Systèmes d'équations linéaires ; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

Mohamed NASSIRI

RACONTE TA LIFE.

Références
[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[MER] Cours de géométrie, Dany-Jack Mercier
[DUM] Modélisation à l'oral de l'Agrégation : Calcul scientifique, Laurent Dumas
[CIA] Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation, Philippe Ciarlet
[FILB] Analyse numérique : Algorithme et étude mathématique, Francis Filbet
[DIM] Analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Laurent Di Menza ♠
[WAR] Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel

Développements
Convergence des méthodes itératives
Méthode du gradient à pas optimal

1 Généralités

1.1 Définition [GRI] p.37-39

Définition 1 *On appelle* <u>*système d'équations linéaires*</u> *un système du type*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les x_i sont dites <u>*inconnues*</u>*, et* <u>*résoudre le système*</u> *signifie déterminer les x_i, s'il y en a, qui vérifient toutes les équations.*

Remarque 2 *On écrit le système précédent sous la forme matricielle*

$$Ax = b$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \text{et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition 3 *On dit qu'une matrice est* <u>*échelonnée*</u> *si les lignes commencent par un nombre de zéros strictement croissant à mesure que l'indice augmente.*

1.2 Système de Cramer [GRI] p.142-143

Définition 4 *On appelle* <u>*système de Cramer*</u> *un système linéaire dont la matrice est carrée et inversible.*

Théorème 5 <u>*Théorème de Cramer :*</u>
Un système de Cramer :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

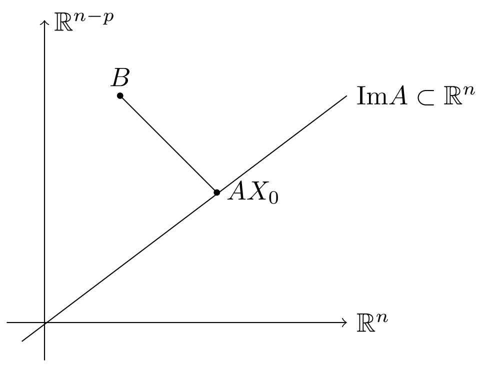
(avec $A = (a_{ij}) = (c_1, ..., c_n)$ et $\det A \neq 0$) admet toujours une et une seule solution $\forall b = (b_1, ..., b_n)$ donnée par les formules de Cramer :

$$x_i = \frac{\det(c_1, ..., c_{i-1}, b, c_{i+1}, ..., c_n)}{\det A}$$

1.3 Moindres carrées [MER] p.142

Proposition 6 <u>*Minimisation de $||AX - B||^2$:*</u>
Soient A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$, X un vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ et B un vecteur colonne de $\mathbb{R}^n$
1) Le minimum de $||AX - B||^2$ pour X décrivant $\mathbb{R}^p$ est atteint en un point X_0 qui vérifie $Ax_0 = p(B)$, où p désigne la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathrm{Im}A$*.*
2) Si $\mathrm{rg}A = p$, alors X_0 est unique et vérifie

${}^tAAX_0 = {}^tAB$



2 Méthodes directes

2.1 Opérations élémentaires [WAR] p.901 → 903

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Définition 7 *On appelle* <u>*opérations élémentaires*</u> *sur les lignes (*resp. *colonnes) d'une matrice l'une des trois opérations suivantes :*
(i) *addition d'un mutiple d'une ligne (*resp. *colonne) à une autre ligne (*resp. *colonne).*
(ii) *multiplication d'une ligne (*resp. *colonne) par un scalaire non nul,*
(iii) *échanges de deux lignes (*resp. *colonnes).*

Remarque 8 *Etant donnés deux entiers distincts i et j compris entre 1 et n et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on convient des codages suivants :*
(i) *addition de λL_j à la ligne L_i : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$*
(ii) *multiplication de L_i par λ : $L_i \leftarrow \lambda L_i$*
(iii) *échange de L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$*
On utilise le même codage pour les colonnes en remplaçant L par C.

Proposition 9 *Deux matrices déduites l'une de l'autre par un nombre fini d'opérations élémentaires ont même rang.*

Définition 10 *On appelle* <u>*matrice de transvection*</u> *toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On appelle <u>*matrice de dilatation*</u> *toute matrice diagonale $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$*

Proposition 11 (i) *Chaque opération élémentaire sur les lignes consiste en la multiplication à gauche par une matrice inversible.*
(ii) *Chaque opération élémentaire sur les colonnes consiste en la multiplication à droite par une matrice inversible.*

Remarque 12 *Plus précisement, on a le* Tableau 1 *et le résultat intéressant suivant*

2.2 Méthode de Gauss [CIA] p.73 → 82

Méthode 13 *La* <u>*méthode de Gauss*</u> *est une méthode générale de résolution d'un système linéaire $Au = b$ (A une matrice inversible). Elle comporte trois étapes :*
(i) <u>*Elimination :*</u> *Déterminer une matrice inversible M telle que MA soit triangulaire supérieure.*
(ii) *Calcul simultanée de Mb*
(iii) *Résolution du système linéaire*

$$MAu = Mb$$

par la méthode dite de <u>*remontée*</u>*.*

Théorème 14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe au moins une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que MA soit triangulaire supérieure.*

2.3 Factorisation LU [CIA] p.82 → 86

Théorème 15 *Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que les n sous-matrices diagonales*

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

soient inversibles.
Alors il existe une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{i,j})$ avec $l_{i,i} = 1,\ 1 \leq k \leq n$, et une matrice triangulaire supérieure U telles que

$$A = LU$$

De plus, une telle factorisation est unique.

