

Fonctions holomorphes sur un ouvert de \mathbb{C} . Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

INTRO

Mais également du côté de l'analyse complexe, on a le *théorème d'holomorphie sous le signe intégral*. Un très bon exemple qui utilise ces théorèmes est la fonction Gamma d'Euler. Dans le cas complexe, on obtient, pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, que la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$

Toujours, du côté de l'analyse complexe, on a comme résultat le *théorème des résidus* qui nous permet de calculer l'intégral d'une fonction seulement à partir des résidus de la fonction. On donne l'exemple de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

qui, sans la méthode des résidus, est un calvaire à calculer ...

Références

- [ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco
- [CAND] Calcul intégral, Bernard Candelpergher
- [GOUan] Les maths en tête : Analyse, Xavier Gourdon
- [HMQUE] Analyse complexe et applications, Martine Queffélec et Hervé Queffélec ♠
- [OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré ♠

Développements

Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$
Principe des zéros isolés

0 Rappels sur les séries entières et les fonctions analytiques

Définition 1 On appelle *série entière* de variable complexe, toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$$

où z est une variable complexe et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans \mathbb{C} . [GOUan] p.236

Proposition 2 *Lemme d'Abel*

Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée. Alors

- (i) $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente ;
- (ii) $\forall r > 0, 0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est

normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$. [GOUan] p.236

Définition 3 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière. Le nombre

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$$

s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$.

Le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.

Si $R = +\infty$, la somme de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ définit une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} appelée fonction entière. [GOUan] p.237

Proposition 4 Soit $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors

- (i) Si $|z| < R$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est absolument convergente,

(ii) Si $|z| > R$, alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est divergente.

(iii) $\forall r > 0, 0 < r < |z_0|$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est normalement convergente dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$.
[GOUan] p.237

Théorème 5 L'application

$$f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$$

est de classe C^1 . La série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} n a_n z^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$, et on a

$$\forall x \in]-R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

[GOUan] p.238

Corollaire 6 La somme f de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ est de classe C^∞ sur $]-R, R[$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}$ est la somme sur $]-R, R[$ d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$. En outre,

$$\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{f^{(p)}(0)}{p!}$$

Ainsi,

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{f^{(p)}(0)}{p!} z^p$$

[GOUan] p.238

Définition 7 Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ (où Ω est un ouvert de \mathbb{C}) est dite analytique dans Ω si pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque ouvert $\Delta : \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\} \subset \Omega$ tel que

$$\forall z \in \Delta, f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

où le seconde membre est un série entière en $z - z_0$ convergente dans Δ . **[GOUan] p.256**

Exemple 8 Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, on a

$$\frac{1}{z - z_0} = -\frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z}{z_0}\right)^n$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{(z - z_0)^p} = -\frac{(-1)^p}{z_0^p (p-1)!} \sum_{n=p-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p+1)!} \left(\frac{z}{z_0}\right)^{n-p+1}$$

[GOUan] p.240

1 Fonctions holomorphes

[ML3an] p.416 → 435

1.1 Fonctions holomorphes

Définition 9 Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $z_0 \in \mathbb{C}$. Une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite \mathbb{C} -dérivable en z_0 lorsque le taux de variation

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

possède une limite lorsque $z \rightarrow z_0$. On note $f'(z_0)$ cette limite.

Lorsque f est \mathbb{C} -dérivable en tout point de \mathcal{U} , elle est dite holomorphe dans \mathcal{U} .

On note $\mathcal{H}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur \mathcal{U} .

Une fonction holomorphe sur \mathbb{C} tout entier est dite entière.

Exemple 10 Une fonction polynomiale est entière.

Une série entière est holomorphe sur son domaine de convergence.

