De la dualité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Mohamed NASSIRI

Références :

Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas - p. ??

Recasage :

● ● ● ● ● 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications.
●●●●● 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
● ● ● ● ● 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.
● ● ● ● ○ 202 : Exemples de parties denses et applications.
● ● ● ○ ○ 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Résumé :

Il s'agit plutôt d'une "grosse proposition" plutôt que d'un théorème. La première partie nous dit que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \approx (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$. Quant à la deuxième, c'est une caractérisation intéressante de la trace : il s'agit en fait de la seule (à coefficient de proportionnalité près) forme linéaire commutative. Et la dernière assertion nous dit que dans tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient au moins une matrice inversible.

Prérequis :

Analyse matricielle - Dualité

Théorème :
• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application

$$\begin{aligned} f_A \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ X &\mapsto \mathrm{Tr}(AX) \end{aligned}$$

induit un isomorphisme entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$
• Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $f(XY) = f(YX)$, $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(X) = \lambda \mathrm{Tr}(X)$.
• $\forall n \geq 2$, tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.
• Soit $(E_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Petit rappel (très) utile pour la suite : $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$. (On démontre cette formule dans la partie "Remarques").
f_A induit l'application

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\to (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

Clairement, f est une application linéaire (linéarité de la trace), et comme $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) = \dim((\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*) = n^2$ (dans un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, on a toujours $\dim E = \dim E^* = n$), il nous suffit de montrer que f est injective.
Soit donc $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(A) = f_A = 0$. On a donc pour $1 \leq i_0, j_0 \leq n$

$$0 = \mathrm{Tr}(AE_{i_0 j_0}) = \mathrm{Tr}(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} E_{ij} E_{i_0 j_0}) = \mathrm{Tr}(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} \delta_{j i_0} E_{i j_0}) = \mathrm{Tr}(\sum_{i=n}^{n} a_{i i_0} E_{i j_0}) = a_{j_0 i_0}$$

Comme ceci est valable pour tout $1 \leq i_0, j_0 \leq n$, on a donc $A = 0$, et par suite f est injective, donc bijective.
Conclusion : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \approx (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$.

• $\forall\ 1 \leq i, j \leq n$

$$f(E_{ii}) = f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{ji} E_{ij}) = f(E_{jj})$$

Si $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, on a :

$$f(E_{ij}) = f(E_{ii} E_{ij}) = f(E_{ij} E_{ii}) = f(0) = 0$$

On note λ la valeur commune des $f(E_{ii})$. Ainsi $\lambda\mathrm{Tr}$ et f coïncident sur les éléments de base E_{ij} donc $f = \lambda\mathrm{Tr}$.

• Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle φ (*i.e.*)

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \varphi(X) = 0\}$$

et d'après ce qui précède, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi(X) = \mathrm{Tr}(AX)$, $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ainsi,

$$H = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(AX) = 0\}$$

Donc il nous suffit de montrer qu'il existe $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Tr}(AX) = 0$. Allons-y !
Soit $\mathrm{rg}(A) = r \geq 1$, $\exists P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = PJ_rQ, \quad \text{où } J_r \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Alors si $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(PJ_rQX) = \mathrm{Tr}(J_rQXP)$.
Il suffit donc à présent de trouver une matrice inversible Y telle que $\mathrm{Tr}(J_rY) = 0$ (on posera ensuite $X := Q^{-1}YP^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cap H$).
Abracadabra !

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ convient car } J_rY \text{ a sa diagonale nulle.}$$ □

Remarques :

- On va démontrer la petite formule $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ (et il est important de savoir le faire !) On propose deux démonstrations ici : une avec overdose de formules et d'indices, une autre avec plus de "blabla".

