Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et les isométries du tétraèdre

Mohamed NASSIRI

Références:

L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré - p.228 $\rightarrow$ 230.

Recasage :

●●●●● 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.
●●●●● 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un C-espace vectoriel. Exemples.
●●●●● 161 : Distances et isométries d'un espace affine euclidien.
●●●●○ 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
●●●●○ 104 : Groupes finis. Exemples et applications.
●●●●○ 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
●●●○○ 183 : Utilisation des groupes en géométrie.

Résumé:

Il s'agit d'un résultat important qui montre l'omniprésence de l'interaction entre "groupes" et "géométrie".

Prérequis:

Groupe symétrique - Représentations linéaires de groupes et caractères - Isométries et espace affine

---

Théorème : Soient Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4. Alors

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

Démonstration.
Etape 0 - Les deux premières lignes du tableau ... :

Les deux premières lignes, c'est cadeau ! Elles nous sont données par :

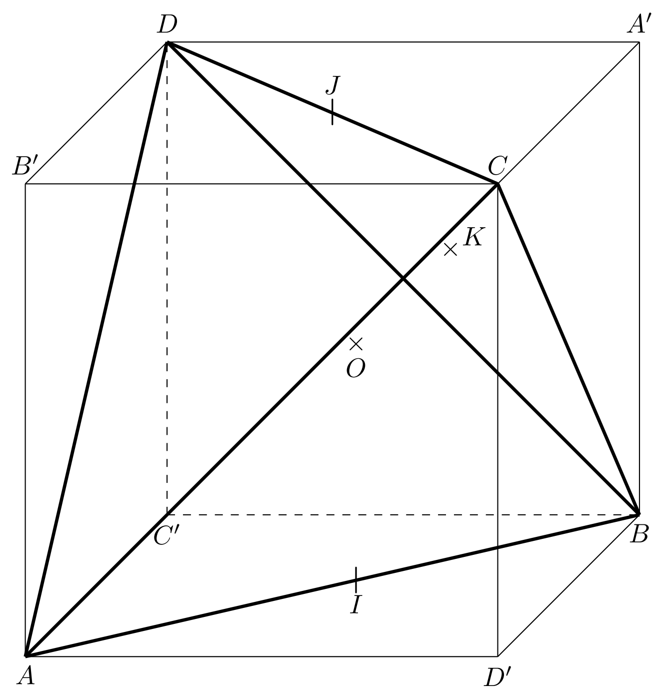
- la représentation triviale $\mathbb{1} : \mathfrak{S}_4 \to \mathbb{C}^*, \ \sigma \mapsto 1$ et,
- la signature $\epsilon : \mathfrak{S}_4 \to \mathbb{C}^*, \ \sigma \mapsto \epsilon(\sigma)$.
Notons donc $\chi_1 = \mathbb{1}$ et $\chi_2 = \epsilon$.

Etape 1 - Classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$:

On utilise le fait que les classes de conjugaisons de $\mathfrak{S}_n$ sont données par les partitions de l'entier n. On a donc :

- $(1\ 1\ 1\ 1) \to \{Id\} = C_1$ et donc $\#C_1 = 1$
- $(1\ 1\ 2) \to \{(1\ 2)\} = C_2$ et donc $\#C_2 = 6$
- $(2\ 2) \to \{(1\ 2)(3\ 4)\} = C_3$ et donc $\#C_3 = 3$
- $(1\ 3) \to \{(1\ 2\ 3)\} = C_8$ et donc $\#C_4 = 8$
- $(4) \to \{(1\ 2\ 3\ 4)\} = C_5$ et donc $\#C_5 = 6$

Etape 2 - Isométries du tétraèdre :



$Is(\Delta_4)$ induit une permutation des sommets $T = \{A, B, C, D\}$ de Δ_4. On a donc un morphisme de groupes

$$\varphi \ : \ Is(\Delta_4) \to \mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}} \simeq \mathfrak{S}_4$$
$$f \mapsto \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ f(A) & f(B) & f(C) & f(D) \end{pmatrix}$$

- φ est injective car $\varphi(f) = Id$ implique f fixe un repère affine. Donc $f = Id$.
- Pour montrer que φ est surjective, on va montrer que toutes les transpositions de S_4 ont un antécédent par φ, et comme les transpositions engendrent S_4 (et même S_n pour tout n), on aura la surjectivité.
Sans perte de généralités, considérons la tranposition (12) de S_4 (qui correspont à (AB) de $\mathfrak{S}_{\{A,B,C,D\}}$). Il faut donc trouver une isométrie de Δ_4 qui échange A et B mais laisse fixe C et D. En notant I le milieu de $[AB]$, il suffit de considérer la symétrie orthogonale rapport au plan (CDI).
On procède de la même façon pour (23) et (13). On a donc l'isomorphisme :

$$Is(\Delta_4) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_4$$

Cela fournit une représentation ρ de dimension 3,

$$\rho \ : \ \mathfrak{S}_4 \to O_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

Etape 3 - Réprésentations matricielles des isométries du tétraèdre et calcul du caractère :

Les caractères étant des fonctions centrales, il nous suffit donc de travailler sur un élément (représentant) sur chaque classe de conjugaisons de $\mathfrak{S}_4$.
Notons χ_3 le caractère de la représentation ρ.