Remarque 11 Lorsque f est holomorphe sur \mathcal{U} , il est possible de définir son application dérivée :

$$f' : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto f'(z)$$

Proposition 12 Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en z_0 et si $g : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe en $f(z_0) \in \mathcal{V}$, alors $g \circ f$ est holomorphe en z_0 et on a

$$(g \circ f)'(z_0) = f'(z_0)g'(f(z_0))$$

Définition 13 Soient \mathcal{U} un ouvert \mathbb{C} et $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dont les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existent en $z_0 = (x_0 + iy_0)$. On définit alors les opérateurs dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \right)$$

La différentielle de f s'écrit alors

$$Df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) d\bar{z}$$

où l'on a posé $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$

Proposition 14 Soient \mathcal{U} un ouvert \mathbb{C} et $z_0 = (x_0 + iy_0) \in \mathcal{U}$. Soit $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe au point z_0 si et seulement si elle est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et si ses dérivées partielles en z_0 vérifient la condition de Cauchy

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$$

En notant $f = P + iQ$, cette condition est équivalente aux conditions de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) &= -\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

La dérivée complexe de f en z_0 est alors donnée par

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Définition 15 Soit une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f admet une primitive sur \mathcal{U} s'il existe une fonction holomorphe $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant $F' = f$ sur \mathcal{U} .

1.2 Intégration le long des chemins de \mathbb{C}

Définition 16 Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} . Un chemin dans \mathcal{U} est une application continue γ d'un intervalle compact $I = [a, b]$ de \mathbb{R} , à valeurs dans \mathcal{U} .

Les points $\gamma(a)$ et $\gamma(b)$ sont respectivement appelés origine et extrémité du chemin γ .

Un chemin fermé ou lacet est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

Exemple 17 (i) Le segment :

Soient $a, b \in \mathbb{C}$. L'image du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto (1-t)a + tb \end{aligned}$$

est le segment reliant les points a et b . Cette paramétrisation γ du segment s'appelle paramétrisation orientée de a vers b du segment $[a, b]$.

(ii) Le cercle :

Soient $a \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. L'image du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto a + re^{it} \end{aligned}$$

est le cercle de centre a et de rayon r . Cette paramétrisation γ du segment s'appelle paramétrisation orientée du cercle de centre a et de rayon r que l'on note $C_{a,r}$.

(iii) Le bord d'un triangle :

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Notons $\Delta(a, b, c)$ le triangle plein

de sommets a, b, c et $\partial\Delta$ sa frontière.

$\partial\Delta$ est l'image du chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 3] &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto \begin{cases} (1-t)a + tb & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (2-t)b + (t-1)c & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t)c + (t-2)a & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Cette paramétrisation s'appelle paramétrisation du bord orienté du triangle (a, b, c) .

Définition 18 Soient $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin C^1 par morceaux et $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'image $\gamma(I)$. L'intégrale de f le long de γ est définie par

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

Exemple 19 Soient $a \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}_+^*$ et f une fonction continue sur le cercle de centre a et de rayon r . Alors

$$\int_{C_{a,r}} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) ire^{it} dt$$

Proposition 20 Soient \mathcal{U} un ouvert \mathbb{C} et f une fonction continue sur \mathcal{U} . Si f admet une primitive F sur \mathcal{U} , alors pour tout chemin d'image contenue dans \mathcal{U} , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

En d'autres termes, la valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin choisi.

En particulier, pour tout chemin fermé γ dans \mathcal{U} , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Exemple 21 La fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

n'admet pas de primitive sur \mathbb{C}^* car pour tout $r > 0$, on a

$$\int_{C_{0,r}} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2i\pi \neq 0$$

Théorème 22 Soient \mathcal{U} un ouvert \mathbb{C} et f une fonction continue sur \mathcal{U} .

Alors f admet une primitive sur \mathcal{U} si et seulement si pour tout chemin fermé γ dans \mathcal{U} , on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Théorème 23 Soit \mathcal{U} un ouvert connexe \mathbb{C} . Une fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ admet une primitive sur \mathcal{U} si et seulement si pour tout triangle Δ (convexe fermé) inclus dans \mathcal{U} , on a

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0$$

1.3 Théorème de Cauchy

Théorème 24 Théorème de Cauchy pour le bord d'un triangle

Soient \mathcal{U} un ouvert \mathbb{C} , S une partie finie de \mathcal{U} et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus S$. Soit enfin un triangle $\Delta \subset \mathcal{U}$. Alors

$$\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$$

Théorème 25 Théorème de Cauchy pour un ouvert convexe

Soient \mathcal{U} un ouvert \mathbb{C} , S une partie finie de \mathcal{U} et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et holomorphe sur $\mathcal{U} \setminus S$. Alors f possède une primitive sur \mathcal{U} . En conséquence, pour tout chemin fermé γ dans \mathcal{U} , on a

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

Corollaire 26 Soient \mathcal{U} un ouvert quelconque \mathbb{C} et f une fonction holomorphe sur \mathcal{U} . Alors pour tout point $z_0 \in \mathcal{U}$, il existe un voisinage ouvert D de z_0 sur lequel f admet une primitive.

