Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Mohamed NASSIRI

Référence :

Analyse numérique et équations différentielles, Jean-Pierre Demailly, p.121 → 123 et p.131.

Recasage :

●●●●● 201 : Espaces de fonctions. Exemples et applications.
●●●●● 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
●●●●● 220 : Equations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'étude des solutions en dimension 1 et 2.
●●●●○ 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Résumé :

A grands coups de théorème de Fubini, de changements de variable et de théorème des résidus, on démontre cette relation importante vérifiée par la fonction Γ d'Euler.

Prérequis :

Équations différentielles - Théorème du point fixe - Espaces complets

---

Théorème : Si $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne en y, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$, le problème de Cauchy avec condition initiale (t_0, y_0) admet une unique solution exacte $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathcal{U}$.

Démonstration. On rappelle que comme $\mathcal{U}$ est supposé ouvert, il existe un cylindre

$$C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \overline{B}(y_0, r_0) \subset \mathcal{U}$$

Ainsi, pour que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(y_0, r_0)$ soit un cylindre de sécurité, il suffit de prendre

$$T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right) \qquad \text{avec } M = \sup_{(t,y) \in C_0} ||f(t, y)||$$

Etape 1 : Réécriture du problème sous forme intégrale :

Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si y est continue et $\forall t \in I$, $(t, y(t)) \in \mathcal{U}$, et $\forall t \in I$, $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(u, y(u))\mathrm{d}u$

$\Rightarrow$: Soit $y : I \to \mathbb{R}^n$ une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) (*i.e.*)

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0 \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Comme y est de classe C^1, on a donc

$$y(t) - \underbrace{y(t_0)}_{=y_0} = \int_{t_0}^{t} y'(u)\mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u$$

$\Leftarrow$: Puisque y est continue sur I, alors l'application $u \mapsto f(u, y(u))$ est également continue. Par ailleurs, la relation $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u$ implique nécessairement $y'(t) = f(t, y(t))$, $\forall t \in I$ et $y(t_0) = y_0$.

Etape 2 : Remarquer un problème de point fixe :

Notons $\mathcal{F} = C([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ l'ensemble des applications continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$ muni de la norme $||.||_\infty$:

$$||y||_\infty = \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} ||y(t)||$$

où $||.||$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$.
Comme $[t_0 - T, t_0 + T]$ est compact et que $(\overline{B}(y_0, r_0), ||.||)$ est complet (fermé dans l'espace complet $(\mathbb{R}^n, ||.||)$), par conséquent l'espace $(C([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0)), ||.||_\infty)$ est complet.

On pose la fonction

$$\begin{aligned}\Phi \ &: \ \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ y \mapsto \Phi(y) \ &: \ \begin{cases} [t_0 - T, t_0 + T] & \to \overline{B}(y_0, r_0)) \\ t & \mapsto \Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u \end{cases}\end{aligned}$$

Par conséquent, $y : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du problème de Cauchy de données initiales (t_0, y_0) si et seulement si y est un point fixe de Φ.

Etape 3 : Montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que Φ^p soit contractante :

Soient $y, z \in \mathcal{F}$ et $y_{(p)} = \Phi^p(y)$ $z_{(p)} = \Phi^p(z)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}||y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)|| &= ||\Phi(y)(t) - \Phi(z)(t)|| \\ &= \left|\left|\int_{t_0}^{t} [f(u, y(u)) - f(u, z(u))]\mathrm{d}u\right|\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} k||y(u) - z(u)||\mathrm{d}u\right| \\ &\leq k|t - t_0|||z - u||_\infty\end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned}||y_{(2)}(t) - z_{(2)}(t)|| &= ||\Phi^2(y)(t) - \Phi^2(z)(t)|| \\ &= ||\Phi(\Phi(y))(t) - \Phi(\Phi(z))(t)|| \\ &= ||\Phi(y_{(1)})(t) - \Phi(z_{(1)})(t)|| \\ &= \left|\left|\int_{t_0}^{t} [f(u, y_{(1)}(u)) - f(u, z_{(1)}(u))]\mathrm{d}u\right|\right| \\ &\leq \left|\int_{t_0}^{t} k \underbrace{||y_{(1)}(u) - z_{(1)}(u)||}_{\leq k|u - t_0|||z - u||_\infty} \mathrm{d}u\right| \\ &\leq k^2 \frac{|t - t_0|^2}{2} ||z - u||_\infty\end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que

$$||y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)|| \leq k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} ||z-u||_\infty \qquad (\dagger)$$