- Pour $\{Id\}$, la transformation associé de $Is(\Delta_4)$ est bien évidemment Id qui a pour matrice

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_3(Id) = 3$$

- Pour $\{(1\ 2)\}$, la transformation associé de $Is(\Delta_4)$ est celle que nous avons trouvé dans la démonstration de la surjectivité, à savoir la symétrie orthogonale par rapport au plan (CDI) qui, dans une base bien choisie, a pour matrice

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_3((12)) = 1$$

- Pour $\{(1\ 2)(3\ 4)\}$, il faut trouver une transformation de $Is(\Delta_4)$ qui échange A, B, et C, D. En notant J, le milieu de $[CD]$, il nous suffit de considérer la rotation d'angle π et d'axe (IJ), qui, dans une base bien choisie, a pour matrice

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\pi & -\sin\pi \\ 0 & \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_3((12)(34)) = -1$$

- Pour $\{(1\ 2\ 3)\}$, on va changer de représentant pour mieux voir ce qu'il se passe. Prenons $(2\ 3\ 4)$, qui appartient bien à la classe de conjugaison de $(1\ 2\ 3)$. Il faut trouver une transformation de $Is(\Delta_4)$ qui envoie B sur C, C sur D, et D sur B, mais laisse fixe A. En notant K, le centre de gravité du triangle BCD, il nous suffit de considérer la rotation d'angle $2\pi/3$ et d'axe (AK), qui, dans une base bien choisie, a pour matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_3((123)) = 0$$

- Pour $\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$, On cherche une transformation $f \in Is(\Delta_4)$ qui envoie A sur B, B sur C, C sur D, et D sur A. En notant O, le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$, on a la relation

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0} \qquad (\dagger)$$

Ainsi, dans la base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$, en considérant la partie vectorielle $\overrightarrow{f}$ de $f \in Is(\Delta_4)$, on a donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OA}) &= \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OB}) &= \overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OC}) &= \overrightarrow{OD} \overset{(\dagger)}{=} -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

Matriciellement, on a donc

$$Q = Mat(f)_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \chi_3((1234)) = -1$$

Par ailleurs, le caractère χ_3 est irréductible car

$$\begin{aligned}\langle \chi_3, \chi_3 \rangle &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|}\Big(\#C_1.\chi_3(Id)^2 + \#C_2.\chi_3((12))^2 + \#C_3.\chi_3((12)(34))^2 + \#C_4.\chi_3((123))^2 + \#C_5.\chi_3((1234))^2\Big)\\ &= \frac{1}{24}(1.3^2 + 6.1^2 + 3.(-1)^2 + 8.0^2 + 6.(-1)^2) = 1\end{aligned}$$

Dans notre table de caractères, nous sommes donc à :

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
χ_4	?	?	?	?	?
χ_5	?	?	?	?	?

Etape 4 - Les deux dernières lignes du tableau ... :

• On remarque que $\chi_4 := \epsilon\chi_3$ est également un caractère irréductible. En effet, on a :

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1

avec

$$\begin{aligned}\langle \chi_4, \chi_4 \rangle &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|}\Big(\#C_1.\chi_4(Id)^2 + \#C_2.\chi_4((12))^2 + \#C_3.\chi_4((12)(34))^2 + \#C_4.\chi_4((123))^2 + \#C_5.\chi_4((1234))^2\Big)\\ &= \frac{1}{24}(1.3^2 + 6.(-1)^2 + 3.(-1)^2 + 8.0^2 + 6.1^2) = 1\end{aligned}$$

• Pour notre dernière ligne, on utilise le théorème de Burnside et l'"orthogonalité des colonnes".
D'après le théorème de Burnside, on a

$$\begin{aligned}24 = |\mathfrak{S}_4| &= \chi_1(Id)^2 + \chi_2(Id)^2 + \chi_3(Id)^2 + \chi_4(Id)^2 + \chi_5(Id)^2\\ &= 1^2 + 1^2 + 3^2 + 3^2 + \chi_5(Id)^2\\ &\Rightarrow \chi_5(Id) = 2\end{aligned}$$

