Théorème de Riesz-Fischer

Mohamed NASSIRI

Références :

Analyse fonctionnelle : théorie et applications - Haïm Brezis - p.57

Recasage :

• • • • • 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
• • • • • 234 : Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$.
• • • • ◦ 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
• • • ◦ ◦ 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications
• • • ◦ ◦ 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.
• • • ◦ ◦ 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.
• • • ◦ ◦ 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Résumé :

Il s'agit là d'un des théorèmes clés des espaces L^p. Pour faire de la bonne analyse fonctionnelle, on a besoin d'espaces complets.

Prérequis :

Suites numériques - Suites et séries de fonctions - Théorie de l'intégration - Espaces L^p

---

Théorème :

L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Démonstration.
On va procéder de manière naturelle pour montrer que L^p est complet mais on doit distinguer deux cas dans cette démonstration : $p = +\infty$ et $1 \leq p < +\infty$. Dans les espaces L^p, le cas $p = +\infty$ est toujours enquiquinant ... (bah oui, Môsieur L^∞ a même une norme rien que pour lui ...).
• Cas $p = +\infty$:
Il était une fois $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^∞. Soit $k \geq 1$, $\exists N_k \in \mathbb{N}$ tel que

$$||f_m - f_n||_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \text{ pour } m, n \geq N_k$$

(Noter la petite astuce qui consiste à remplacer ϵ par $1/k$. On fait cela pour mieux maîtriser l'inégalité.)
Donc il existe un ensemble négligeable E_k tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \ \ \forall x \in \Omega \backslash E_k,\ \forall m, n \geq N_k \qquad (\dagger)$$

En posant $E = \bigcup_k E_k$ (E est donc un ensemble négligeable, comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables), on a donc que $\forall x \in \Omega \backslash E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui lui est complet, donc cette suite converge vers un élément que l'on va noter $f(x)$.
Ce n'est pas fini ! Il ne faut pas oublié que nous sommes passé de L^∞ à $\mathbb{R}$. Il faut donc "revenir en arrière". Il reste à montrer que $f \in L^\infty$ et que $||f - f_n||_{L^\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Allons-y !
Dans (†), en passant à la limite ($m \to +\infty$, en supposant bien évidemment que $n \leq m$), on a donc

$$\begin{aligned}
(\star)\ |f(x) - f_n(x)| &\leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega\backslash E_k,\ \forall n \geq N_k \\
\Leftrightarrow |f(x)| - |f_n(x)| &\leq \frac{1}{k} \quad \forall x \in \Omega\backslash E_k,\ \forall n \geq N_k \\
\Leftrightarrow |f(x)| &\leq \frac{1}{k} + |f_n(x)| \quad \forall x \in \Omega\backslash E_k,\ \forall n \geq N_k
\end{aligned}$$

En passant au sup sur $x \in E$, on en déduit que $f \in L^\infty$. Maitenant, en prenant le sup sur $x \in E$ dans $(\star)$, on a

$$||f - f_n||_{L^\infty} \leq \frac{1}{k} \quad \forall n \geq N_k$$

Par conséquent, $f \in L^\infty$ et que $||f - f_n||_{L^\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• Cas $1 \leq p < +\infty$:
Il était encore une fois $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p. On va montrer que cette suite admet une valeur d'adhérence (*i.e.*) qu'une sous-suite converge dans L^p.
On va prendre une sous-suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$||f_{n_{k+1}} - f_{n_k}||_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

(C'est possible de faire ce genre de choses ! Être une suite de Cauchy, ça dit en gros qu'à partir d'un certain, les termes sont aussi proches qu'on le désire ... Ici, notre désir c'est $1/2^k$). Montrons que $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p.
Pour simplifier, on écrit "k" au lieu de "n_k", et ainsi, on a

$$||f_{k+1} - f_k||_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 1$$

On considère

$$g_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p\right)^{1/p}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
||g_n||^p_{L^p} = \int_\Omega |g_n(x)|^p = \int_\Omega \left| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p\right)^{\cancel{1/p}} \right|^{\cancel{p}} \\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_\Omega |f_{k+1}(x) - f_k(x)|^p \\
&= \sum_{k=1}^{n} ||f_{k+1} - f_k||^p_{L^p} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k}\right)^p \Rightarrow ||g_n||_{L^p} \leq 1
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence monotone, $g_n(x)$ converge presque partout dans Ω vers une limite que l'on va noter $g(x)$, avec $g \in L^p$.
D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$:

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= |f_m(x) - f_{m-1}(x) + f_{m-1}(x) - ... - f_{n+1}(x) + f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + |f_{m-1}(x) - ... - f_{n+1}(x)| + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \\ &\leq g_{m-1}(x) - g_{n-1}(x) \\ &\leq g(x) - g_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Ainsi, quand $n \to +\infty$ (donc m aussi car $m \geq n$), $g(x) - g_{n-1}(x) \to 0$, ce qui entraîne $|f_m(x) - f_n(x)| \to 0$.
Donc $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy (dans $\mathbb{R}$!) et converge presque partout dans Ω vers une limite que l'on va noter $f(x)$.
En remarquant que $g(x) - g_{n-1}(x) \leq g(x)$ et en faisant tendre m vers $+\infty$ (cette fois-ci n ne tend pas vers $+\infty$!) :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| - |f_n(x)| \leq g(x) \Rightarrow |f(x)| \leq \underbrace{g(x)}_{\in L^p} + \underbrace{|f_n(x)|}_{\in L^p}$$

Donc $f \in L^p$, et en faisant $m \to 0$ dans l'inégalité $|f_m(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$, on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad (\text{puisque } g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x))$$

Par conséquent, $|f(x) - f_n(x)|^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \leq g(x)^p$ (et la fonction g^p est intégrable). Ainsi, par le théorème de convergence dominée,

$$||f_n - f||_{L^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

Remarques :

- Pour montrer qu'un espace E est complet, retenez la marche à suivre :
  - on prend une suite (x_n) de Cauchy de E.
  - on construit une potentielle limite de la suite (x_n), que l'on note souvent x. On utilise souvent, comme dans notre démonstration, la complétude d'un autre espace ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
  - on montre que $x \in E$. - on montre que (x_n) converge vers x dans E.

- "Passage au sup" Attention à l'inf

- Attention dans l'ouvrage de Brézis, pour l'expression de $g_n(x)$, il y a deux oublis : il manque la puissance p et la puissance $1/p$.

- On peut démontrer le théorème de Riesz-Fischer grâce à une caractérisation importante des espaces complets :
  Théorème : Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1) $(E, ||.||)$ est complet.
  2) Toute série absolument convergente est convergente.

  Démonstration :
  1) ⇒ 2) :
  On suppose que $(E, ||.||)$ est complet. Soit $X_n := \sum_{k\geq 0} x_k$ telle que $\sum_{k\geq 0} ||x_k||$ converge.
  On pose $X'_n = \sum_{k\geq 0}^{n} ||x_k||$, $\forall n \geq 0$.

  $$\text{Pour } q > p, \ ||X_q - X_p|| = ||\sum_{k=p+1}^{q} x_k|| \leq \sum_{k=p+1}^{q} ||x_k|| \leq X'_q - X'_p$$

Soit $\epsilon > 0$, comme $\sum_{k\geq 0}^{n} ||x_k||$ converge, $(X'_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \text{ tel que pour } q > p \geq N, \text{ on a } |X'_q - X'_p| \leq \epsilon$$

On a alors $||X_q - X_p|| \leq \epsilon$. Donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans $(E, ||.||)$, qui est complet, donc elle converge.

2 ⇒ 1) :

$\square$