Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

Mohamed NASSIRI

INTRO

Références

[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré
[DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt
[PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin
[ROU] Petit guide de calcul différentiel, François Rouvière
[WAR] Mathématiques tout-en-un MPSI-PCSI, Claude Deschamps et André Warusfel
[FGNal1] Oraux X-ENS - Algèbre 1, Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas
[NEHH] Topologie générale et espaces normés - 2e édition, Nawfal El Hage Hassan ♠
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Développements

Décomposition polaire
Connexité par arcs de $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ et $U(n)$

Dans toute la leçon K désigne un corps commutatif quelconque et E un K-e.v.

1 Le groupe linéaire

1.1 Définitions et premières propriétés [ML3al] p.294 → 296

Définition 1 *On appelle* <u>*groupe linéaire*</u> *l'ensemble des K-automorphisme de E et on le note $\mathrm{GL}(E)$. Cet ensemble a une structure de groupe pour la composition des endomorphisme.*

Définition 2 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathrm{GL}_n(K)$ comme le groupe des automorphismes de K^n.*
Lorsque E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, on a un isomorphisme entre $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{GL}_n(K)$ en fixant une base de E.

Remarque 3 *Dans la suite, on étudie principalement $\mathrm{GL}_n(K)$.*

Proposition 4 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $u \in \mathrm{GL}(E)$
(ii) $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$
(iii) $\det(u) \neq 0$
(ivv) $\mathrm{Im}(u) = E$

Remarque 5 *Ce résultat est faux en dimension infinie comme le montre l'application*

$$u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$$
$$P \mapsto XP$$

On a $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ mais $u \notin \mathrm{GL}(E)$

Définition 6 *Le noyau de l'application* det *est appelé* <u>*groupe spécial linéaire*</u> *et est noté $\mathrm{SL}_n(K)$ (i.e.)*

$$\mathrm{SL}_n(K) = \{u \in \mathrm{GL}_n(K) \mid \det(u) = 1\}$$

Remarque 7 *$\mathrm{SL}_n(K)$ est distingué dans $\mathrm{GL}_n(K)$.*

1.2 Générateurs [FGNXXX] p.XXX

Dans cette section, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

Définition 8 *On appelle* <u>*matrice de transvection*</u> *toute matrice de la forme $T_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.*
On appelle <u>*matrice de dilatation*</u> *toute matrice diagonale $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$*

Remarque 9 *On a un lien entre ces matrices et les opérations dites élémentaires.*
Voir Tableau 1

Théorème 10 *L'ensemble des matrices de transvection engendre le groupe $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et l'ensemble des matrices de transvection et de dilatation engendre le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

2 Sous-groupes

2.1 Centre et groupe dérivée [ML3al] p.302-303

Théorème 11 *(i)* $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n(K)) = \{\lambda Id \ ; \ \lambda \in K\}$
(ii) $\mathcal{Z}(\mathrm{SL}_n(K)) = \{\lambda Id \ ; \ \lambda \in K$ *et* $\lambda^n = 1\}$

Théorème 12 *Soit* K *un corps commutatif. Lorsque* $K = \mathbb{F}_2$ *ou* $\mathbb{F}_3$*, on suppose de plus* $n \geq 3$.
(i) $D(\mathrm{GL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$
(ii) $D(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$
où $D(\mathrm{GL}_n(K))$ *et* $D(\mathrm{SL}_n(K))$ *désignent respectivement les groupes dérivés de* $\mathrm{GL}_n(K)$ *et* $\mathrm{SL}_n(K)$.

Théorème 13 *Les cas exceptionnels :*
(i) $D(\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$
(ii) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$ *et donc* $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)) \simeq \mathfrak{A}_3$
(iii) $|\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)| = 24$ *et donc* $D(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)) \simeq \mathbb{H}_8$

2.2 Groupe orthogonal

Dans cette section, on considère $\mathrm{car}(K) \neq 2$ et q une forme quadratique non dégénérée (mais pas nécessairement définie ou positive) de forme polaire f.

Définition 14 *Le groupe orthogonal* $O(E, q)$ *(ou* $O(q)$ *lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité) associé à* q *est l'ensemble*

$$\{u \in \mathrm{GL}(E) \mid q(u(x)) = q(x), \ \forall x \in E\}$$

Un élément de $O(E, q)$ *est appelé une isométrie (relativement à* q*).*

Proposition 15 *Soit* $u \in O(q)$*. Alors* $\det(u) = \pm 1$.