Pour l'initialisation, c'est vérifié par les calculs précédents. On suppose donc l'hypothèse vérifiée au rang n et on tente de la montrer au rang $n+1$.

$$\begin{aligned}
||y_{(p+1)}(t) - z_{(p+1)}(t)|| &= ||\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(z)(t)|| \\
&= ||\Phi(\Phi_{(p)}(y))(t) - \Phi(\Phi_{(p)}(z))(t)|| \\
&= ||\Phi(y_{(p)})(t) - \Phi(z_{(p)})(t)|| \\
&= \left|\left| \int_{t_0}^{t} [f(u, y_{(p)}(u)) - f(u, z_{(p)}(u))] \mathrm{d}u \right|\right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} k \underbrace{||y_{(p)}(u) - z_{(p)}(u)||}_{\leq k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} ||z-u||_\infty \ (\dagger)} \mathrm{d}u \right| \\
&\leq k^{p+1} \frac{|t-t_0|^{p+1}}{(p+1)!} ||z-u||_\infty
\end{aligned}$$

Par suite, par passage au supremum sur $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, on a

$$\begin{aligned}
||\Phi^p(y) - \Phi^p(z)||_\infty &= ||y_{(p)} - z_{(p)}||_\infty \\
&= \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} ||y_{(p)}(t) - z_{(p)}(t)|| \\
&\leq \sup_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} \left(k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} ||z-u||_\infty \right) \\
&\leq k^p \frac{T^p}{p!} ||z-u||_\infty
\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que Φ^p est lipschitzienne de rapport $k^p \frac{T^p}{p!}$ sur $\mathcal{F}$. Comme $\lim\limits_{p \to +\infty} k^p \frac{T^p}{p!} = 0$, il existe p assez grand tel que $k^p \frac{T^p}{p!} < 1$, et pour cette valeur de p, l'application Φ^p est contractante de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$. Par ailleurs, $\mathcal{F}$ est un espace complet. Ainsi, le théorème du point fixe appliqué à l'application Φ^p montre alors que Φ a un unique point fixe y.

<u>*Conclusion :*</u> Nous avons bien démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. $\square$

> *Cauchy est dingue, mais actuellement c'est le seul qui sache comment on doit faire des mathématiques.*
>
> Niels Henrik Abel - 1826

<u>Remarques :</u>

- **Cylindre de sécurité :** Cette notion peut paraître "encombrante" mais elle est très utile pour contrôler le comportement des solutions. Plus précisement, elle permet de contrôler la distance d'une solution au vecteur y_0 lorsque t varie autour de t_0. Pour le théorème de Cauchy-Lipschitz, cette notion est indispensable. En effet, on verra plus loin pourquoi, grâce au cylindre de sécurité, on a bien

$\Phi\ :\ \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ (*i.e.*) pourquoi l'application Φ arrive bien dans $\mathcal{F}$.

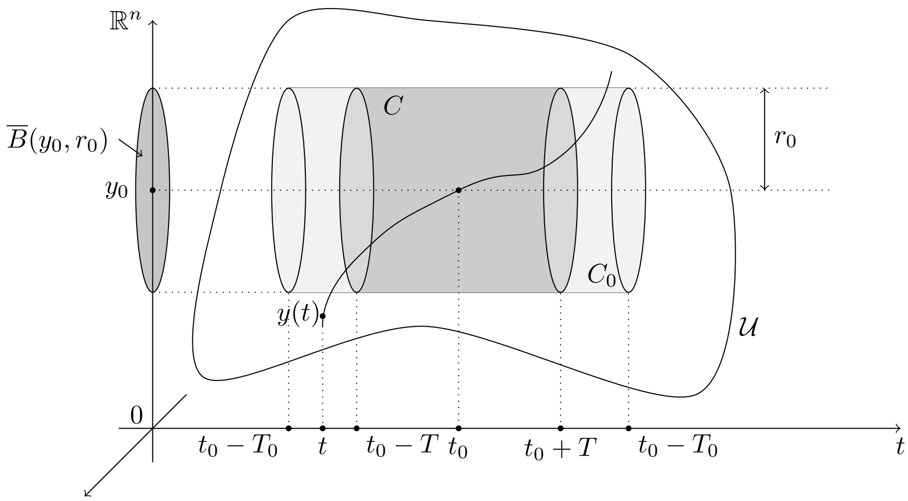


Figure 1 : C est un cylindre de sécurité mais pas C_0.

