Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Mohamed NASSIRI

Référence :

Mathématiques pour l'agrégation : Analyse et probabilités, Jean-François Dantzer , p.520 → 522

Recasage :

● ● ● ● ● 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.
● ● ● ● ○

Résumé :

Blablabla

Prérequis :

Equations différentielles linéaires - Wronskien - Séries entières - Intégrales à paramètres - Théorème de dérivation sous le signe intégral

---

Théorème : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et $B : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications continues et enfin $(t_0, u_0) \in I\mathbb{R}^n$.
Le problème de Cauchy

$$(C) \quad \begin{cases} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution unique définie sur I.

Démonstration.
Etape 1 : Réécriture du problème sous forme intégrale :

Remarquons qu'une solution Y est solution du problème de Cauchy si et seulement si elle est solution dans $C(I, \mathbb{R}^n)$ de l'équation :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(x)Y(x) + B(x))\mathrm{d}x \quad (CI)$$

$\Leftarrow$: Considérons Y un élément de $C(I, \mathbb{R}^n)$ solution de (CI). L'application définie par

$$f : I \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto A(t)Y(t) + B(t)$$

étant continue sur I, l'application

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \int_{t_0}^{t} (A(x)Y(x) + B(x))\mathrm{d}x \end{aligned}$$

est dérivable sur I de dérivée f. On en déduit que Y, solution de (CI), est dérivable sur I dé dérivée $f = AY + B$.
L'égalité $Y(t_0) = u_0$ nous permet de déduite que Y est solution de (C).

$\underline{\Rightarrow :}$ Supposons que Y soit solution du problème de Cauchy (C). Alors Y est de classe C^1 ssur I. On obtient donc

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y'(x)\mathrm{d}x = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(x)Y(x) + B(x))\mathrm{d}x$$

Ainsi, Y est solution de (CI).

Etape 2 : Remarquer un problème de point fixe :

On a donc que Y soit solution du problème de Cauchy (C) si et seulement si Y est un point fixe de l'application $\Theta_I : C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n)$ définie par

$$\begin{aligned} \Phi \ : \ & C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n) \\ & F \mapsto \Theta_I(F) \ : \ \begin{cases} I & \to \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto \Theta_I(F)(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(x)F(x) + B(x))\mathrm{d}x \end{cases} \end{aligned}$$

Etape 3 : Montrons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que Θ^p soit contractante :
On suppose (d'abord) que I est un segment $[a, b]$:

Préparons le terrain :
On choisit une norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$.
On munit $C(I, \mathbb{R}^n)$ de la norme uniforme $||.||_\infty$ (qui en fait un espace vectoriel normé complet).
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme notée $||.||_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et on pose

$$M = \sup_{t \in [a,b]} ||A(t)||_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Soient $F_1, F_2 \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [a, b], \quad \left|\left|\Theta^k_{[a,b]}(F_1)(t) - \Theta^k_{[a,b]}(F_2)(t)\right|\right| \leq \frac{(M|t - t_0|)^k}{k!} ||F_1 - F_2||_\infty$$

Pour $k = 0$, le résultat est clair.
On suppose donc l'hypothèse vérifiée au rang k et on tente de la montrer au rang $k + 1$.

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad \left|\left|\Theta^{k+1}_{[a,b]}(F_1)(t) - \Theta^{k+1}_{[a,b]}(F_2)(t)\right|\right| &= \left|\left|\Theta_{[a,b]}\left(\Theta^k_{[a,b]}(F_1)(t)\right) - \Theta_{[a,b]}\left(\Theta^k_{[a,b]}(F_2)(t)\right)\right|\right| \\ &= \left|\left|\int_{t_0}^{t} A(x)\left(\Theta^k_{[a,b]}(F_1)(x) - \Theta^k_{[a,b]}(F_2)(x)\right)\mathrm{d}x\right|\right| \\ &\leq M \left|\int_{t_0}^{t} \frac{(M|t - t_0|)^k}{k!} ||F_1 - F_2||_\infty \mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{(M|t - t_0|)^{k+1}}{(k + 1)!} ||F_1 - F_2||_\infty \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Comme $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{(M|t-t_0|)^k}{k!} = 0$, il existe k assez grand tel que $\frac{(M|t-t_0|)^k}{k!} < 1$, et pour cette valeur de k, l'application $\Theta_{[a,b]}^k$ est contractante de $C(I,\mathbb{R}^n)$ dans $C(I,\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, $C(I,\mathbb{R}^n)$ est un espace complet. Ainsi, le théorème du point fixe appliqué à l'application $\Theta_{[a,b]}^k$ montre alors que $\Theta_{[a,b]}$ a un unique point fixe Y.

On suppose désormais que I est un intervalle quelconque :

Soit $F \in C(I,\mathbb{R}^n)$. Pour tout segment $[a,b] \subset I$ avec $t_0 \in [a,b]$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [a,b],\quad \Theta_I^k(F)(t) = \Theta_{[a,b]}^k(F)(t)$$

La suite $\left(\Theta_{[a,b]}^n(F)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers l'unique point fixe de $\Theta_{[a,b]}$. On en déduit que $(\Theta_I^n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers un point fixe de Θ_I que l'on notera G.

Etape 4 : Unicité du point fixe :

Supposons que G_1 et G_2 soient deux points fixes de Θ_I. Alors pour tout segment $[a,b] \subset I$ avec $t_0 \in [a,b]$, les restrictions ${G_1}_{|[a,b]}$ et ${G_2}_{|[a,b]}$ sont égales à l'unique point fixe de $\Theta_{[a,b]}$. On en déduit donc que $G_1 = G_2$.

Conclusion : Nous avons bien démontré l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy. □

Remarques :

- **Remarque 1 :**

- **Remarque 2 :**

  Théorème :

  Démonstration :

□