Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

Le point de départ est de formaliser la notion intuitive de la continuité : *la courbe d'une fonction continue se trace d'un "trait continu", sans lever le crayon.* Puis à partir, de cette définition, plusieurs résultats vont tomber : le prolongement par continuité, le théorème de Heine, des valeurs intermédiaires, etc.

On définit les suites de fonctions par analogie aux suites de nombres réels ou complexes de la manière suivante :

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \qquad\qquad f : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ (ou } \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \text{ ou } \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}))$$

$$n \mapsto u_n \qquad\qquad n \mapsto f_n$$

Cependant, malgré cette analogie simple, on est vite confronté à quelques problèmes concernant la convergence de ces suites :

- La continuité :

$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \underbrace{x^n}_{\text{continue}} = \underbrace{\chi_{\{1\}}(x)}_{\text{pas continue}}$$

- La dérivabilité :

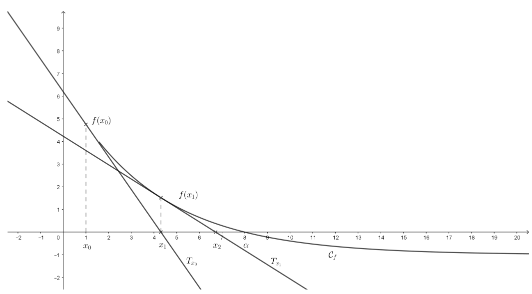
$$\forall x \in [0,1], \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sin(nx) = 0 \ \text{ mais } \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\sin(nx)\right)' = \lim_{n\to+\infty} \cos(nx) = \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 0$$

Le théorème de Weierstrass montre que l'étude des suites et séries de fonctions n'est pas superflue.

La notion de dérivabilité va nous amené également à plusieurs théorèmes célèbres : théorème de Rolle, des accroissements finis, formules de Taylor.

On ne peut pas parler de continuité et dérivabilité sans parler de la méthode de Newton. C'est une méthode de résolution de l'équation $f(x) = 0$. L'idée est de partir d'une valeur "proche" de $x_0 \in I$ de la solution α et de considérer l'approximation affine φ de f au point x_0 (la tangente en x_0 T_{x_0}). Ainsi, On aura donc

$$\varphi(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$



La droite T_{x_0} coupe l'axe des abscisses en $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ (il suffit de résoudre $\varphi(x_1) = 0$). Dans certains cas, x_1 représente une meilleure approximation de α que x_0. La méthode de Newton consiste à itérer ce processus en repartant de x_1 et ainsi de suite ...

D'autres fonctions méritent également d'être mentionnées car elles ont déstabilisé plus d'un mathématicien et qu'elle ont joué un rôle essentiel dans l'histoire des mathématiques : on va les appeler *fonctions pathologiques*. Parmi celles-ci, on peut citer : la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, la fonction de Takagi (ou blanc-manger), la fonction de Weierstrass, etc.

Références

[GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
[ROM] Elements d'analyse réelle, Jean-Etienne Rombaldi

[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière ♠
[HAU] Les contre-exemples en mathématiques, Bertrand Hauchecorne
[FGNag1] Algèbre 1 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas
[FGNal3] Analyse 3 Oraux X-ENS, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas
[ELAM] Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions, Mohammed El Amrani

Développements
Méthode de Newton
Méthode de Laplace
Intégrale de Dirichlet

1 Continuité

Pour ce paragraphe, I est un intervalle réel d'extrémités $a < b$ dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

1.1 Définitions et premières propriétés [ROM] p.37 → 42

Définition 1 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue au point $\alpha \in I$ si $\lim\limits_{x \to +\alpha} f(x) = f(\alpha)$ (i.e.)*
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$
$(x \in I,\ 0 < |x - \alpha| < \eta) \ \Rightarrow\ (|f(x) - f(\alpha)| < \epsilon)$
On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Théorème 2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $\alpha \in I$, alors elle est bornée au voisinage de ce point.*

Exemple 3 *Un fonction polynomiale est continue en tout point de $\mathbb{R}$.*

Théorème 4 *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue en $\alpha \in I$ si, et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I qui converge vers α, la suite $f((x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\alpha)$.*

Exemple 5 *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = cos(\frac{1}{x})$ si $x \neq 0$ n'est pas continue en 0.*

Théorème 6 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est telle que $f(I) \subset I$ et si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de I définie par la donnée $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers un point $\alpha \in I$ en lequel la fonction f est continue, alors $f(\alpha) = \alpha$, (i.e.) α est un point fixe de f.*

Théorème 7 *Si α est un réel adhérent à I n'appartenant pas à I (un point frontière) et si la fonction et la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ a une limite l en α, il existe alors un unique prolongement de f à $I \cup \{\alpha\}$ qui est continu en α, ce prolongement est défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in I$ et $\tilde{f}(x) = l$.*

Exemple 8 *1) La fonction $f : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.*
2) La fonction $f : x \mapsto \frac{\sin}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$
3) La fonction $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$ ne peut pas se prolonger par continuité en 0 car elle n'a pas de limite en ce point.