On arrive donc à

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	α	β	γ	δ

Puis, par l'orthogonalité des colonnes, on a

$$\begin{aligned}0 = \sum_{i=1}^{5}\chi_i(C_1)\chi_i(C_2) = \sum_{i=1}^{5}\chi_i(Id)\chi_i((12)) &= \chi_1(Id).\chi_1((12)) + \chi_2(Id).\chi_2((12)) + \chi_3(Id).\chi_3((12))\\ &+ \chi_4(Id).\chi_4((12)) + \chi_5(Id).\chi_5((12))\\ &= 1.1 + 1.(-1) + 3.1 + 3.(-1) + 2.\alpha\\ &\Rightarrow \alpha = 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(C_1)\chi_i(C_3) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(Id)\chi_i((12)(34)) \\
&= \chi_1(Id).\chi_1((12)(34)) + \chi_2(Id).\chi_2((12)(34)) + \chi_3(Id).\chi_3((12)(34)) \\
&+ \chi_4(Id).\chi_4((12)(34)) + \chi_5(Id).\chi_5((12)(34)) \\
&= 1.1 + 1.1 + 3.(-1) + 3.(-1) + 2.\beta \\
&\Rightarrow \beta = 2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(C_1)\chi_i(C_4) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(Id)\chi_i((123)) &= \chi_1(Id).\chi_1((123)) + \chi_2(Id).\chi_2((123)) + \chi_3(Id).\chi_3((123)) \\
&+ \chi_4(Id).\chi_4((123)) + \chi_5(Id).\chi_5((123)) \\
&= 1.1 + 1.1 + 3.0 + 3.0 + 2.\gamma \\
&\Rightarrow \gamma = -1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(C_1)\chi_i(C_5) = \sum_{i=1}^{5} \chi_i(Id)\chi_i((1234)) \\
&= \chi_1(Id).\chi_1((1234)) + \chi_2(Id).\chi_2((1234)) + \chi_3(Id).\chi_3((1234)) \\
&+ \chi_4(Id).\chi_4((1234)) + \chi_5(Id).\chi_5((1234)) \\
&= 1.1 + 1.(-1) + 3.(-1) + 3.1 + 2.\delta \\
&\Rightarrow \delta = 0
\end{aligned}
$$

Le caractère χ_5 est irréductible car

$$
\begin{aligned}
\langle \chi_5, \chi_5 \rangle &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|}\Big(\#C_1.\chi_5(Id)^2 + \#C_2.\chi_5((12))^2 + \#C_3.\chi_5((12)(34))^2 + \#C_4.\chi_5((123))^2 + \#C_5.\chi_5((1234))^2\Big) \\
&= \frac{1}{24}(1.2^2 + 6.0^2 + 3.2^2 + 8.(-1)^2 + 6.0^2) = 1
\end{aligned}
$$

Finalement, la table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est

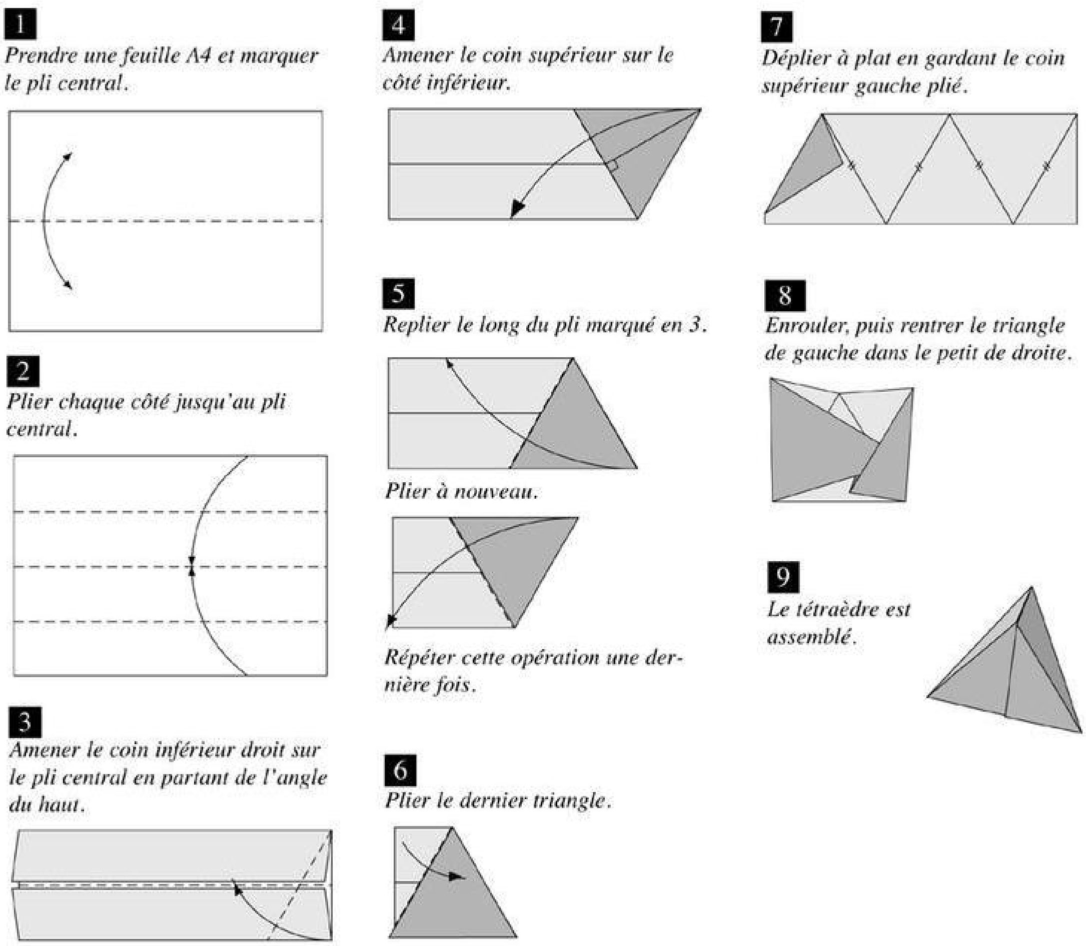
	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

