon de convergence infini. En effet, en utilisant la règle de d'Alembert sur la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ (pour $x\neq0$) avec $a_n=\frac{(-1)^nx^{2n}}{4^n(n!)^2}$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{4^{n+1}(n+1!)^2}\times\frac{4^n(n!)^2}{(-1)^nx^{2n}}=-\frac{-x^2}{4(n+1)^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

La série entière définit donc une fonction f développable en série entière dont les coefficients vérifient les conditions précédentes. f est donc solution de $(\mathcal{E})$.

De plus, comme $f(0) = a_0$, il existe une unique solution f_0 développable en série entière telle que $f_0(0) = 1$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

(ii) <u>$\Leftarrow$:</u> La fonction f_0 est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée au voisinage de 0. Nécessairement, si la famille (g, f_0) est liée, alors g est bornée au voisinage de 0.

<u>$\Rightarrow$:</u> Supposons que la famille (g, f_0) est libre. Sur $]0, a[$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$, que l'on peut réécrire

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0$$

est un espace vectoriel de dimension 2 donc (g, f_0) est une base.
Considérons le wronskien W de la famille (g, f_0) $(i.e.)$ pour tout $x \in]0, a[$,

$$W(x) = \begin{vmatrix} g(x) & f_0(x) \\ g'(x) & f_0'(x) \end{vmatrix} = g(x) f_0'(x) - g'(x) f_0(x)$$

D'où

$$\begin{aligned} W'(x) &= g'(x) f_0'(x) + g(x) f_0''(x) - g''(x) f_0(x) - g'(x) f_0'(x) \\ &= g(x) f_0''(x) - g''(x) f_0(x) \\ &= g(x) \left(-\frac{1}{x} f_0'(x) - f_0(x) \right) - \left(-\frac{1}{x} g'(x) - g(x) \right) f_0(x) \\ &= -\frac{1}{x} W(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]0, a[$,

$$W(x) = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x}$$

et $C \neq 0$ puisque la famille (g, f_0) est libre. Par suite, on a, pour tout $x \in]0, a[$,

$$g(x) f_0'(x) - g'(x) f_0(x) = \frac{C}{x}$$

Supposons que g soit bornée au voisinage de 0. Comme $\lim_{x \to 0} f_0(x) = 1$ et $\lim_{x \to 0} f_0'(x) = 0$, alors on a

$$g'(x) \underset{x \to 0}{\sim} -\frac{C}{x}$$

Soit $b \in]0, a[$. La fonction g' garde un signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable sur $]0, b]$. On en déduit, par le théorème d'intégration des relations de comparaison,

$$g(x) - g(b) = \int_b^x g'(t) \mathrm{d}t \underset{x \to 0}{\sim} -C \int_b^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t - C(\ln x - \ln b)$$

Par suite, $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} -C \ln x$, puis $\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$. Ce qui est absurde (puisque g est supposée bornée au voisinage de 0).
D'où le résultat.

(iii) La fonction $(x,\theta) \in \mathbb{R}^2 \to \frac{1}{\pi}\cos(x\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On en déduit donc la fonction $g : x \to \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ g''(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Ainsi, on a donc

$$\begin{aligned} xg(x) + g'(x) + xg''(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(x\cos(x\sin\theta)\cos^2\theta - \sin(x\sin\theta)\sin\theta\big)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\sin(x\sin\theta)\cos\theta\right]_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

Donc g est solution de $(\mathcal{E})$.
De plus, g est bornée sur $\mathbb{R}$, donc d'après (ii), la famille (g, f_0) est liée sur $]0,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}_+$ par continuité. En remarquant que $f_0(0) = g(0) = 1$ (la constante λ qui vérifie $f_0(x) = \lambda g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, vaut donc 1) et que les fonctions g et f_0 sont paires (ce qui nous donne l'égalité sur $\mathbb{R}$ tout entier), on a donc bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\theta)\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2}x^{2n}$$

□

Remarques :

- **Pendule de Bessel :**
  Cette équation de la physique intervient dans le pendule de Bessel : il s'agit d'un pendule simple oscillant dont on suppose que la longueur du fil peut varier. L'angle vérifie une équation différentielle de Bessel.

- **Fonctions de Bessel :**

- **Equivalents d'intégrales :** GOU p159

  Théorème :

  Démonstration :

  □