Théorème 9 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $\alpha \in I$, J un intervalle réel contenant $f(I)$ et $g : J \to \mathbb{R}$ est continue en $\beta = f(\alpha)$, alors $g \circ f$ est continue en α.*

1.2 Propriétés générales [ROM] p.47 → 53

Théorème 10 *Toute fonction définie sur un intervalle réel fermé borné $[a, b]$ à valeurs réelles et continue est bornée et atteint ses bornes.*

Application 11 *Lemme de Riemann-Lebesgue*
Pour toute fonction f à valeurs réelles continue sur l'intervalle $[a, b]$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}t = 0$$

Définition 12 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue si $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,$*
$((x, y) \in I^2,\ 0 < |x-y| \leq \eta) \ \Rightarrow\ (|f(x)-f(y)| \leq \epsilon)$

Remarque 13 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est uniformément continue et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites d'éléments de I telles que $\lim\limits_{x\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(u_n) - f(v_n)) = 0$.*

Exemple 14 *1) La fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue.*
2) Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.
3) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Théorème 15 *Théorème de Heine*
Toute fonction f définie sur un intervalle réel fermé borné $[a, b]$ et continue, est uniformément continue sur $[a, b]$.

Proposition 16 *Toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$ périodique, et à valeurs réelles est uniformément continue.*

1.3 Théorème des valeurs intermédiaires [ROM] p.56 → 59

Théorème 17 *Si I est un intervalle réel et f une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle.*

Remarque 18 *Si la fonction f n'est pas continue en tout point de I, alors $f(I)$ n'est pas nécessairement un intervalle. En effet, avec la fonction f définie sur $I = [0, 2]$ par $f(x) = 1$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 2$ si $1 \leq x \leq 2$, on a que f est continue sur $I \backslash \{1\}$ avec $f(I) = \{1, 2\}$.*

Corollaire 19 *Théorème des valeurs intermédiaires : Si $I = [a, b]$ avec $a < b$ et f est une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]a, b[$.*

Remarque 20 *On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle I et à valeurs réelles vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si, pour tout intervalle J contenu dans I, $f(J)$ est un intervalle.*

1.4 Fonctions réciproques [ROM] p.59 → 61

Définition 21 *Si f est une application injective d'un intervalle réel I (non réduit à un point) dans $\mathbb{R}$, elle définit alors une bijection de I sur $f(I)$ et on peut définir sa fonction réciproque notée f^{-1} par :*

$$(y \in f(I) \text{ et } x = f^{-1}(y)) \Leftrightarrow (x \in I \text{ et } y = f(x))$$

Théorème 22 *Si f est une application continue et strictement monotone de I dans $\mathbb{R}$, alors $f(I)$ est un intervalle de même nature que I, et f est une bijection de I sur $f(I)$ d'inverse f^{-1} continue strictement monotone de même sens de variation que f.*

Remarque 23 *Sans hypothèse de stricte monotonie, l'intervalle $f(I)$ n'est pas nécessairement de même nature que I. En effet, avec la fonction f définie par $f(x) = |x|$ sur $I =]-1, 1[$, on a $f(I) = [0, 1[$. De plus, f n'est pas bijective.*

Application 24 *Construction des fonctions* arcsin, arctan*, etc.*

1.5 Suites de fonctions [ELAM] p.139 → 158

Définition 25 *Soit (f_n) une suite de fonctions d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit f une fonction de X dans $\mathbb{R}$. On dit que la suite (f_n) converge unifomément vers f si,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$$

$$\Rightarrow (\forall x \in X, ||f_n(x) - f(x)|| \leq \epsilon)$$

On dit alors que f est la limite uniforme sur X de la suite de fonctions (f_n). On note parfois

$$P_n \xrightarrow{CVU} f$$

Théorème 26 *Soit (f_n) une suite uniformément convergente de fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors leur limite f est continue sur I.*

Remarque 27 • *Il existe des suites de fonctions continues qui convergent simplement mais non uniformément vers une limite qui est continue.*
• *Ce théorème permet souvent de montrer, sans calcul, que la convergence d'une suite de fonctions n'est pas uniforme. C'est par exemple le cas de la suite (e^{-nx}) sur $]0, +\infty[$.*