Théorème 27 local QUEF p96

Théorème 28 Soient Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est holomorphe sur Ω .
- (ii) f est analytique dans Ω . [HMQUE] p.83

2 Propriétés fondamentales des fonctions holomorphes

2.1 Théorème de prolongement des identités [HMQUE] p.102 → 104

Théorème 29 ♠ Principe des zéros isolés ♠

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert connexe Ω), non identiquement nulle, et soit $Z(f) = \{a \in \Omega \mid f(a) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f .

- (1) Si $a \in Z(f)$, $\exists k \geq 1$ et $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telle que :

$$f(z) = (z - a)^k g(z) \quad \text{avec } g(a) \neq 0$$

- (2) $Z(f)$ est au plus dénombrable et ses points sont isolés dans Ω .

Application 30 Théorème de prolongement des identités Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ égales sur une partie E de Ω qui possède un point d'accumulation dans Ω . Alors, $f = g$.

En particulier, si f et g coïncident sur un ouvert non vide de Ω , elles sont égales.

Application 31 (du théorème de prolongement des identités) Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, et en considérant la fonction entière

$$F(z) = e^{z^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2} dt$$

on a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi} dt = \sqrt{2\pi}e^{-\xi^2/2}$$

Application 32 Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert connexe, et soient $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ telles que $fg = 0$. Alors, $f = 0$ ou $g = 0$. En d'autres termes, l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ est intègre.

2.2 Les inégalités de Cauchy et leurs applications [ML3an] p.440-441

Théorème 33 Inégalités de Cauchy

Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert \mathcal{U} , $z_0 \in \mathcal{U}$ et $R > 0$ tel que le disque $D(z_0, R) \subset \mathcal{U}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout r tel que $0 < r < R$

$$\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

où $M(r) = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|$

Corollaire 34 Théorème de Liouville

Si f est une fonction entière et bornée sur \mathbb{C} , alors f est constante.

Corollaire 35 Théorème de D'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant à coefficients complexes admet une racine complexe.

Théorème 36 Théorème de d'holomorphie sous le signe intégral

Soient (X, \mathcal{M}, μ) un espace mesuré et D un ouvert de \mathbb{C} . On considère une fonction $f : D \times X \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

- (i) $\forall z \in D$, l'application $y \mapsto f(z, y)$ est mesurable.
- (ii) Pour presque tout $y \in X$, l'application $x \mapsto f(x, y)$ est holomorphe dans D .
- (iii) $\exists g \in L^1(\mu)$ telle que $|f(z, y)| \leq g(y) \quad \forall z \in D$ et pour presque tout $y \in X$.

Alors l'application

$$F : D \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \int_X f(z, y) d\mu(y)$$

est définie et holomorphe dans D , et on a

$$F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, y) d\mu(y)$$

[MLan] p.279

Exemple 37 Fonction Gamma - cas complexe
 Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > 0$, la fonction

$$\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

est holomorphe dans $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$
[ML3an] p.279

2.3 Propriétés de la moyenne et principe du maximum [ML3an] p.442-443

Proposition 38 Propriété de la moyenne
 Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert \mathcal{U} .
 Pour tout disque fermé $\overline{D}(a, r) \subset \mathcal{U}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Théorème 39 Principe du maximal local
 Soient f une fonction holomorphe sur un ouvert \mathcal{U}
 et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un maximum local en a , alors
 f est constante sur un voisinage de a .

Corollaire 40 Soient f une fonction holomorphe
 sur un ouvert \mathcal{U} connexe et $a \in \mathcal{U}$. Si $|f|$ admet un
 maximum en a , alors f est constante sur \mathcal{U} .