Définition 16 *Le sous-groupe de* $O(q)$ *formé des isométries de déterminant 1 est appelé sous-groupes des isométries positives et est noté* $SO(q)$*.*

Remarque 17 $SO(q)$ *est distingué dans* $O(q)$*.*

Définition 18 *Lorsque* E *est un* $\mathbb{R}$*-e.v. (*resp. $\mathbb{C}$*-e.v.) de dimension* n *muni du produit scalaire canonique, le groupe orthogonal est noté* $O_n(\mathbb{R})$ *(*resp. $U(n)$*).*

Proposition 19 *Etude de* $O_2(\mathbb{R})$ *: Soit* $A \in O_2(\mathbb{R})$*. Alors :*
- soit $A \in SO_2(\mathbb{R})$ *et dans ce cas*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle θ *et de centre* O*)*
- soit $A \notin SO_2(\mathbb{R})$ *et dans ce cas*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

(symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle polaire $\theta/2$*)* **[GRI] p.241-242**

Proposition 20 *Etude de* $O_3(\mathbb{R})$ *: Soient* $A \in O_3(\mathbb{R})$ *et* f *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^3$ *tel que* $A = Mat(f)_{\mathcal{B}}$ *(où* $\mathcal{B}$ *est la base canonique). Alors il existe une base orthonormée* $\mathcal{B}'$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

$$A' = Mat(f)_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

où $\epsilon = +1$ *si* $\det A = 1$, *(i.e.)* $A \in SO_3(\mathbb{R})$ *;*
et $\epsilon = -1$ *si* $\det A = -1$, *(i.e.)* $A \notin SO_3(\mathbb{R})$. **[GRI] p.243-245**

Théorème 21 ♠ *$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions* ♠
Soit G *le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :*

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

[PER] p.160 → 164

2.3 Matrices de permutations [DEL] p.61→68

Définition 22 *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$*, on appelle matrice de permutation une matrice de la forme* $P_\sigma = (p_{ij})$ *où* $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ *pour* $1 \leq i, j \leq n$ *(où* δ_{ij} *est le symbole de Kronecker).*

Proposition 23 *(i) L'ensemble* $\mathcal{P}$ *des matrices de permutation est un groupe isomorphe à* $\mathcal{S}_n$*.*
(ii) $\mathcal{P}$ *agit par translation sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*).*

Exemple 24 *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *que l'on note* $M = (C_1 \ C_2 \ C_3) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix}$ *et en considérant* $\sigma = (123)$*. Alors :*

$$P_\sigma M = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \text{ et } MP_\sigma = (C_2 \ C_3 \ C_1)$$

Proposition 25 *Soit* $\sigma \in \mathcal{S}_n$*. Alors* $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$*. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[d, "\det"] \\ \{-1, 1\} \arrow[r] & \mathbb{K}^* \end{tikzcd}$$

[OBJ] p.188

3 Topologie

3.1 Densité

Proposition 26 *Le groupe linéaire* $\mathrm{GL}_n(K)$ *est un ouvert dense dans* $\mathcal{M}_n(K)$. **[ML3al] p.310**

Application 27 *Soient* $M, N \in \mathcal{M}_n(K)$. *On note* χ_A *le polynôme caractéristique d'une matrice* $A \in \mathcal{M}_n(K)$. *Alors*

$$\chi_{MN} = \chi_{NM}$$

[ML3al] p.310-311

Application 28 *L'application déterminant est de classe* C^1 *sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *et* $\forall X, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, *on a :*

$$D\det(X)(H) = \mathrm{tr}(\ {}^t\mathrm{com}(X)H)$$

[**ROU**] **p.**$\mathbf{74-75 \rightarrow 331}$

3.2 Homéomorphismes [ML3al] p.311

Définition 29 *On définit les ensembles*

$$GL_n^+(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) > 0\}$$

$$GL_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) < 0\}$$

Proposition 30 *On a un homéomorphisme entre* $GL_n^+(\mathbb{R})$ *et* $GL_n^-(\mathbb{R})$

Proposition 31 *On a les deux homéomorphismes suivants*

$$GL_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^* \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$$

$$GL_n^+(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$$

3.3 Connexité [NEHH] p.517-518

Théorème 32 ♠ $GL_n(\mathbb{C})$, $SU(n)$ *et* $U(n)$ *sont connexes par arcs.* ♠