- Dans la réciproque de la réécriture du problème sous forme intégrale, nous avons affirmé : "Puisque y est continue sur I, alors l'application $u \mapsto f(u, y(u))$ est également continue. Par ailleurs, la relation $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u$ implique nécessairement $y'(t) = f(t, y(t))$, $\forall t \in I$ et $y(t_0) = y_0$." Cette affirmation nécessite une petite explication ...

Théorème : Soit $I = [a, b]$, $h \in L^1(I)$ et $c \in I$. On pose

$$H(x) = \int_c^x h(t)\mathrm{d}t$$

Si h est continue sur I, alors H est dérivable sur I et on a $H' = h$.

Démonstration :
Soit $x_0 \in [a, b]$, pour $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, on a

$$H(x) - H(x_0) = \int_{x_0}^x h(t)\mathrm{d}t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} - h(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (h(t) - h(x_0))\mathrm{d}t$$

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de h, on a :

$$\exists \delta > 0, \text{ tel que } |t - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |h(t) - h(x_0)| \leq \epsilon$$

Par conséquent, si $|x - x_0| \leq \delta$, alors $|t - x_0| \leq \delta$ pour tout t dans l'intervalle d'intégration, et par suite

$$\left| \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} - h(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^x \underbrace{|h(t) - h(x_0)|}_{\leq \epsilon} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{|x - x_0|} \epsilon |x - x_0| \leq \epsilon$$

Par conséquent,

$$H'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{H(x) - H(x_0)}{x - x_0} = h(x_0)$$

$\square$

- Un peu plus loin, on a posé la fonction

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ & \mathcal{F} \to \mathcal{F} \\ & y \mapsto \Phi(y) \ : \ \begin{cases} [t_0 - T, t_0 + T] & \to \overline{B}(y_0, r_0)) \\ t & \mapsto \Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u \end{cases} \end{aligned}$$

Mais rien ne prouve trivialement que $\Phi(y) \in \mathcal{F}$ ...

Démonstration :

(i) A-t-on bien que pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, $\Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u \in \overline{B}(y_0, r_0))$?
Pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$,

$$\begin{aligned} ||\Phi(y)(t) - y_0|| &= \left|\left| y_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u - y_0 \right|\right| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{||f(u, y(u))||}_{\leq M} \mathrm{d}u \\ &\leq M|t - t_0| \leq MT \leq M\frac{r_0}{M} \leq r_0 \end{aligned}$$

En effet, on avait supposé $T \leq \min\left(T_0, \frac{r_0}{M}\right)$ pour avoir un cylindre de sécurité.

(ii) Montrons que $\Phi(y)$ est continue.
Soit $t_1 \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ (on peut supposer sans perte de généralités que $t_1 < t$), on a :

$$\begin{aligned} ||\Phi(y)(t) - \Phi(y)(t_1)|| &= \left|\left| \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u - \int_{t_0}^{t_1} f(u, y(u))\mathrm{d}u \right|\right| \\ &= \left|\left| \int_{t_1}^{t} f(u, y(u))\mathrm{d}u \right|\right| \\ &\leq \int_{t_1}^{t} \underbrace{||f(u, y(u))||}_{\leq M} \mathrm{d}u \\ &\leq M|t_1 - t| \underset{t \to t_1}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

D'où la continuité de $\Phi(y)$.

□

- Nous avons également affirmé que $(\overline{B}(y_0, r_0), ||.||)$ est complet en tant fermé dans l'espace complet $(\mathbb{R}^n, ||.||))$, puis que $(C([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0)), ||.||_\infty)$ est complet. Revenons donc là dessus

Proposition : Un sous-espace fermé d'un espace métrique complet est complet.

Démonstration : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F, sous-espace fermé de l'espace métrique complet E. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite $x \in E$ (puisque E est complet). Or comme F est fermé, la suite converge dans F, ainsi $l \in F$. Et donc F est complet.

□

Concernant la complétude de $(C([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0)), ||.||_\infty)$, on peut se restreindre au théorème suivant. En effet, l'ensemble $C([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ est inclus dans $\mathcal{B}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0))$ l'ensemble des applications bornées de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$ et l'ensemble des applications bornées et continues $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(y_0, r_0)$ est un fermé dans $(\mathcal{B}([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(y_0, r_0)), ||.||_\infty)$. Enfin, prendre $\mathbb{R}$ comme espace d'arrivée ne change pas fondamentalement la démonstration ...