Théorème 41 Soient \mathcal{U} un ouvert connexe borné
 de \mathbb{C} et f une fonction continue sur $\overline{\mathcal{U}}$ et holo-
 morphes sur \mathcal{U} . On pose $M = \max_{\partial\mathcal{U}} |f(z)|$. Alors

$$\forall z \in \mathcal{U}, |f(z)| \leq M$$

De plus, s'il existe un point de \mathcal{U} en lequel le maxi-
 mum est atteint, alors f est constante sur \mathcal{U} .

3 Singularités des fonctions holomorphes

3.1 Classification des singularités isolés [ML3an] p.461 → 464

Définition 42 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , $a \in \mathcal{U}$ et
 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{a\})$.

(i) On dit que a est une singularité effaçable pour
 f s'il existe $g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ telle que :

$$f(z) = g(z), \quad \forall z \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$$

(ii) On dit que a est une pôle d'ordre m pour f s'il
 existe des scalaires c_{-1}, \dots, c_{-m} avec $c_{-m} \neq 0$ tels
 que

$$f(z) - \sum_{k=1}^{+m} c_{-k} (z-a)^{-k}$$

ait une singularité effaçable en a .

(iii) Si la singularité n'est ni artificielle, ni un pôle,
 on dit qu'elle est essentielle. **[HMQUE] p.155-156**

Exemple 43 (i) La fonction $f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$ a une
 singularité effaçable en 0 : il suffit de poser $f(0) = 1$
 et d'écrire $f(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

(ii) La fonction $f(z) = \frac{e^z}{z}$ a un pôle d'ordre 1 en 0 .

(iii) La fonction $f(z) = e^{1/z}$ a une singularité es-
 sentielle en 0 . **[HMQUE] p.155-156**

Proposition 44 Lemme de Riemann

Soit $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U} \setminus \{a\})$, où $a \in \mathcal{U}$. Si f est bornée dans
 un voisinage épointé $V \setminus \{a\}$ de a , alors a est une
 singularité effaçable pour f .

3.2 Théorème des résidus [CAND] p.113 → 121

Théorème 45 Soit \mathcal{U} un ouvert non vide et $a \in \mathcal{U}$.
 Soit f une fonction analytique/holomorphe sur
 $\mathcal{U} \setminus \{a\}$. Pour tout disque fermé $\overline{D}(a, R)$ ($R > 0$),
 inclus dans \mathcal{U} , on a pour tout $z \in D(a, R) \setminus \{a\}$

$$f(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z-a)^{-m} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

Ce développement est unique et est appelé
développement de Laurent de f en a .

La série

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} (z-a)^{-m}$$

s'appelle la partie singulière de f en a .

Les coefficients c_n et c_{-m} sont donnés par

$$c_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} f(a + Re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{pour } n \geq 0$$

$$c_{-m} = \frac{r^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) e^{im\theta} d\theta \quad \text{pour } m \geq 1$$

où $0 < r < R$ est quelconque.

Définition 46 Soient \mathcal{U} un ouvert, $a \in \mathcal{U}$ et f une
 fonction analytique/holomorphe dans $\mathcal{U} \setminus \{a\}$. Le co-
 efficient c_{-1} du développement de Laurent de f en a
 s'appelle le résidu de f en a , il est noté $\operatorname{Res}(f, a)$.

Théorème 47 Théorème des résidus

Soit \mathcal{U} un ouvert simplement connexe, a_1, a_2, \dots, a_n
 des points de \mathcal{U} et f une fonction analy-
 tique/holomorphe dans $\mathcal{U} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Soit γ un
 lacet de $\mathcal{U} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ tel que pour tout i le lacet
 γ entoure une fois le point a_i (c'est-à-dire est ho-
 motope dans $\mathcal{U} \setminus \{a_i\}$ à un cercle centré en a_i). Dans
 ce cas, on a

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \operatorname{Res}(f, a_i)$$

Application 48

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\theta - 2} d\theta = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Corollaire 49 Soit \mathcal{U} un ouvert simplement connexe et f une fonction analytique/holomorphe dans \mathcal{U} . Soit γ un lacet de \mathcal{U} entourant une fois les zéros de f .