Théorème 16 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

une matrice tridiagonale. On définit la suite

$$\begin{cases} \delta_0 = 1,\ \delta_1 = b_1 \\ \delta_k = b_k\delta_{k-1} - a_k c_{k-1}\delta_{k-2}, \quad 2 \leq k \leq n \end{cases}$$

Alors

$$\delta_k = \det(A_k), \quad \textit{où}$$

$$A_k = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{k-1} & b_{k-1} & c_{k-1} \\ & & & a_k & b_k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n$$

et, si $\delta_k \neq 0,\ 1 \leq k \leq n$, la factorisation LU de la matrice A est $A = LU$ avec

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2\frac{\delta_0}{\delta_1} & 1 & & & \\ & a_3\frac{\delta_1}{\delta_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & a_n\frac{\delta_{n-2}}{\delta_{n-1}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \frac{\delta_1}{\delta_0} & c_1 & & & \\ & \frac{\delta_2}{\delta_1} & c_2 & & \\ & & \frac{\delta_3}{\delta_2} & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}} \end{pmatrix}$$

2.4 Factorisation et méthode de Cholesky [CIA] p.87 → 90

Théorème 17 *Soit A une matrice symétrique définie positive. Alors il existe au moins une matrice triangulaire inférieure B telle que*

$$A = B^tB$$

De plus, on peut imposer que éléments diagonaux B soient tous strictement positifs et la factorisation $A = B^tB$ correspondante est alors unique.

2.5 Factorisation QR [FILB] p.34 → 37

Définition 18 *Soit $u \in \mathbb{R}^n$. On appelle <u>matrice de Householder</u> la matrice*

$$H_u = I_n - 2\frac{u^tu}{||u||^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

où $||u||^2 = {}^tuu$ lorsque u est non nul, et $H_n = I_n$ lorsque $u = 0$.

Proposition 19 *Soit $u \in \mathbb{R}^n$.*
(i) H_u est symétrique (i.e.) $H_u = {}^tH_u$
(ii) H_u est inversible et $H_u^{-1} = H_u$
(iii) $H_uv = -v$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ colinéaire à u et $H_uv = v$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à u.
(iv) $\det(H_u) = -1$ lorsque $u \neq 0$ et $\det(H_u) = 1$ lorsque $u = 0$.
En définitive, H_u est la matrice de la réflexion d'hyperplan $\mathrm{Vect}(u)^\perp$

Proposition 20 *Pour tout $v \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ tel que $||v|| = 1$, il existe $u \in \mathbb{R}^m$ tel que*

$$H_uv = e_1 = (1, 0, ..., 0)^\perp$$

Théorème 21 *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R telles que $A = QR$.*

3 Méthodes indirectes

3.1 Méthodes itératives

Définition 22 *Si $(M, N) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est tel que l'on a la décomposition dite <u>décomposition régulière</u> $A = M - N$, on dit que <u>la méthode itérative associée à (M, N) converge</u> si pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^n$, la suite de premier terme u_0 et définie par $\forall k \in \mathbb{N}$,*

$$u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$$

converge. **[DUM] p.167**

Remarque 23 *On utilise parfois la notation suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} & \ddots & & & \\ \ddots & & \ddots & -F & \\ & \ddots & D & \ddots & \\ & -E & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & \end{pmatrix} = D - E - F$$

Exemple 24 *Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et de relaxation :*
Voir Tableau 1 **[CIA] p.102**

Théorème 25 ♠ *<u>Convergence des méthodes itératives</u>* ♠ *La méthode itérative associée à (M, N) converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.***[DUM] p.167-168**

Théorème 26 *Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive, décomposée sous la forme*

$$A = M - N, \quad M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

Si la matrice $({}^t\overline{M} + N)$ est définie positive, alors

$$\rho(M^{-1}N) < 1$$

[CIA] p.102-103

Théorème 27 *Soit A une matrice hermitienne symétrique définie positive. La méthode de relaxation converge si $0 < \omega < 2$.*
Le rayon spectral de la méthode de relaxation vérifie

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) \geq |\omega - 1|, \quad \omega \neq 0$$

Par conséquent, la méthode de relaxation ne peut converger que si $0 < \omega < 2$. **[CIA] p.103-105**

3.2 Méthode de gradient [DIM] p.208 $\rightarrow$ 212

Théorème 28 *Soient A une matrice symétrique définie positive, $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$. Alors les problèmes*

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Ax = b$$

et

$$\text{Trouver } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} f(y)$$
$$\text{avec } f(y) = \langle Ay, y \rangle - \langle b, y \rangle + c, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

sont équivalents.

Définition 29 *Pour une matrice A symétrique définie positive, l'algorithme itératif*

$$\begin{cases} x^0 \in \mathbb{R}^n, \ r^0 = b - Ax^0 \\ x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \\ r^{k+1} = r^k + \alpha_k A r^k \\ \alpha_k = \frac{||r_k||^2}{\langle Ar^k, r^k \rangle} \end{cases}$$

est appelé <u>méthode du gradient à pas optimal</u>.

Théorème 30 ♠ *La méthode de gradient à pas optimal est convergente pour tout matrice symétrique définie positive.*

Lemme 31 ♠ *<u>Inégalité de Kantorovitch</u>* ♠
Soient A une matrice symétrique définie positive, de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$. Alors, pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a l'inégalité

$$\langle Ax, x \rangle \langle A^{-1}x, x \rangle \leq \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n} ||x||^4$$

Illustrations

Opération élémentaire	Multiplication par	
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{i,j}$	Multiplication à gauche
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n + (1-\lambda) E_{i,i}$	
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{j,i}$	Multiplication à droite
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p + (1+\lambda) E_{i,i}$	
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	

Tableau 1 : Opérations élémentaires et matrices de transvections et dilatations

Questions

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :

Exercice :

Solution :