Exemple 28 *La suite (f_n) donnée sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = e^{-nx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$. Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$, et leur limite ne l'est pas. La convergence de (f_n) vers f n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.*

Théorème 29 ♠ *Théorème de Weierstrass :* ♠ *Toute fonction f continue sur un intervalle compact $[a, b]$, à valeurs réelles (ou complexes), est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de fonctions polynomiales.*

2 Dérivabilité

2.1 Définitions et premières propriétés [ROM] p.77 → 81

Définition 30 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est dérivable en $a \in I$ si la fonction $\tau_a : x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ définie sur $I \backslash \{a\}$ admet une limite finie en a, que l'on note $f'(a)$.*

Théorème 31 *Si f est dérivable en $a \in I$, elle est alors continue en ce point.*

Définition 32 *Si D est l'ensemble des points $x \in I$ où $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, on définit alors la fonction dérivée de f sur D par $x \mapsto f'(x)$.*
Soit la fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On note $f^{(0)} = f$. Si pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ est définie et dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

Remarque 33 *La fonction du blanc-manger (ou fonction de Takagi) est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$. On a même un résultat plus fort :*

Théorème 34 *Si $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ est muni de la norme de la convergence uniforme, alors l'ensemble des fonctions $f \in E$ qui ne sont dérivables en aucun point de $[0, 1]$ est dense dans E.*

Définition 35 *Pour $n \in \mathbb{N}$, on dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est de classe C^n sur I si elle est n fois dérivable en tout point de I et si la fonction $f^{(n)}$ est continue sur cet intervalle.*
On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$, est de classe C^∞ sur I (ou indéfiniment dérivable sur I) si elle est n fois dérivable en tout point de I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 36 *En effet, il existe des fonctions dérivables dont la dérivée n'est pas continue comme le montre la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$ dans $\mathbb{R}$ et $f(0) = 0$.*

Théorème 37 *Formule de Leibniz :*
Soient f, g deux fonctions n fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$. La fonction fg est n fois dérivable sur I avec :

$$(fg)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Théorème 38 *Soient I, J deux intervalles réels $f : I \to J$ une fonction dérivable en $a \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $b = f(a)$. La fonction $g \circ f$ est définie sur I et dérivable en a avec :*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Théorème 39 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement monotone dérivable en $a \in I$ La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si, et seulement si, $f'(a) \neq 0$ et dans ce cas, on a :*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

Application 40 • $\forall x \in]-1, 1[$, *arcsin'*$(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
• $\forall x \in]-1, 1[$, *arccos'*$(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2 Extremums et théorème de Darboux [ROM] p.87 → 89

Théorème 41 *Soit I un intervalle réel d'intérieur non vide, f une fonction à valeurs réelles définie sur I dérivable en un point a intérieur à I. Si f admet un extremum local, on a alors $f'(a) = 0$.*

Remarque 42 *La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto x^3$ au voisinage de 0.*

Théorème 43 *Soient I un intervalle réel d'intérieur non vide, $f : I \to \mathbb{R}$ et a un point de I. Si $(x-a)f'(x) \geq 0$ [resp. $(x-a)f'(x) \leq 0$] pour tout $x \in I$, alors f admet minimum [resp.* maximum*] global en a.*

Théorème 44 *Théorème de Darboux*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors sa fonction dérivée f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Corollaire 45 *Il existe des fonctions définies sur un intervalle réel qui n'admettent pas de primitive.*

3 Les grands théorèmes

3.1 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis [ROM] p.137 → 157

Théorème 46 *Théorème de Rolle*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Application 47 *Autre démonstration du théorème de Darboux et majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange.*

Théorème 48 *Théorème des accroissements finis*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

Remarque 49 *Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements sont faux dans $\mathbb{C}$*

Corollaire 50 *Inégalité des accroissements finis*
Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle compact $[a, b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. S'il existe $M > 0$ telle que $f'(x) \leq M$ $\forall x \in]a, b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$

Application 51 *Sens de variation d'une fonction :*
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors f est croissante sur I si, et seulement si, $f'(x) \geq 0$ pour tout x dans I.

Application 52 *Limite et dérivation*
Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[\setminus \{c\}$, où c est un point de $]a, b[$. Si la fonction dérivée f' a une limite l en c, alors f est dérivable en c avec $f'(c) = l$.