  ○ Pour commencer, remarquons que le terme d'indice (i, j) de E_{kl} vaut : $\delta_{ik}\delta_{jl}$ (prenez quelques secondes pour en convaincre). Calculons le produit $E_{ij}E_{kl}$:
  $\forall\ 1 \leq a \leq n,\ \forall\ 1 \leq b \leq n$

$$(E_{ij}E_{kl})_{ab} = \sum_{c=1}^{n} (E_{ij})_{ac}(E_{kl})_{cb} = \sum_{c=1}^{n} \delta_{ia}\delta_{jc}\delta_{kc}\delta_{lb} = \delta_{ia}\delta_{lb} \sum_{c=1}^{n} \delta_{jc}\delta_{kc} = \delta_{ia}\delta_{lb}\delta_{jk} = (\delta_{jk}E_{il})_{ab}$$

. Comme ceci est vrai pour tout a, b, alors on a bien

$$E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$$

○ Posons $A = E_{ij}E_{kl}$.
(1) Comme toutes les lignes de E_{ij} sont nulles sauf la i-ème, il en est de même pour les lignes de A.
(2) De même, comme toutes les colonnes de E_{kl} sont nulles sauf la l-ème, il en est aussi de même des colonnes de A.
(3) Donc le seul coefficient éventuellement non nul de A est celui d'indices (i, l), égal au produit de la i-ème ligne L_i de E_{ij} par la l-ème colonne C_l de E_{kl}, et qui vaut donc : 1 (seul coefficient non nul de L_i, situé la j-ème place) fois le j-ème coefficient de C_l, lequel vaut 1 si $j = k$ et vaut 0 sinon. Ceci montre que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Revenons quelques instants sur la conclusion. Le fait que $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ peut se voir de deux façons : on remarque que c'est une matrice de permutation (et celles-ci sont inversibles) ou alors, en développant par rapport à la deuxième colonne, que le déterminant vaut ± 1 (le déterminant d'une matrice de permutations vaut ± 1).

- Revenons aussi sur le fait que J_rY à sa diagonale nulle. Il faut quand même se rappeler que, dans le cadre de la démonstration, on cherchait des matrices avec une trace nulle, et avec notre gaillard J_r c'était mal parti (il a des 1 sur sa diagonale ...).
Qu'à cela ne tienne ! On va permuter les colonnes de J_r, en multipliant par une matrice (de permutation) Y, pour n'avoir que zéros sur la diagonales de J_rY.
Ainsi la matrice (de permutation) $Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ agit sur J_r de la sorte :

$$\begin{aligned} C_1 &\text{ s'envoie sur } C_n \\ C_2 &\text{ s'envoie sur } C_1 \\ C_3 &\text{ s'envoie sur } C_2 \\ &\dots \\ C_n &\text{ s'envoie sur } C_{n-1} \end{aligned}$$

donc

$$J_rY = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- On peut démonter un résultat intéressant en utilisant la caractérisation des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

  Proposition : $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

  Démonstration : On peut déjà regarder ce qu'il se passe pour $n = 1$. On a

  $$O_1(\mathbb{R}) = \{\pm 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

  Incontestablement, on a $\text{Vect}(O_1(\mathbb{R})) = \text{Vect}(\{\pm 1\}) = \mathbb{R} = \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

  Pour montrer que $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on va montrer que $O_n(\mathbb{R})$ n'est jamais contenu dans un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  Il faut donc se rappeler la caractérisation des hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:
  Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. C'est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle φ (*i.e.*)

  $$H = \text{Ker}(\varphi) = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \varphi(X) = 0\}$$

  Or, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application

  $$\begin{aligned} f_A \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ X &\mapsto \text{Tr}(AX) \end{aligned}$$

  induit un isomorphisme f entre $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et son dual $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$

  $$\begin{aligned} f \ : \ \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^* \\ A &\mapsto f_A \end{aligned}$$

  Par conséquent, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(X) = \text{Tr}(AX)$, $\forall\ X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ainsi,

  $$H = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \text{Tr}(AX) = 0\}$$

  Donc il nous suffit de montrer qu'il existe $X \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{Tr}(AX) \neq 0$. Allons-y !

  Par le théorème de décomposition polaire, il existe un couple $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OS$.
  Par conséquent,

  $$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(OSX)$$

  En prenant, $X = O^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$, on a

  $$\text{Tr}(AX) = \text{Tr}(OSO^{-1}) = \text{Tr}(S) \neq 0 \quad \text{car } S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$$

  $\square$