$\square$

Remarques :

- Construction d'un tétraèdre par pliage :

  Cette remarque peut paraître amusante mais elle a surtout pour but de rappeler que pour visualiser un objet en 3D, quoi de plus efficace que de le réaliser en 3D ...



Pliages & Mathématiques, Didier Boursin & Valérie Larose

- Sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$:

Grâce à la table des caractères d'un groupe G, il est possible de retrouver tous ses sous-groupes distingués. Pour cela, on définit le "noyau d'une représentation /
Soit G un groupe fini, et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représention, de caractère χ, sur un espace V de dimension d. Alors

$$K_\chi := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(e)\}$$

est un sous-groupe distingué de G. On le nomme "noyau de la représentation".
Ensuite, on a le théorème suivant :

Théorème :
Soient G un groupe fini et $\chi_1, ..., \chi_r$ les caractères irréductibles de G respectivement associés aux représentations $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(E_i)$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$.
Les sous-groupes distingués de G sont exactement du type

$$\bigcap_{i \in I} \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \text{ où } I \subset \{1, ..., r\}$$

En plus de trouver très facilement les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_4$ à partir de sa table de caractères, on va même trouver des relations d'inclusion entre ces sous-groupes...:

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	$\boxed{1}$	-1	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	$\boxed{2}$	0	$\boxed{2}$	-1	0

On trouve donc que le sous-groupe $V_4 = \{Id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ est distingué dans $\mathfrak{S}_4$ car on a

$$V_4 = K_{\chi_5} = \mathrm{Ker}\rho_5$$

mais également que le célèbre sous-groupe $\mathfrak{A}_4$ est distingué dans $\mathfrak{S}_4$ car on a

$$\mathfrak{A}_4 = K_{\chi_2} = \mathrm{Ker}\rho_2$$

De plus, on remarque que $\mathrm{Ker}\rho_5 \subset \mathrm{Ker}\rho_2$.

- Les classes de conjugaison $\mathfrak{S}_n$:

On va traiter le cas de $\mathfrak{S}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que les classes de conjugaisons sont données par les partitions de l'entier n. Cela provient du "principe de conjugaison" :

Proposition :
1) Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un cycle d'ordre p, $\sigma = (a_1, ..., a_p)$ et si $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1), ..., \tau(a_p))$$

2) Les cycles d'ordre p sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration :
1) Si $x \notin (\tau(a_1), ..., \tau(a_p))$, alors $\tau^{-1}(x) \notin (a_1, ..., a_p)$, et ainsi $\tau^{-1}(x)$ sera fixe par σ. Par suite, on a

$$\tau\sigma\tau^{-1} = \tau\tau^{-1} = x$$

Si $x = \tau(a_i)$ pour un $i \in \{1, ...p\}$, alors

$$\tau\sigma\tau^{-1}(x) = \tau\sigma\tau^{-1}\tau(a_i) = \tau\sigma(a_i) = \tau(a_{i+1})$$

(où l'on prend les indices modulo p).

2) Soient $\sigma = (a_1, ..., a_p)$, $\tau = (b_1, ..., b_p)$ deux cycles d'ordre p et $g \in \mathfrak{S}_n$ tel que $g(a_i) = b_i$ pour tout$i \in \{1, ...p\}$. Alors, par ce qui précède, on remarque que $\tau = g\sigma g^{-1}$.