Alors le nombre de zéros de f , comptés avec leur multiplicité, entourés par γ est

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

4 Suites et séries de fonctions holomorphes [ML3an] p.478

→ 500

Définition 50 Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} . Une fonction méromorphe dans \mathcal{U} est une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathcal{U} \setminus A$ où A est un ensemble fermé et discret de \mathcal{U} , telle que chaque point de A soit un pôle de f .

On note $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur \mathcal{U} .

Définition 51 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de \mathcal{U} dans \mathbb{C} . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de \mathcal{U} vers la fonction $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe $N_{\epsilon, K}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_{\epsilon, K}, \forall z \in K, |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

Théorème 52 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur \mathcal{U} .

Si la suite la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f , alors f est holomorphe sur \mathcal{U} .

De plus, f' est la limite uniforme sur tout compact de la suite de fonctions dérivées $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Corollaire 53 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur \mathcal{U} .

Si la suite la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f , alors pour tout entier k , la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact vers $f^{(k)}$.

Définition 54 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} . Une suite exhaustive de compacts d'un espace topologique \mathcal{U} est une suite de compacts $(K_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$K_n \subset K_{n+1} \text{ et } \Omega = \bigcup_{n \geq 0} K_n.$$

Exemple 55 (i) $K_n = BF(0, n)$ est une suite exhaustive de compacts de \mathbb{C}

(ii) Si \mathcal{U} est borné,

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \mathcal{U}^c) \geq 1/n\}$$

est une suite exhaustive de compacts de \mathcal{U} .

(ii) Si \mathcal{U} est non borné,

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \mid d(z, \mathcal{U}^c) \geq 1/n\} \cap BF(0, n)$$

est une suite exhaustive de compacts de \mathcal{U} .

Définition 56 Soit \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} . Pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, l'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_K : C(\mathcal{U}) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\mapsto \|f\|_K := \sup_{z \in K} |f(z)| \end{aligned}$$

est une semi-norme sur $C(\mathcal{U})$.

Proposition 57 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} , $(K_p)_{p \geq 0}$ une suite exhaustive de compacts de \mathcal{U} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur \mathcal{U} .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout compact de vers f .

(ii) Pour tout compact K , $\|f_n - f\|_K \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

(iii) Pour tout p fixé, $\|f_n - f\|_{K_p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Définition 58 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur \mathcal{U} . On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de \mathcal{U} vers une fonction f si, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N, \forall z \in K,$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) - f(z) \right| < \epsilon$$

Proposition 59 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur \mathcal{U} . Si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f , alors sa somme f est holomorphe sur \mathcal{U} .

De plus, f' s'obtient par dérivation terme à terme

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'$$

Définition 60 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur \mathcal{U} . On dit que la série $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout compact de \mathcal{U} si pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, la série numérique $\sum \|f_n\|_K$ est convergente.

Proposition 61 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur \mathcal{U} . Si la série $\sum f_n$ converge normalement sur tout compact vers une fonction f , alors elle converge uniformément sur tout compact.

Sa limite f est en particulier holomorphe sur \mathcal{U} .

De plus, la série $\sum f_n'$ converge elle aussi normalement sur tout compact.

Définition 62 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur \mathcal{U} . On dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur tout compact de \mathcal{U} si, pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$:

- (i) il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K ,
- (ii) la série $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K .

Proposition 63 Soient \mathcal{U} un ouvert de \mathbb{C} et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur \mathcal{U} telle que :

- (i) pour tout compact K de \mathcal{U} , il existe N_K tel que, pour $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K ,

(ii) la série $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K .
Alors la somme de la série $\sum f_n$ est méromorphe sur \mathcal{U} .

Théorème 64 ♠ Prolongement de Γ sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$
♠

La fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

est un prolongement méromorphe de Γ sur \mathbb{C} , holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}$, dont les pôles, tous simples, sont les entiers négatifs. [OBJ] p.82-83

Illustrations

Questions

Exercice : Soient Ω est un ouvert de \mathbb{C} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est holomorphe sur Ω .

(ii) f est analytique dans Ω .

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