Théorème : Soient X un ensemble et $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v. des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}), \quad ||f||_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Alors $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est complet.

Démonstration : Il s'agit d'une démonstration très classique de la complétude.
Etape 1 : Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$. Soit $x \in X$. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq ||f_p - f_q||$$

Cette inégalité implique que la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Donc la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et on note $f(x)$ sa limite.

Etape 2 : On construit ainsi une application $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$ pour tout $\in X$. Il nous faut donc montrer que f est bornée.
Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle est par conséquent bornée. Par suite, il existe $M \geq 0$, telle que $||f_n|| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in X$, on a donc

$$|f_n(x)| \leq M \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} |f(x)| \leq M$$

Ce qui implique que f est bornée (*i.e.*) $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

Etape 3 : Il ne nous reste plus qu'à montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers f dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.
Soit $\epsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, il existe $N \geq 0$, tel que pour tout $p > q \geq N$, on a

$$||f_p - f_q|| \leq \epsilon$$

Pour $x \in X$, on a donc

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq ||f_p - f_q|| \leq \epsilon$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient donc

$$|f_p(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in X$, on en déduit donc que

$$||f_p - f|| \leq \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $p \geq N$, on a bien que la suite $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ tend vers f dans $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.

Conclusion : Toute suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ converge, donc $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ est complet.

$\square$

Théorème : Soit (E, d) un espace métrique complet et une application $f : E \to E$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f^p soit contractante. Alors f admet un unique point fixe.

Démonstration : Comme E est complet et que f^p est contractante, alors f^p a un unique point fixe $x \in E$ par le théorème du point fixe. Par suite,

$$f^p(x) = x \quad \Rightarrow \quad f(f^p(x)) = f(x) = f^p(f(x))$$

Ce qui implique que $f(x)$ est un point fixe de f^p, mais comme x est l'unique point fixe de f^p, on a donc $f(x) = x$. Donc x est un point fixe de f.
De plus, x est le seul point fixe de f car si y est un autre point fixe de f, on a

$$f(y) = y \quad \Rightarrow \quad f^p(y) = f^{p-1}(\underbrace{f(y)}_{=y}) = ... = y$$

Par conséquent, $y = x$ car x est l'unique point fixe de f^p.

$\square$

Quelques conséquences du théorème de Cauchy-Lipschitz local :

- **Corollaire 1 :** Soit y une solution de $y' = f(t, y)$ sur $[a, b[$ $(b < \infty)$ avec $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{t \to b} y(t) = l \\ (b, l) \in \mathcal{U} \end{cases}$$

Alors y se prolonge sur un intervalle plus grand.

Démonstration :
On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz en $(b, l) \in \mathcal{U}$. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ et une solution z définie sur l'intervalle $]b - \alpha, b + \alpha[$ du problème

$$\begin{cases} z' = f(t, z) \\ z(b) = l \end{cases}$$

De plus, comme

$$y'(t) = f(t, y(t)) \underset{t \to b}{\longrightarrow} f(b, l)$$

donc y est de classe C^1 sur $[a, b]$. On peut donc considérer le prolongement

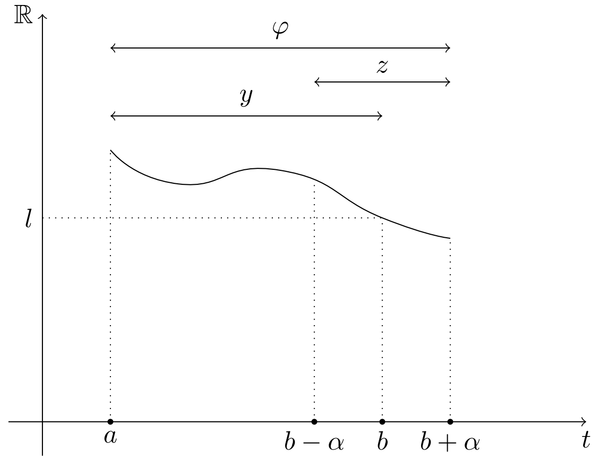
$$\overline{y}(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t \in [a, b[\\ t & \text{si } t = b \end{cases}$$

En posant

$$\varphi(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t \in [a, b[\\ z(t) & \text{si } t \in [b, b + \alpha[\end{cases}$$

Par ailleurs, on a $\lim\limits_{t \to b^-} \varphi'(t) = \lim\limits_{t \to b^+} \varphi'(t)$, donc φ est de classe C^1 sur $[a, b + \alpha[$. Par le théorème de

Cauchy-Lipschitz (unicité), $y = \varphi$ et donc y se prolonge sur $[a, b+\alpha[$.



