Lemme de Morse

Mohamed NASSIRI

Références :

Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière- p.354, p.210

Recasage :

● ● ● ● ● 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.
● ● ● ● ● 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie.
● ● ● ● ○ 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.
● ● ● ● ○ 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.
● ● ● ● ○ 218 : Applications des formules de Taylor.
● ● ● ● ○ 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Résumé :

Le lemme de Morse dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (une fonction de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine) est une application quadratique, à un difféomorphisme local près, dès que sa hessienne en 0 est non dégénérée.

Prérequis :

Applications différentiables - Formules de Taylor - Théorème d'inversion locale - Formes quadratiques

---

Théorème : Soit $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3 sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ contenant l'origine. On suppose que $Df(0) = 0$ et que $D^2f(0)$ est non dégénérée, de signature $(p, n-p)$.
Alors il existe un difféomorphisme $x \mapsto u := \varphi(x)$ entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$, de classe C^1, tel que

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) - f(0) = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$$

Démonstration.
La première chose à remarquer, c'est que l'on a une donnée seulement sur $D^2f(0)$ et que l'on aimerait en extraire quelque chose *au voisinage de 0* tout ça via un C^1-difféomorphisme : bien évidemment, on sent bien le théorème d'inversion locale.
La deuxième chose à remarque, c'est le lien entre la signature de $D^2f(0)$ et l'écriture de $f(x) - f(0)$: ici, la loi d'inertie de Sylvester fera marcher la chose.

Allons-y !
La formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral au voisinage de 0 donne :

$$f(x) - f(0) = {}^t x Q(x) x$$

où $Q(x) = \int_0^1 (1-t) D^2 f(tx)\, \mathrm{d}t$ est une fonction C^1 et $Q(x)$ est une matrice symétrique.

Lemme :
Soit $A_0 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ inversible. On considère :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^t M A_0 M \end{array}$$

Alors,
(i) $D\varphi(I)$ est surjective, de noyau $\{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t(A_0 H) = -A_0 H\}$
(ii) Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de A_0 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et une application $A \mapsto M$ de $\mathcal{V}$ dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, tel que $A = {}^t M A_0 M$ pour tout $A \in \mathcal{V}$.

Démonstraton du lemme.
(i)
• Calculons la différentielle de φ en I :
La fonction φ est polynomiale (en les coefficients de la matrice M), donc elle est C^1 (et même C^∞ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \varphi(I+H) = {}^t(I+H)A_0(I+H) &= (A_0 + {}^t H A_0)(I+H) \\ &= A_0 + A_0 H + {}^t H A_0 + {}^t H A_0 H \\ &= \varphi(I) + {}^t(A_0 H) + A_0 H + O(||H||^2) \end{aligned}$$

d'où $D\varphi(I)(H) = {}^t(A_0 H) + A_0 H$.

• $\mathrm{Ker} D\varphi(I) = \{H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t(A_0 H) = -A_0 H\}$

• Surjectivité : Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ donnée, l'équation $D\varphi(I)(H) = A$ a pour solution $H = \frac{1}{2} A_0^{-1} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(ii)
Toute matrice étant, de manière unique, somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique, le sous-espace F de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices M telles que $A_0 M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un supplémentaire du noyau de $D\varphi(I)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, $I \in F$.

Soit $\psi := \varphi_{|F} : F \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a donc que $D\psi(I)$ est bijective puisque $Ker D\varphi(I) \cap F = 0$.
Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de I dans F (que l'on peut même supposer dans les matrices inversibles par continuité du déterminant) tel que ψ soit un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V} := \psi(\mathcal{U})$. Ainsi, $\mathcal{V}$ est un voisinage ouvert de $A_0 = \psi(I) = \varphi(I)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et, pour tout $A \in \mathcal{V}$, il existe une unique matrice inversible $M \in \mathcal{U}$ telle que $A = {}^t M A_0 M$, et $A \mapsto M := \psi^{-1}(A)$ est une fonction de classe C^1 de A.

$\square$

Revenons à la démonstration du théorème.
Il existe donc une matrice inversible $M(x)$, fonction C^1 de x au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, telle que

$$Q(x) = {}^t M(x) Q(0) M(x)$$

d'où $f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y$, avec $y = M(x)x$.
Or $Q(0) = \frac{1}{2} D^2 f(0)$ est de signature $(p, n-p)$, et, d'après la loi d'inertie de Sylvester, il existe donc un changement linéaire de coordonnées $y = Au$, où A est une matrice inversible telle que :

$$f(x) - f(0) = {}^t y Q(0) y = {}^t (Au) Q(0) Au = u_1^2 + ... + u_p^2 - u_{p+1}^2 - ... - u_n^2$$

Enfin, l'application $x \mapsto u = A^{-1} M(x) x$ a pour différentielle à l'origine $A^{-1} M(0)$, qui est une matrice inversible. Toujours par le théorème d'inversion locale, c'est un C^1-difféomorphisme entre deux voisinages de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

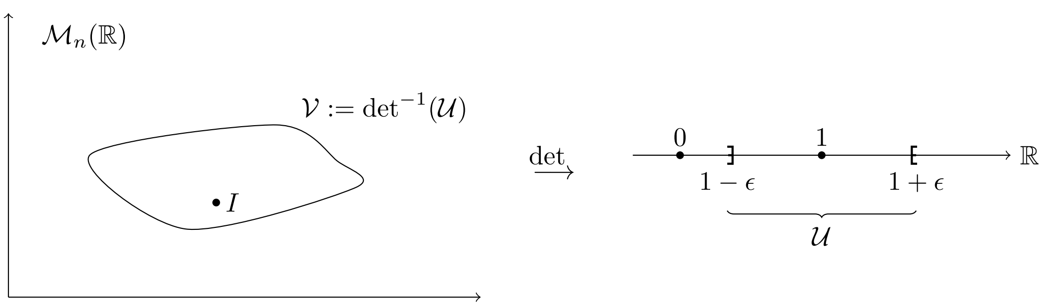
$\square$

Remarques :