Proposition 33 *(i)* $SO_n(\mathbb{R})$ *est connexe par arcs.*
(ii) $O_n(\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes dont celle contenant* I_n *est* $SO_n(\mathbb{R})$.
(iii) $GL_n(\mathbb{R})$ *a deux composantes connexes :*

$$GL_n^+(\mathbb{R}) \quad et \quad GL_n^-(\mathbb{R})$$

Proposition 34 *Pour* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, $SL_n(\mathbb{K})$ *est connexe par arcs.*

3.4 Compacité [ML3al] p.328

Proposition 35 $SU(n)$ *et* $U(n)$ *sont compacts.*
$O_n(\mathbb{R})$ *et* $SO_n(\mathbb{R})$ *sont compacts.* **[NEHH] p.517**

Remarque 36 *Cela est faux en général pour le groupe orthogonal* $O(q)$ *d'une forme quadratique quelconque, même non dégénérée. Par exemple, la forme quadratique q donnée par la matrice* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *dans la base canonique, nous donne que les éléments de* $O(q)$ *sont de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

$O(q)$ *n'est donc pas borné, ce qui implique qu'il n'est pas compact.*

Théorème 37 ♠ *Décomposition polaire* ♠
On a les homéomorphismes suivants :

$$\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ (O, S) \mapsto OS$$

$$\mathrm{U}_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ (U, H) \mapsto UH$$

[H2G2t1] p.202

Corollaire 38 *Tout sous-groupe compact de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *qui contient* $O_n(\mathbb{R})$ *est* $O_n(\mathbb{R})$ *lui-même.* **[H2G2t1] p.205**

Corollaire 39 *Tout sous-groupe fini* G *de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ *est conjugué à un sous-groupe de* $O_n(\mathbb{R})$. **[H2G2t1] p.206**

4 Excursion sur les corps finis

Proposition 40 *Sur un corps fini* $\mathbb{F}_q$ *à q éléments et pour un entier m donné, les ensembles suivants ont pour cardinaux :*
(i) Espace vectoriel :

$$|\mathbb{F}_q^m| = q^m$$

(ii) Groupe linéaire :

$$\begin{aligned} |\mathrm{GL}_m(\mathbb{F}_q)| &= (q^m - 1)(q^m - q)...(q^m - q^{m-1}) \\ &= (q^m - 1)(q^{m-1} - 1)...(q - 1)q^{m(m-1)/2} \end{aligned}$$

C'est aussi le nombre de bases de $\mathbb{F}_q^m$.
(ii) Groupe spécial linéaire :

$$\begin{aligned} |\mathrm{SL}_m(\mathbb{F}_q)| &= \frac{(q^m - 1)(q^m - q)...(q^m - q^{m-1})}{q - 1} \\ &= (q^m - 1)(q^{m-1} - 1)...(q^2 - 1)q^{m(m-1)/2} \end{aligned}$$

[H2G2t1] p.250-252, [FGNal1] p.17

Proposition 41 *Soit q une puissance d'un nombre premier impair. On a un isomorphisme :*

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{F}_q) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z} \ si \ -1 \in \mathbb{F}_p^{*2} \\ \mathbb{Z}/(q+1)\mathbb{Z} \ si \ -1 \notin \mathbb{F}_p^{*2} \end{cases}$$

5 Actions de groupe et représentations linéaires de groupe

5.1 Actions de groupe

5.1.1 Action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence [H2G2t1] p.4-5

Définition 42 *On définit l'action de $G := \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence par*

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q),A) &\mapsto (P,Q).A = PAQ^{-1} \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action par équivalence.

Proposition 43 *Théorème du rang*
En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \exists (P,Q) \in G,\ B = PAQ^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de G, on a, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$$

En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang, entier compris entre 0 et $\min(n,m)$.