On va s'intéresser ici à des équations différentielles autonomes (*i.e.*) $y' = f(y)$.

- **Corollaire 2 :** Une solution maximale est injective ou périodique

  Démonstration :
  Soit y une solution non injective définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Il existe donc $t_0 < t_1 \in I$ tel que $y(t_0) = y(t_1)$. Donc

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

  On pose $\Theta(t) = y(t + t_1 - t_0)$ définie sur $I + t_0 - t_1$. On a ainsi

$$\begin{cases} \Theta'(t) = y'(t + t_1 - t_0) = f(y(t + t_1 - t_0)) = f(\Theta(t)) \\ \Theta(t_0) = y(t_1) \end{cases}$$

  Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité), on en déduit donc que $\Theta = y$ et que $I + t_0 - t_1 = I$. Ce qui implique que $y(t) = \Theta(t + t_1 - t_0)$ et que $I = \mathbb{R}$ (*i.e.*) y est périodique.

  $\square$

- **Corollaire 3 :** Si y est une solution sur $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$) telle que $\underset{t \to +\infty}{y(t)} = l = (l_1, ..., l_n)$, alors $F(l) = 0$.

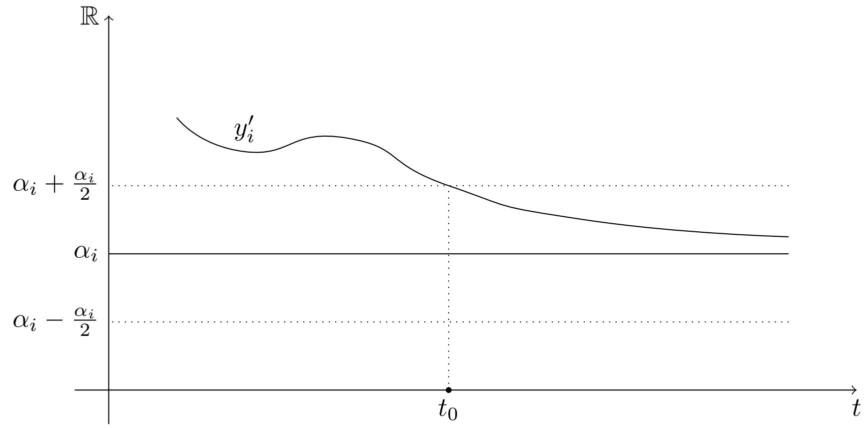
  Démonstration :
  Autrement dit, si $y(t)$ ne converge pas vers un point d'équilibre, $y(t)$ diverge.
  Supposons par l'absurde que $F(l) \neq 0$. Par l'absurde, on a

$$y'(t) = f(y(t)) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} f(l) = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0$$

  En notant $y(t) = (y_1(t), ..., y_n(t))$ et alors il existe $i \in \{1, ..., n\}$ tel que

$$y_i'(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \alpha_i \neq 0$$

Supposons, sans perte de généralités, que $\alpha_i > 0$. Comme $\lim\limits_{t \to 0} y_i'(t) = \alpha_i$, il existe $t_0 \in [a, +\infty[$ tel que pour tout $t > t_0$, on a $|y_i'(t) - \alpha_i| \leq \alpha_i/2$, et donc $|y_i'(t)| \geq \alpha_i/2$.



Par suite, en intégrant l'inégalité $|y_i'(t)| \geq \alpha_i/2$ entre t_0 et t, on a

$$|\underbrace{y_i(t) - y_i(t_0)}_{<\infty \ car \ y_i(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} l_i}| = \int_{t_0}^{t} |y_i'(t)| \mathrm{d}t \geq \int_{t_0}^{t} \frac{\alpha_i}{2} \mathrm{d}t = \underbrace{\frac{\alpha_i}{2}(t - t_0)}_{\underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty}$$

Absurde !

$\square$

- **Corollaire 4 :** Soit y une solution maximale d'orbite bornée. Alors y est définie sur $\mathbb{R}$.