- Dans la démonstration, on a écrit ceci :

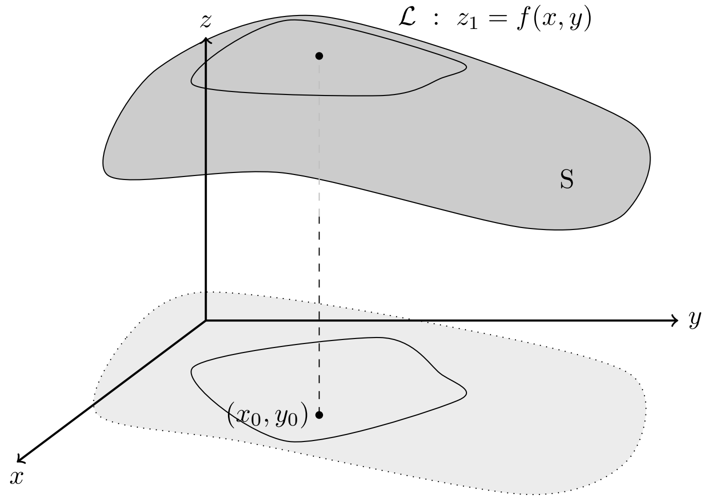
  " il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de I dans F (que l'on peut même supposer dans les matrices inversibles par continuité du déterminant) tel que ψ soit un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V} := \psi(\mathcal{U})$."

  Soyons professionnel et donnons une explication à cette assertion. On sait que $\det I = 1$. Dans $\mathbb{R}$, on peut choisir $\epsilon > 0$ tel que $]1-\epsilon, 1+\epsilon[\cap \{0\} = \varnothing$. Notons $\mathcal{U} =]1-\epsilon, 1+\epsilon[$. $\mathcal{U}$ est incontestablement un ouvert de $\mathbb{R}$, et comme l'application det est continue, $\mathcal{V} := \det^{-1}(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui ne contient aucune matrice avec un déterminant nul (car $\det(\mathcal{V}) = \mathcal{U} =]1-\epsilon, 1+\epsilon[\subset]0, +\infty[$).

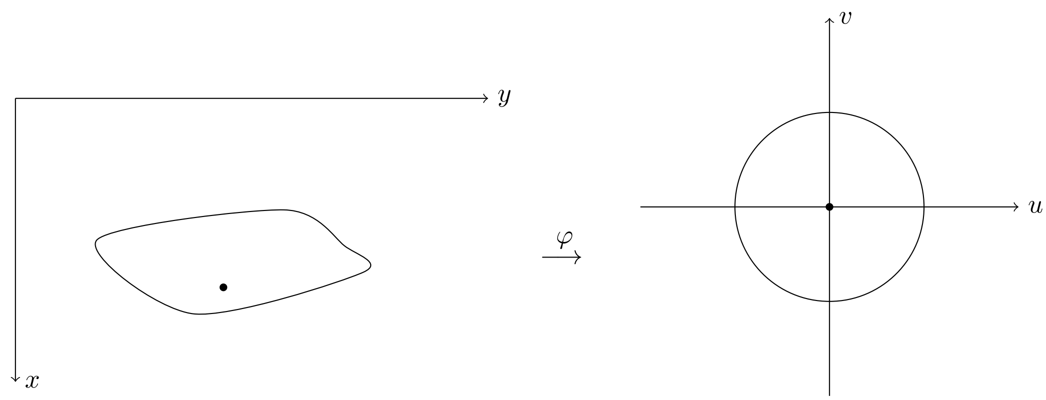


- On peut donner une interprétation géométrique du lemme de Morse : soient S une surface paramétrée $z = f(x,y)$, où f est une fonction de classe (au moins) C^3 et (x_0, y_0) un point maximum (par exemple) de f.
  On a tracé la ligne de niveau $\mathcal{L}\ :\ z_1 = f(x,y)$ pour z_1 proche de z_0 et on a projeté ensuite cette ligne

de niveau dans le plan (O, x, y)



En ne considérant que le plan (O, x, y), on obtient la première figure ci-dessous. Le lemme de Morse dit, qu'à difféormorphisme près, les coordonnées (y, x) deviennent (u, v) et notre ligne de niveau devient un cercle centré en $(0, 0)$



- En fait ce théorème est vrai pour f de classe C^1 et possédant une différentielle seconde non dégénérée en 0, mais c'est beaucoup plus dur ... On peut trouver une preuve dans le cours d'analyse de Doukhan et Sifre.

- Donnons une application géométrique du lemme de Morse :
Proposition : Soit S une surface paramétrée $z = f(x, y)$, où f est une fonction de classe (au moins) C^3. Soit (x_0, y_0), un point critique non dégénéré de f. Soit $T_{S,(x_0,y_0)}$ le plan tangent à S au point (x_0, y_0).
– Si $f''(x_0, y_0)$ est de signature $(2, 0)$, alors S est au dessus de $T_{S,(x_0,y_0)}$ au voisinage de (x_0, y_0).
– Si $f''(x_0, y_0)$ est de signature $(0, 2)$, alors S est en dessous de $T_{S,(x_0,y_0)}$ au voisinage de (x_0, y_0).
– Si $f''(x_0, y_0)$ est de signature $(1, 1)$, alors S traverse $T_{S,(x_0,y_0)}$ en (x_0, y_0).