□

Comme tout permutation de $\mathfrak{S}_n$ se décompose en cycles à support disjoints, on en déduit le résultat.
Pour le voir, on peut considérer le petit exemple suivant :
Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $p, q, r \in \mathbb{N}$ tel que $n = p + q + r$ avec $p \leq q \leq r$.
On considère une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ décomposée en cycles à support disjoints de la forme

$$\sigma = (a_1, ..., a_p)(b_1, ..., b_q)(c_1, ..., c_r)$$

On dit que σ est de type (p, q, r).
Au passage, on a décidé de nommer les éléments $a_1, ..., a_p, b_1, ..., b_q, c_1, ..., c_r$ plutôt qu'avec la même lettre et de lourds indices ...
Ainsi, si on prend $\tau \in \mathfrak{S}_n$, on a donc

$$\begin{aligned}\tau\sigma\tau^{-1} &= \tau(a_1, ..., a_p)(b_1, ..., b_q)(c_1, ..., c_r)\tau^{-1} \\ &= \tau(a_1, ..., a_p)\tau^{-1}\tau(b_1, ..., b_q)\tau^{-1}\tau(c_1, ..., c_r)\tau^{-1} \\ &= (\tau(a_1), ..., \tau(a_p))(\tau(b_1), ..., \tau(b_q))(\tau(c_1), ..., \tau(c_r))\end{aligned}$$

Ainsi, $\tau\sigma\tau^{-1}$ est encore un cycle de type (p, q, r). Comme p, q, r sont quelconques, et que le raisonnement est le même pour tout partition de n, on a donc bien montré qu'il y a autant de classes de conjugaisons que de partitions de n.

- Les classes de conjugaison $\mathfrak{A}_n$:

Pour les classes de conjugaisons de $\mathfrak{A}_n$, il y a un peu plus de travail mais la démarche est intéressante car elle utilise les actions de groupes et plus précisément l'étude des orbites et des stabilisateurs. On rappelle quelques définitions et on pose quelques notations.

Soit G un groupe. On considère l'action par conjugaison :

$$\begin{aligned} G \times G &\to G \\ (g, x) &\mapsto g.x = gxg^{-1}\end{aligned}$$

On note :
- $\omega(x)$, l'orbite de $x \in G$ (la classe de conjugaison de x) (*i.e.*)

$$\omega(x) = \{gxg^{-1} \ ; \ g \in G\}$$

- Stab(x), le stabilisateur de $x \in G$ (*i.e.*)

$$\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G \mid g.x = x\} = \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\} = \{g \in G \mid gx = xg\}$$

Lorsque G est fini, on a la formule suivante

$$\mathrm{Card}(\omega(x)) = \frac{|G|}{|\mathrm{Stab}_G(x)|}$$

Pour notre problème, on considère $x \in \mathfrak{A}_n$, et on s'intéresse à la classe de conjugaison de x dans $\mathfrak{A}_n$ que l'on note $\omega(x)^{\mathfrak{A}_n}$ et à la classe de conjugaison de x dans $\mathfrak{S}_n$ que l'on note $\omega(x)^{\mathfrak{S}_n}$. On a donc

$$\mathrm{Card}(\omega(x)^{\mathfrak{A}_n}) = \frac{|\mathfrak{A}_n|}{|\mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(x)|} \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}(\omega(x)^{\mathfrak{S}_n}) = \frac{|\mathfrak{S}_n|}{|\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x)|}$$

On étudie les deux suivants :

- Si $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x) = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(x)$:
Alors, puisque $\mathfrak{A}_n = \frac{\mathfrak{S}_n}{2}$, on a donc

$$\mathrm{Card}(\omega(x)^{\mathfrak{A}_n}) = \frac{\mathrm{Card}(\omega(x)^{\mathfrak{S}_n})}{2}$$

On peut alors se demander ce qu'il se passe quand $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x) = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(x)$. On a

$$g \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(x) \Leftrightarrow g \in \mathfrak{A}_n \text{ et } gx = xg$$
$$g \in \mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x) \Leftrightarrow g \in \mathfrak{S}_n \text{ et } gx = xg$$

Donc, si $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x) = \mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(x)$, il n'existe pas de permutation impaire qui commute avec x.

- Si $\mathrm{Stab}_{\mathfrak{S}_n}(x) \neq \mathrm{Stab}_{\mathfrak{A}_n}(x)$:
  ◦ Cas 1 :

Il existe une permutation impaire qui commute avec x. Soit donc $h \in \mathfrak{S}_n \backslash \mathfrak{A}_n$ telle que $hx = xh$ (*i.e.*) $hxh^{-1} = x$.
Soit $z \in \omega(x)^{\mathfrak{S}_n}$. Un élément de $\omega(x)^{\mathfrak{S}_n}$ s'écrit $z = gxg^{-1}$ pour un certain $g \in \mathfrak{S}_n$.
Si $g \in \mathfrak{A}_n$, alors $z \in \omega(x)^{\mathfrak{A}_n}$.
Si $g \notin \mathfrak{A}_n$, alors

$$z = gxg^{-1} = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x((gh)^{-1})$$

Comme g et h sont des permutations impaires, alors gh est une permutation paire (on peut le voir facilement avec la signature : $\epsilon(gh) = \epsilon(g)\epsilon(h) = -1 \times -1 = 1$).
Par conséquent, $z \in \omega(x)^{\mathfrak{A}_n}$.