Application 53 *(du théorème de Rolle)*
Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange
Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}, $x_0, ...x_n$ $n + 1$ points distincts de $[a, b]$, et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ le polynôme interpolateur de f aux points $x_0, ...x_n$. On pose $\Pi_n(x) = \prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$.
Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\zeta_x \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Pi_n(x) f^{(n+1)}(\zeta_x)$$

[ROM] p.143

3.2 Formules de Taylor [ROM] p.181 $\rightarrow$ 144

Théorème 54 <u>Formule de Taylor-Lagrange</u>
Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(a \neq b)$, de classe C^n sur cet intervalle et $n+1$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{n+1}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 55 <u>Formule de Taylor avec reste intégral</u>
Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ de classe C^{n+1}, alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(b-t)^n \, \mathrm{d}t$$

Application 56 <u>Formule de Taylor-Young</u>
Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I. Si f est dérivable à l'ordre $n \geq 1$ en a, elle admet alors, au voisinage de a, le développement limité d'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Application 57 <u>Problèmes d'extremums</u>
Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^n avec $n \geq 2$ et a dans I tel que $f^k(a) = 0$ pour tout k compris entre 1 et $n-1$ et $f^n(a) \neq 0$. La fonction f admet un maximum [resp. minimum*] local en a si, et seulement si, n est pair et $f^n(a) < 0$ [resp. $f^n(a) > 0$].*

Application 58 <u>Inégalités</u>
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x) - x| \leq \frac{|x|^3}{3!}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(x) - x| \leq \frac{|x|^2}{2}$

Application 59 ♠ <u>Méthode de Newton</u> ♠
- *Soit $f : [c,d] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe C^2, telle que $f(c) < 0 < f(d)$, et $f'(x) > 0$, $\forall x \in [c,d]$. Soit a l'unique solution de $f(x) = 0$ et $F(x) = x - f(x)/f'(x)$.*
Alors pour $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $\exists \alpha > 0$ tel que $I =]a-\alpha, a+\alpha[$ soit stable par F et $\forall x_0 \in I$, (x_n) converge à l'ordre 2 vers a.
- *De plus, si f est convexe, $\forall x_0 \in [a,d]$, la méthode converge et on a :*

$$0 \leq x_{n+1} - a \leq C(x_n - a)^2 \text{ et}$$

$$x_{n+1} - a \sim \frac{1}{2}\frac{f''(a)}{f'(a)}(x_n - a)^2 \text{ si } n \rightarrow +\infty$$

[ROU]p.140

4 Fonctions pathologiques

Définition 60 *"Une fonction f est dite <u>pathologique</u> si elle a déstabilisé plus d'un mathématicien et qu'elle a joué un rôle essentiel dans l'histoire des mathématiques." Christian Aebi.*

Proposition 61 *La fonction de Dirichlet*

$$\chi_{\mathbb{Q}} \ : \ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1 & si \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si \ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

est une fonction qui :
(i) n'est continue en aucun point.
(ii) est bornée, intégrable au sens de Lebesgue, mais pas au sens de Riemann. **[HAU] p.134,208**

Proposition 62 *En notant Δ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique, dont la restriction à $[-1/2, 1/2]$ vérifie $\Delta(x) = |x|$. Alors la fonction de Takagi (ou blanc-manger)*

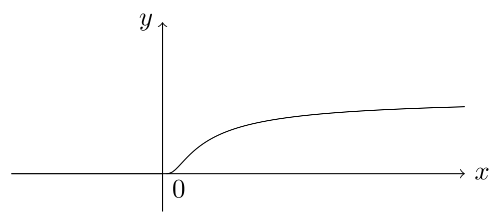
$$f \ : \ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Delta(2^p x)}{2^p}$$

est continue mais n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.
Voir Figure 1 *et* Figure 2. **[GOUan] p.85**

Proposition 63 *La fonction*

$$f \ : \ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & si \ x > 0 \\ 0 & si \ x \leq 0 \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais ne coïncide pas avec sa série de Taylor.



[GOUan] p.241

Proposition 64 *La fonction de Weierstrass*

$$f \ : \ [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & si \ x = \frac{p}{q}, \ p \in \mathbb{N}, \\ & q \in \mathbb{N}^*, \ (p,q) = 1 \\ 0 & si \ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

est discontinue en tout point rationnel et continue en tout point irrationnel. **[GOUan] p.110**

