Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$

Mohamed NASSIRI

Référence :

Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan - p.517-518

Recasage :

• • • • • 204 : Connexité. Exemples et applications.
••••• 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $GL(E)$. Applications.

Résumé :

Le groupe linéaire et ses sous-groupes ont des propriétés remarquables : compacité, connexité, etc.
On se propose dans ce développement de démontrer que $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs.

Prérequis :

Groupe linéaire - Connexité - Déterminant - Diagonalisabilité

Théorème : $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$ sont connexes par arcs.

Démonstration. On va utiliser trois arguments différents pour démontrer que les trois ensembles sont connexes par arcs.

$GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs :

Soient A, $B \in GL_n(\mathbb{C})$. On pose $p(z) = \det(zA + (1-z)B)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Ainsi p est un polynôme sur $\mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à n et donc par le théorème de d'Alembert, p a plus n racines dans $\mathbb{C}$.
Par conséquent, l'ensemble $V = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ est connexe par arcs dans $\mathbb{C}$ et de plus, on a $\{0, 1\} \subset V$.
Comme l'application :

$$\begin{aligned} f \ : \ V &\to GL_n(\mathbb{C}) \\ z &\mapsto zA + (1-z)B \end{aligned}$$

est continue, alors $f(V)$ est connexe par arcs. Comme $A, B \in f(V)$, on en déduit donc que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

$SU(n)$ est connexe par arcs :

Soit $A \in SU(n)$. Il existe $U \in U(n)$ telle que :

$$A = U \begin{pmatrix} e^{2i\pi\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{2i\pi\lambda_n} \end{pmatrix} U^*$$

Maintenant, il s'agit de relier n'importe quelle matrice $A \in SU(n)$ à l'identité. Pour cela, on pose :

$$A_t = U \begin{pmatrix} e^{2i\pi\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{2i\pi\lambda_n t} \end{pmatrix} U^*$$

Ainsi l'application $t \mapsto A_t$ est continue de $[0,1]$ dans $SU(n)$ et de plus, on a $A_0 = I_n$ et $A_1 = A$. Par conséquent, $SU(n)$ est connexe par arcs.

$U(n)$ est connexe par arcs :

On pourrait faire une démonstration identique à la deuxième mais comme la connexité est une notion topologique, on va utiliser un morphisme qui va permettre de transposer la notion de connexité.

$$\begin{aligned} SU(n) \times \mathbb{S} &\to U(n) \\ (A, \lambda) &\mapsto \lambda A \end{aligned}$$

est continue et surjective. C'est même un morphisme de groupe. Comme $SU(n) \times \mathbb{S}$ est connexe par arcs, on en déduit que $U(n)$ est connexe par arcs. □

Remarques :

- L'ensemble $V = \{z \in \mathbb{C} \mid p(z) \neq 0\}$ est connexe par arcs. En effet, il suffit de voir que V n'est rien d'autre que le plan complexe $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points.

Attention aux résultats légèrement différents dans $\mathbb{R}$:

- **Théorème :** (i) $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.
  (ii) $O_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes dont celle contenant I_n est $SO_n(\mathbb{R})$.
  (iii) $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes :

  $$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \mid \det(M) > 0\}$$

  $$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R} \mid \det(M) < 0\}$$

  Démonstration : Démo

  □

- **Théorème :** Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $SL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

  Démonstration : Démo

  □