On a donc montré que $\omega(x)^{\mathfrak{S}_n} \subset \omega(x)^{\mathfrak{A}_n}$. Or, comme $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{S}_n$ (qui par définition, donne immédiatemment l'inclusion $\omega(x)^{\mathfrak{A}_n} \subset \omega(x)^{\mathfrak{S}_n}$), on en déduit donc que $\omega(x)^{\mathfrak{S}_n} = \omega(x)^{\mathfrak{A}_n}$

  ◦ Cas 2 :

Il n'existe pas de permutation impaire qui commute avec x. Ainsi, si t est une transposition, on a

$$tx \neq xt \Leftrightarrow tx\underbrace{t^{-1}}_{=t} \neq x \Leftrightarrow txt \neq x$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\omega(x)^{\mathfrak{S}_n} &= \{gxg^{-1}\ ;\ g \in \mathfrak{S}_n\} = \{gxg^{-1}\ ;\ g \text{ paire}\} \cup \{gxg^{-1}\ ;\ g \text{ impaire}\} \\ &= \omega(x)^{\mathfrak{A}_n} \cup \{gxg^{-1}\ ;\ g \text{ impaire}\}\end{aligned}$$

Or, pour une permutation g impaire, on peut écrire $g = ht$ pour une certaine permutation h paire. Ainsi,

$$\begin{aligned}\omega(x)^{\mathfrak{S}_n} &= \omega(x)^{\mathfrak{A}_n} \cup \{gxg^{-1}\ ;\ g \text{ impaire}\} \\ &= \omega(x)^{\mathfrak{A}_n} \cup \{htxth^{-1}\ ;\ h \text{ paire}\} \\ &= \omega(x)^{\mathfrak{A}_n} \cup \omega(txt)^{\mathfrak{A}_n}\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{Card}(\omega(x)^{\mathfrak{A}_n}) = \mathrm{Card}(\omega(txt)^{\mathfrak{A}_n}) = \frac{\mathrm{Card}(\omega(x)^{\mathfrak{S}_n})}{2}$$

- Valeurs de la table des caractères de $\mathfrak{S}_n$:

La première observation que l'on peut faire est la suivante : les valeurs de la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ sont entières. Et en se rappelant que la table des caractères de $\mathfrak{S}_3$ est :

	$\{Id\}$ 1	$\{(1\ 2)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 2
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

On peut donc se demander si la table des caractères de $\mathfrak{S}_n$, pour tout $n \geq 2$, ne contient que des valeurs entières. La réponse est oui ! Mais c'est un résultat assez difficile à démontrer.

Cependant le résultat n'est plus vrai pour les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ comme le montre le point suivant.

- Table des caractères de $\mathfrak{A}_4$:

Quoi de plus naturel que de se demander à quoi pourrait ressembler la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$. Nous verrons dans quelques instants qu'elle n'est pas si "facile" que ça à trouver. Elle est donnée par :

	$\{Id\}$ 1	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 4	$\{(1\ 3\ 2)\}$ 4
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	3	-1	0	0

où les 4 classes de conjugaisons de $\mathfrak{A}_4$ sont :

- $\{Id\} = C_1$ et donc $\#C_1 = 1$
- $\{(1\ 2)(3\ 4)\} = C_2$ et donc $\#C_2 = 3$
- $\{(1\ 2\ 3)\} = C_3$ et donc $\#C_3 = 4$
- $\{(1\ 3\ 2)\} = C_4$ et donc $\#C_4 = 4$

Bien évidemment, la première ligne, c'est cadeau ! Il nous reste donc à trouver encore 3 caractères irréductibles. Allons-y !

Considérons $V_4 := \{Id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$. Le fait que $V_4 \triangleleft \mathfrak{A}_4$ va nous permettre de déterminer des représentations irreductibles de $\mathfrak{A}_4/V_4$, et par suite des représentations irreductibles de $\mathfrak{A}_4$.
Comme $\mathfrak{A}_4/V_4 \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et que $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est abélien. Il nous suffit donc de déterminer le dual de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Toute représentation irréductible de $\mathfrak{A}_4/V_4$ étant de degré 1, on récupère une représentation irréductible de degré 1 sur $\mathfrak{A}_4$ comme suit :

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{A}_4 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathfrak{A}_4/V_4 \arrow[d, "\overline{\rho}"] \\ & \mathbb{C}^* \end{tikzcd}$$

En notant $j = e^{2i\pi/3}$, les morphismes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{U}_3 \subset \mathbb{C}^*$ sont exactement les morphismes χ_k où $k \in [\![1, 3]\!]$, entièrement déterminés par l'image du générateur 1 et définis par :

$$\chi'_k \ : \ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$$
$$\overline{1} \mapsto j^k$$