Illustrations

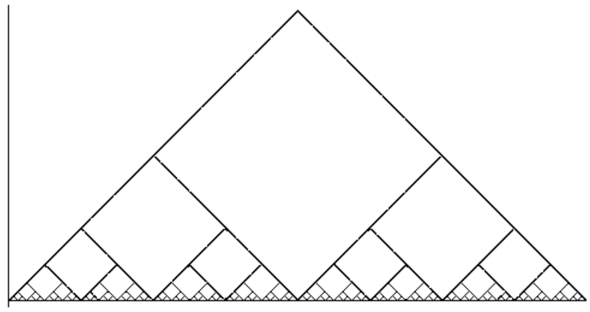


Figure 1 : Les fonctions à sommer pour obtenir la fonction de Takagi

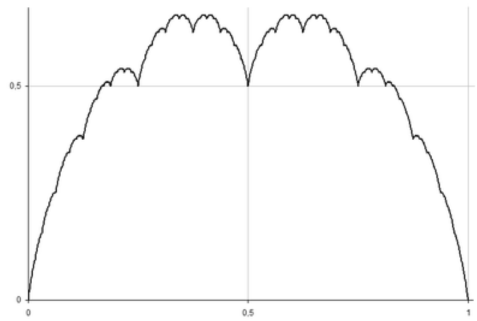


Figure 2 : La fonction de Takagi

Questions

Exercice : Existe-t-il des fonctions f qui sont dérivables sur $[0,1]$ et telle f' ne soit pas Lebesgue-intégrable ?

Solution : Regardons la fonction f définie sur $x \in [0,1]$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$.
On a $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$
Or $|2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)| \leq 2x$ et la fonction $x \mapsto 2x$ est Lebesgue-intégrable.
Mais

$$\int_0^1 \left|\frac{2}{x}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \mathrm{d}x \underbrace{=}_{u^2=1/\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos(t)}{t}\right| \mathrm{d}t = +\infty$$

<u>Conclusion :</u> f' n'est pas Lebesgue-intégrable ?

Exercice : Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements sont faux dans $\mathbb{C}$. Donnez un exemple qui illustre cette assertion.

Solution : Posons la fonction

$$f \ : \ [0,2\pi] \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto e^{it}$$

On a donc $f(0) = 1$ et $f(2\pi) = 1$, et on remarque qu'il n'existe pas $t_0 \in [0,2\pi]$ tel que $f'(t_0) = ie^{it_0} = 0$.

Exercice : Quelles sont les fonctions sur $\mathbb{R}$ qui sont limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de suites de polynômes ?

Solution : Soit donc une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes telle que $P_n \xrightarrow{CVU} f$ (*i.e.*)
Soit $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $n \geq N \Rightarrow |P_n(x) - f(x)| < \epsilon$
Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p,q \geq N \Rightarrow |P_p(x) - P_q(x)| \leq |P_p(x) - f(x)| + |P_q(x) - f(x)| \leq 2\epsilon$
Donc le polynôme $P_p - P_q$ est borné, et par conséquent constant. Autrement dit, pour $p,q \geq N$, $P_p - P_q = c_{pq}$ (constante qui dépend de p et q).
En fixant $q = N$, on a pour $p \geq N$, $P_p - P_N = c_p$. ($\blacklozenge$)
Et du coup, pour $p \geq N$, $q \geq N$, on a $P_p - P_q = c_p - c_q$.
Ainsi, pour $p \geq N$, $q \geq N$, on a $|c_p - c_q| \leq 2\epsilon$ et donc (c_n) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet, donc converge vers c dans $\mathbb{R}$.
En passant à la limite ($p \to +\infty$) dans ($\blacklozenge$), on a $f - P_N = c$, et ainsi $f = P_N + c$ est bien un polynôme.

Exercice : Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire sur le type de convergence d'une suite de polynômes (P_n) vers f ?

Solution : Il s'agit de la convergence sur tout compact.
En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On applique le théorème de Weierstrass sur le compact $[-n,n]$, et il existe donc P_n tel que $\sup\limits_{[-n,n]} |P_n - f| \leq \frac{1}{n}$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}$. K est borné et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset [-n,n]$ pour $n \geq n_0$. Par conséquent,

$$\sup_K |P_n - f| \leq \sup_{[-n,n]} |P_n - f| \leq \frac{1}{n}$$

Conclusion : $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur K.

Exercice : En admettant qu'il existe une fonction continue nulle part dérivable, montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle part dérivable est dense dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}),||.||_\infty)$.

Solution : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et φ une fonction continue nulle part dérivable (par exemple, la fonction de Takagi).
Par le théorème de Weierstrass, $f-\varphi$ est limite uniforme d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(i.e)$ $f-\varphi = \lim_{n\to+\infty} P_n$ au sens de la convergence uniforme $(i.e)$ $f = \lim_{n\to+\infty}(P_n+\varphi)$ (toujours) au sens de la convergence uniforme, et comme $P_n+\varphi$ est une fonction continue nulle part dérivable, on a le résultat.