5.1.2 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison [H2G2t1] p.84→86

Définition 44 *On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) par conjugaison par*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \\ (P,A) &\mapsto P.A = PAP^{-1} \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont semblables si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 45 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ B = PAP^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ prises avec multiplicités, on a, pour tout $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, que l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n \\ \mathcal{O}_A &\mapsto \mathrm{Spec}(A) \end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Corollaire 46 *Le polynôme caractéristique ou le spectre (valeurs propres avec multiplicités) sont des invariaux totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.*

Remarque 47 *C'est faux pour le polynôme minimal (i.e.) en ne considérant que les valeurs propres sans multiplicités comme le montre les matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 48 *Une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A$ sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

5.1.3 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence [H2G2t1] p.149→157

Définition 49 *On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence par*

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P,A) &\mapsto P.A = PAP^* \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congrues si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 50 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = PAP^*\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :
(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A'$$

(ii) Théorème de Sylvester : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} A' \text{ et } \mathrm{sign} A = \mathrm{sign} A'$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$ inversibles :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$$

où $\delta(A)$ est le déterminant de A modulo les carrés de $\mathbb{F}_q$.

5.2 Représentations linéaires de groupes [PEY] p.194 → 205

Définition 51 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :*

$$\begin{aligned} G \times V &\to V \\ (g,v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Une représentation ρ est dite fidèle si G agit fidèlement sur V.

Exemple 52 *Fort de l'isomorphisme* $Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$*, on peut établir une représentation du groupe* $\mathfrak{S}_4$ *sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^3$ *comme un groupe de transformations orthogonales.*

Définition 53 • *Soient* ρ *et* ρ' *deux représentations d'un même groupe* G *respectivement sur deux* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* V *et* V'*. Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire* $\tau : V \to V'$ *tel que pour tout* $g \in G$*,* $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\tau"] & V' \end{tikzcd}$$

• *Deux représentations* ρ *et* ρ' *d'un même groupe* G *respectivement sur deux* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* V *et* V' *sont dites isomorphes si* τ *est bijective.*

Définition 54 • *Si une représentation* ρ *de* G *sur* V *admet un sous-espace vectoriel* $W \subset V$ *stable pour tous les* $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$*, elle induit une représentation* ρ_W *sur* W *appelée sous-représentation.*
• *Une représentation sur un espace* V *est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations :* $\{0\}$ *et* V *tout entier.*

Proposition 55 *Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.*

Proposition 56 *Lemme de Schur :*
Soient ρ *et* ρ' *deux représentations irréductibles d'un groupe* G *respectivement sur deux* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* V *et* V' *et* $f \in \mathcal{L}(V, V')$ *un opérateur d'entrelacement. Alors*
(i) si ρ *et* ρ' *ne sont pas isomorphes,* $f = 0$*.*
(ii) Si $f \neq 0$*, alors* f *est un isomorphisme.*
Si on suppose $V = V'$*, alors* f *est une homothétie.*

Illustrations

Opération élémentaire	Multiplication par	
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$I_n + \lambda E_{i,j}$	Multiplication
$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$I_n + (1-\lambda)E_{i,i}$	à
$L_i \leftrightarrow L_j$	$I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	gauche
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$	$I_p + \lambda E_{j,i}$	Multiplication
$C_i \leftarrow \lambda C_i$	$I_p + (1+\lambda)E_{i,i}$	à
$C_i \leftrightarrow C_j$	$I_p - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$	droite

Tableau 1 : Opérations élémentaires et matrices de transvections et dilatations

Questions

Exercice : Exercice : Ecrire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

comme un produit de matrices de transvection et de dilatation.

Solution :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ T_{12}(1)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ T_{21}(1)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ T_{21}(-2)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ T_{12}(1)}}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D_2(-1)
\end{aligned}$$

Par suite, on a

$$D_2(-1) = T_{12}(1)T_{21}(1)T_{21}(-2)T_{12}(1)M$$

et donc

$$M = [T_{12}(1)T_{21}(1)T_{21}(-2)T_{12}(1)]^{-1}D_2(-1) = T_{12}(-1)T_{21}(2))T_{21}(-1)T_{12}(-1)D_2(-1)$$

Exercice : Soit G un sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que G est conjugué à un sous-groupe de matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Solution : Il faut montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PGP^{-1} \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Comme G est fini, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $g \in G$, $g^p = I_n$. Or le polynôme $X^p - 1$ est scindé à racines simples, donc g est diagonalisable.
De plus, comme G est abélien, tous les éléments de G commutent et ainsi ils sont diagonalisables dans une même base (*i.e.*) il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall g \in G$, PgP^{-1} soit une matrice diagonale (*i.e.*) telle que $PGP^{-1} \subseteq \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$.

Exercice :

Solution :