En utilisant un isomorphisme ϕ entre $\mathfrak{A}_4/V_4$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et en remarquant que $\overline{Id} = \overline{(1\ 2)(3\ 4)}$ dans $\mathfrak{A}_4/V_4$, il nous suffit même de connaître les morphismes de $\mathfrak{A}_4 \to \mathfrak{A}_4/V_4 \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ et les images de Id,(1 2 3) et (1 3 2). Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\chi_2 \ : \ \mathfrak{A}_4 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_4/V_4 \quad & \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad \xrightarrow{\chi'_1} \mathbb{C}^* \\
Id \to \overline{Id} \quad & \to \overline{0} \qquad\quad \to 1 \\
(1\ 2\ 3) \to \overline{(1\ 2\ 3)} \quad & \to \overline{1} \qquad\quad \to j \\
(1\ 3\ 2) \to \overline{(1\ 3\ 2)} \quad & \to \overline{2} \qquad\quad \to j^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_3 \ : \ \mathfrak{A}_4 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_4/V_4 \quad & \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad \xrightarrow{\chi'_2} \mathbb{C}^* \\
Id \to \overline{Id} \quad & \to \overline{0} \qquad\quad \to 1 \\
(1\ 2\ 3) \to \overline{(1\ 2\ 3)} \quad & \to \overline{1} \qquad\quad \to j^2 \\
(1\ 3\ 2) \to \overline{(1\ 3\ 2)} \quad & \to \overline{2} \qquad\quad \to j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\chi_1 \ : \ \mathfrak{A}_4 \xrightarrow{\pi} \mathfrak{A}_4/V_4 \quad & \xrightarrow{\phi} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \quad \xrightarrow{\chi'_3} \mathbb{C}^* \\
Id \to \overline{Id} \quad & \to \overline{0} \qquad\quad \to 1 \\
(1\ 2\ 3) \to \overline{(1\ 2\ 3)} \quad & \to \overline{1} \qquad\quad \to 1 \\
(1\ 3\ 2) \to \overline{(1\ 3\ 2)} \quad & \to \overline{2} \qquad\quad \to 1
\end{aligned}$$

Petite remarque au passage : les indices des caractères χ' ne correspondent pas aux caractères χ. Ce n'est pas grave, c'est seulement une re-numérotation pour correspondre à la numérotation des caratères sur la table.

On vient donc de trouver 3 représentations irréductibles de degré 1 et, à ce stade, la table des caractères est :

	$\{Id\}$ 1	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 4	$\{(1\ 3\ 2)\}$ 4
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	?	?	?	?

Pour notre dernière ligne, comme pour la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$, on utilise le théorème de Burnside et l'"orthogonalité des colonnes".
D'après le théorème de Burnside, on a

$$\begin{aligned}
12 = |\mathfrak{A}_4| &= \chi_1(Id)^2 + \chi_2(Id)^2 + \chi_3(Id)^2 + \chi_4(Id)^2 \\
&= 1^2 + 1^2 + 1^2 + \chi_4(Id)^2 \\
&\Rightarrow \chi_4(Id) = 3
\end{aligned}$$

On arrive donc à

	$\{Id\}$ 1	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 4	$\{(1\ 3\ 2)\}$ 4
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	3	a	b	c

Puis, par l'orthogonalité des colonnes, on a

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{4} \chi_i(Id)\chi_i((12)) \\ &= \chi_1(Id).\chi_1((12)) + \chi_2(Id).\chi_2((12)) + \chi_3(Id).\chi_3((12)) + \chi_4(Id).\chi_4((12)) \\ &= 1.1 + 1.1 + 1.1 + 3.a \\ &\Rightarrow a = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{4} \chi_i(Id)\chi_i((123)) \\ &= \chi_1(Id).\chi_1((123)) + \chi_2(Id).\chi_2((123)) + \chi_3(Id).\chi_3((123)) + \chi_4(Id).\chi_4((123)) \\ &= 1.1 + 1.j + 1.j^2 + 2.b \\ &\Rightarrow b = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{i=1}^{4} \chi_i(Id)\chi_i((132)) \\ &= \chi_1(Id).\chi_1((132)) + \chi_2(Id).\chi_2((132)) + \chi_3(Id).\chi_3((132)) + \chi_4(Id).\chi_4((132)) \\ &= 1.1 + 1.j^2 + 1.j + 3.c \\ &\Rightarrow c = 0\end{aligned}$$

Le caractère χ_4 est irréductible car

$$\begin{aligned}\langle \chi_4, \chi_4 \rangle &= \frac{1}{|\mathfrak{A}_4|}\Big(\#C_1.\chi_4(Id)^2 + \#C_2.\chi_4((12)(34))^2 + \#C_3.\chi_4((123))^2 + \#C_4.\chi_4((132))^2\Big) \\ &= \frac{1}{12}(1.3^2 + 3.(-1)^2 + 4.0^2 + 4.0^2) = 1\end{aligned}$$

Finalement, la table de caractères de $\mathfrak{A}_4$ est donc bien

	$\{Id\}$ 1	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 4	$\{(1\ 3\ 2)\}$ 4
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	3	-1	0	0

- Sous-groupes de Sylow d'un groupe d'isométries

L'un des avantages de voir les groupes $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$ comme des groupes d'isométries est la mise en évidence plus rapide des sous-groupes de Sylow.