  Démonstration :
  Soit y une solution maximale d'orbite bornée. On suppose par l'absurde que y est définie sur $]a, b[$ avec $b < +\infty$. Par conséquent, pour tout $t, s \in]a, b[$

$$y'(t) = f(y(t)) \quad \Rightarrow \quad y(t) - y(s) = \int_{s}^{t} f(y(u)) \mathrm{d}u$$

  Par suite, on a

$$||y(t) - y(s)|| = |t - s| \sup_{x \in \mathrm{Im} f} |f(x)|$$

  Par suite, y vérifie le critère de Cauchy en $t = b$ et donc $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$ existe et appartient à $\mathcal{U}$. Par le corollaire 1, on en déduit que y se prolonge en $t = b$, ce qui contredit la maximalité.

$\square$

<u>Théorème des bouts et un corollaire :</u>

Théorème (des bouts) : Soient $I =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\mathcal{U}$ un ouverte de $\mathbb{R}^n$, et $f : I \times \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue et localement lipschitzienne en la seconde variable. Soit $y :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de $y' = f(t, y)$.
Alors si $\beta < b$ (*resp.* si $a < \alpha$), pour tout compact $K \subset \mathcal{U}$, il existe un voisinage V de β (*resp.* de α) dans $]\alpha, \beta[$ tel que $y(t) \notin K$ pour tout $t \in V$.

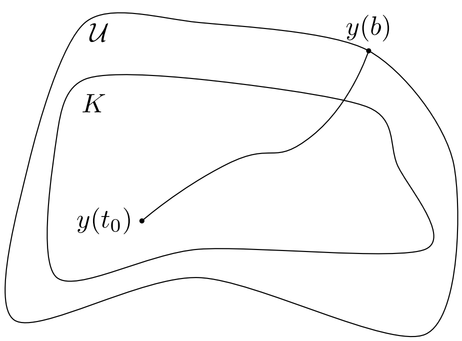
Démonstration :
On va montrer le résultat au voisinage V de β (pour α, le raisonnement est le même).
Par l'absurde, on suppose qu'il existe un compact K de $\mathbb{U}$ et une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $]\alpha,\beta[$ convergeant vers β telle que $y(\beta_n)\in K$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Comme K est compact, on peut extraire de $(y(\beta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente $(y(\beta_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. Soit x_0 la limite de $(y(\beta_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. On a $x_0\in K\subset\mathcal{U}$.
On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz en $(\beta,x_0)\in]a,b[\times\mathcal{U}$. Ainsi, il existe $\delta>0$ et une solution $z:]\beta-\delta,\beta+\delta[\to\mathcal{V}$, où $\mathcal{V}$ est un voisinage de x_0, du problème

$$\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(\beta) = x_0 \end{cases}$$

Prenons $k\in\mathbb{N}$ tel que $\beta_{n_k}\in]\beta-\delta,\beta+\delta[$ et $y(\beta_{n_k})\in\mathcal{V}$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz (unicité), on en déduit donc que $z=y$ sur $]\beta-\delta,\beta[$. Ainsi, la fonction

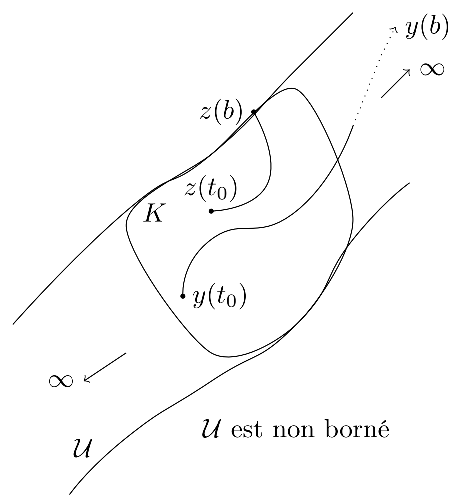
$\square$

Ainsi le théorème des bouts explique que l'on peut avoir les deux situations suivantes suivant l'ouvert $\mathcal{U}$:
- Si $\mathcal{U}$ est borné, $y(t)$ tend vers le bord de $\mathcal{U}$
- Si $\mathcal{U}$ est non borné, $y(t)$ tend vers le bord de $\mathcal{U}$ ou $y(t)$ part à l'infini en temps fini (*i.e.*) $||y(t)||\xrightarrow[t\to b]{}+\infty$.



$\mathcal{U}$ est borné

$\boxed{\text{OU}}$



$\mathcal{U}$ est non borné

Le théorème des bouts porte également le nom de *théorème de sortie de tout compact*, *principe de majoration a priori*, ou encore *théorème d'explosion en temps fini.*