Théorème des polynômes annulateurs et décomposition de Dunford

Mohamed NASSIRI

Recasage :

●●●●● 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
●●●●○ 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
●●●●○ 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.
●●●○○ 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Résumé :

La décomposition de Dunford s'inscrit dans le contexte de la réduction d'endomorphisme, et prouve que tout endomorphisme u est la somme d'un endomorphisme diagonalisable d et d'un endomorphisme nilpotent n, les deux endomorphismes d et n commutant et étant uniques.

Ce n'est pas une « réduction » dans le sens où elle n'est pas maximale : il est parfois possible de pousser la décomposition en sous-espaces vectoriels stables plus petits.

Elle prend comme hypothèses que l'espace vectoriel est de dimension finie et que le polynôme minimal est scindé, c'est-à-dire qu'il s'exprime comme produit de polynômes du premier degré. Cette seconde hypothèse est toujours vérifiée si le corps est algébriquement clos, comme celui des nombres complexes.

Prérequis :

Lemme des noyaux - Co-diagonalisation - Endomorphismes nilpotents

---

Théorème des polynômes annulateurs : Soit $f \in L(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ tel que $F(f) = 0$. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1}...M_s^{\alpha_s}$ la décomposition de Dunford en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = KerM_i^{\alpha_i}(f)$. On a alors $E = N_1 \bigoplus ...N_s$ et pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j\neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Démonstration. • Montrons que les p_i sont des projecteurs :

Le fait que $E = N_1 \bigoplus ...N_s$ provient tout simplement du lemme des noyaux.
Pour tout i, on pose $Q_i = \prod_{j\neq i} M_j^{\alpha_j}$.On remarque que tous les Q_i sont premiers dans leur ensemble. D'après l'égalité de Bezout, il existe $U_1...U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U_1Q_1 + ... + U_sQ_s = 1$.
Par suite, $U_1(f) \circ Q_1(f) + ... + U_s(f) \circ Q_s(f) = Id_E$
On pose $P_i = U_iQ_i$ et $p_i = P_i(f)$. On a donc :

$$Id_E = \sum_{i=1}^{s} p_i \tag{1}$$

Par ailleurs, pour tout i, F divise Q_iQ_j donc

$$\forall j \neq i, p_i \circ p_j = Q_iQ_j(f) \circ U_iU_j(f) = 0 \tag{2}$$

D'après (1), pour tout i, $p_i = \sum_{i=1}^{s} p_i \circ p_j$ et donc d'après (2), $p_i = p_i^2$. On a donc bien montré que les p_i sont des projecteurs.

- Montrons que $\text{Im}p_i = N_i$:

On va procéder par double inclusion.
Soit $y = p_i(x) \in \text{Im}p_i$. On a donc :

$$M_i^{\alpha_i}(f)(y) = M_i^{\alpha_i}(f) \circ P_i(f)(x) = U_i(f) \circ F(f)(x) = 0$$

Ainsi $\text{Im}p_i \subset \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(f) = N_i$
Soit maintenant $x \in N_i = \text{Ker}M_i^{\alpha_i}(f)$. D'après (1), $x = \sum_{i=1}^{s} p_i(x)$, et pour tout $j \neq i$, $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j, donc finalement $x = p_i(x) \in \text{Im}p_i$.
On a donc montré que $\text{Im}p_i = N_i$.

- Montrons que $\text{Ker}p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$:

Pour tout $j \neq i$, soit $x \in N_j$, alors $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ car $M_i^{\alpha_i}$ divise Q_j. Donc $\bigoplus_{j \neq i} N_j \subset \text{Ker}p_i$.
Soit enfin $x \in \text{Ker}p_i$. D'après (1), $x = \sum_{j \neq i} p_j(x)$, et donc $x \in \bigoplus_{j \neq i} N_j$.
Finalement, $\text{Ker}p_i = \bigoplus_{j \neq i} N_j$. □

Décomposition de Dunford : Soit $f \in L(E)$ tel que son polynôme caractéristique χ_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors, il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes tel que :
(i) d est diagonalisable, n est nilpotente.
(ii) $f = n + d$ et $d \circ n = n \circ d$.
De plus, d et n sont des polynômes en f.

Démonstration.
Existence.
Le théorème précédent va faire une bonne partie du travail.
Comme χ_f est scindé, il est de la forme $\chi_f = \prod_{i=1}^{s}(X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ et pour tout i, on pose $N_i = \text{Ker}(f - \lambda_i)^{\alpha_i}$.
Avec les notations du théorème précédent, on a $F = \chi_f$ et pour tout i, $M_i = (X - \lambda_i)$, puis $p_i = P_i(f)$ est le projecteur sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$.

Posons (encore...) $d = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i p_i(x)$ (et donc d est diagonalisable car les projecteurs sont co-diagonalisables) et (enfin !) $n = f - d = \sum_{i=1}^{s}(f - \lambda_i \text{Id})p_i(x)$.
Montrons que n est nilpotente.
Comme les p_i sont des projecteurs ($p_i = p_i^2$), commutent avec f (car ce sont des polynômes en f) et que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$, on a donc :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, n^q = \sum_{i=1}^{s}(f - \lambda_i Id)^q p_i(x).$$

En prenant $q = \text{sup}_i \alpha_i$, on a $(f - \lambda_i Id)^q p_i = [(X - \lambda_i)^q P_i](f) = 0$ pour tout i car χ_f divise $(X - \lambda_i)^q P_i$ et donc $n^q = 0$.

Par construction, d et n sont des polynômes en f.

Unicité
Par l'absurde, supposons qu'il existe un autre couple (d', n') vérifiant (i) et (ii). d' et n' commutent avec f (car $f = d' + n'$) et donc avec d et n qui sont des polynômes en f. Par suite, d et d' sont co-diagonalisables, ce qui entraîne $d - d'$ diagonalisable.
Comme $d - d' = n - n'$ et que $n - n'$ est nilpotente, on a donc $d - d' = n - n' = 0$ (car un endomorphisme qui est diagonalisable et nilpotent, est nul). $\square$

Remarques :

- Attention aux décompositions triviales de Dunford !
  Exemple : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$. Sa décomposition de Dunford **n'est pas**:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Remarquer que D et N ne commutent pas ... C'est le piège classique ! La matrice A est triangulaire, donc on lit ses valeurs propres sur la diagonale. Comme elles sont distinctes, elle est diagonalisable et donc la décomposition de Dunford de A est $A = A + 0$.

- Mises en garde sur le développement :
  Attention aux différents indices j et i ...
  Attention aux multiplications qui deviennent des compositions
  Attention également aux multitudes objets que l'on pose tout au long du développement ...