- *Les* 3*-Sylow de* $\mathfrak{A}_4$: $\mathfrak{A}_4$ se réalise comme groupe d'isométries directes du tétraèdre. Comme les 3-Sylow de $\mathfrak{A}_4$ sont d'ordre 3 ($|\mathfrak{A}_4| = 4 \times 3$), ce sont donc des rotations d'ordre 3. Or, il n'y a que 4 rotations d'ordre 3 préservant le tétraèdre : les rotations autour d'un axe passant le centre de gravité et le milieu des faces.
Par conséquent, il y a quatre 3-Sylow correspondant aux quatre faces du tétraèdre.

- *Les* 3-*Sylow de* $\mathfrak{S}_4$: $\mathfrak{S}_4$ se réalise comme groupe d'isométries directes de l'octaèdre  (également du cube , mais pour trouver des éléments d'ordre 3 quoi de mieux que les faces de l'octaèdre !). Ainsi, avec le même argument que précédemment, on en déduit qu'il y a quatre 3-Sylow.

- Application à la décomposition d'une représentation de degré 4 de $\mathfrak{S}_4$:

On a le théorème suivant, qui nous dit que pour décomposer une représentation d'un groupe G à isomorphisme près, il suffit de décomposer son caractère dans l'espace hermitien $\mathcal{C}ent(G,\mathbb{C})$ des fonctions centrales. Plus précisement :

Théorème :
Soient G un groupe fini et $\chi_1, ..., \chi_r$ les caractères irréductibles de G respectivement associés aux représentations $\rho_i : G \to \mathrm{GL}(E_i)$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.
Alors si $\rho : G \to \mathrm{GL}(E)$ est une représentation du groupe G, on a :

$$(\rho, E) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \alpha_i(\rho_i, E_i)$$

où $\alpha_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle$ pour tout $i \in [\![1,r]\!]$.

Rappel : L'espace $\mathcal{C}ent(G,\mathbb{C})$ des fonctions centrales est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathcal{F}(G,\mathbb{C})$ muni du produit hermitien :

$$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(G,\mathbb{C}), \quad \langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

On considère la représentation $\rho : \mathfrak{S}_4 \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, donnée par permutation des éléments de la base de $\mathbb{C}^4$ (*i.e.*)

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_4, \ \forall z \in \mathbb{C}^4, \quad \sigma.z = (z_{\sigma^{-1}(1)}, z_{\sigma^{-1}(2)}, z_{\sigma^{-1}(3)}, z_{\sigma^{-1}(4)})$$

Comme représentation par permutation, $\chi_\rho(\sigma)$ est le nombre de points fixes par σ. On obtient donc :

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
χ_ρ	4	2	0	1	0

On va donc calculer les coefficients $\alpha_i = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_i} \rangle$ pour tout $i \in [\![1,5]\!]$.

$$\begin{aligned}\alpha_1 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_1} \rangle &= \frac{1}{|\mathfrak{S}_4|}\Big(\#C_1.\chi_\rho(Id).\chi_{\rho_1}(Id) + \#C_2.\chi_\rho((12)).\chi_{\rho_1}((12)) + \#C_3.\chi_\rho((12)(34)).\chi_{\rho_1}((12)(34)) \\ &\quad + \#C_4.\chi_\rho((123)).\chi_{\rho_1}((123)) + \#C_5.\chi_\rho((1234)).\chi_{\rho_1}((1234))\Big) \\ &= \frac{1}{24}(1.4.1 + 6.2.1 + 3.0.1 + 8.1.1 + 6.0.1) = 1\end{aligned}$$

De même, on trouve :

$$\alpha_2 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_2} \rangle = 0 \quad , \quad \alpha_3 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_3} \rangle = 1 \quad , \quad \alpha_4 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_4} \rangle = 0 \quad , \quad \alpha_5 = \langle \chi_\rho, \chi_{\rho_5} \rangle = 0$$

Par conséquent, on a :

$$\chi_\rho = \chi_1 + \chi_3 \quad \text{et} \quad (\rho, \mathbb{C}^4) \simeq (\rho_1, \mathbb{C}) \oplus (\rho_3, \mathbb{C}^3)$$