Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

En considérant G un groupe et X un ensemble, on peut définir une action de groupe. Plus précisement, on va dire que G agit (à gauche) sur X si on a

$$\boxed{\text{OU}}$$

une application α défini par

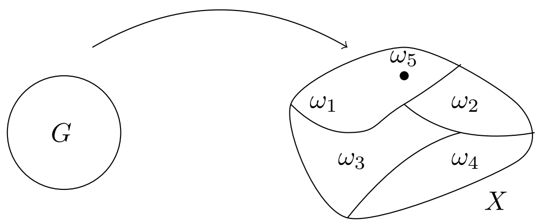
$$\alpha \ : \ G \times X \to X$$
$$(g, x) \mapsto g.x \quad (resp. \ x.g)$$

telle que
$\forall x \in X, \ 1.x = x$
$\forall (g, g') \in G^2, \ \forall x \in X, \ g.(g'.x) = gg'.x$

un morphisme Φ défini par

$$\Phi \ : \ G \to \mathfrak{S}(X)$$
$$g \mapsto \varphi_g \ : \ \begin{cases} X & \to X \\ x & \mapsto g.x \end{cases}$$

Même si la donnée de α et Φ sont équivalentes, il ne faut pas les confondre ! En effet, α n'est pas un morphisme, alors que Φ oui ! Cela provient du fait que X peut être un ensemble quelconque et pas forcément un groupe ...



Une des premières propriétés importantes d'une action de groupe est qu'elle partitionne l'ensemble X.

Les actions de groupes, même les plus simples, sont très efficaces. Par exemple, avec la simple action par translation on obtient le très célèbre théorème de Cayley. L'action par conjugaison nous conduit à deux résutats importants : l'équation aux classes et la formule de Burnside. La première nous donne le théorème de Wedderburn : *"Tout corps fini est commutatif."*.

Sur les espaces de matrices, les actions sont florissantes et nous permettent de reformuler plusieurs théorèmes célèbres : théorème du rang, classification des formes quadratiques, etc.

Du coté de la géométrie affine, on peut définir un espace affine à partir d'une action de groupe : on dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'espace affine de direction E un espace vectoriel, si $(E, +)$ agit transitivement et librement sur $\mathcal{E}$ en notant

$$E \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$$
$$(\overrightarrow{v}, P) \mapsto t_{\overrightarrow{v}}(P) \underset{not}{=} P \dot{+} \overrightarrow{v}$$

La géométrie affine et plus particulièrement les isométries qui préservent des parties, permettent de réaliser certains groupes célèbres comme des groupes d'isométries. Par exemple, en notant Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4, on peut montrer que $Is(\Delta_4)$ agit sur les sommets du tétraèdre, et que l'on a l'isomorphisme

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

Lorsque $X = V$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, on a même une nouvelle théorie : celles des *représentations linéaires de groupes*. Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho \ : \ G \to \mathrm{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :

$$G \times V \to V$$
$$(g, v) \mapsto g.v = \rho(g)(v)$$

Références

[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone
[PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin ♠
[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas
[DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt
[OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré
[PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Développements

$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions
Théorème de Wedderburn
Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et les isométries du tétraèdre

1 Actions de groupe [ML3al] p.238 → 242

Dans cette leçon, G est un groupe et X un ensemble.

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 *On dit que G agit à gauche (resp. à droite) sur X si on a une application*

$$\begin{aligned} G\times X &\to X \\ (g,x) &\mapsto g.x \quad (\textit{resp. } x.g) \end{aligned}$$

telle que
(i) $\forall x \in X,\ 1.x = x \quad (\textit{resp. } x.1 = x)$
(ii) $\forall (g,g') \in G^2,\ \forall x \in X,\ g.(g'.x) = gg'.x \quad (\textit{resp. } (x.g).g' = x.gg')$

Remarque 2 *(i) Dans la suite, on considère les actions à gauche.*
(ii) Se donner une action de groupe, c'est se donner un morphisme Φ *défini par*

$$\begin{aligned} \Phi \ :\ G &\to \mathfrak{S}(X) \\ g &\mapsto \varphi_g \ :\ \begin{cases} X & \to X \\ x & \mapsto g.x \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 3 *Soit G un groupe (noté multiplicativement). La multiplication (ou translation) à gauche :*

$$\begin{aligned} G\times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto g.h = gh \end{aligned}$$

est une action de groupe.

Définition 4 *On dit que l'action est fidèle si*

$$(\forall x \in X,\ g.x = x) \Rightarrow g = 1$$

Elle est dite transitive si

$$(\forall x,y \in X, \exists g \in G \text{ tel que } g.x = y)$$

Définition 5 *La relation*

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tel que } g.x = y$$

est une relation d'équivalence et ses classes sont appelées orbites de G sous X. L'orbite d'un élément $x \in X$ *est noté* $\omega(x)$.

Définition 6 *Le stabilisateur de x, noté* $\mathrm{Stab}(x)$, *est le sous-groupe de G défini par*

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

On dit que x est un point fixe pour l'action de G si $\mathrm{Stab}(x) = G$.

Exemple 7 *Soit G un groupe (noté multiplicativement). La conjugaison :*

$$\begin{aligned} G\times G &\to G \\ (g,h) &\mapsto g.h = ghg^{-1} \end{aligned}$$

est une action de groupe.
Les orbites sont appelées classes de conjugaison et le stabilisateur de x est appelé centralisateur (noté $C_G(x)$*).*

Théorème 8 *Théorème de Cayley*
Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe de permutations.

Théorème 9 ♠ *$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions* ♠
Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1,1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

1.2 Equation aux classes et formule de Burnside

Proposition 10 *Les orbites de X sous l'action de G forment une partition de X et il existe une bijection*

$$\begin{aligned} f_x \ :\ G\backslash\mathrm{Stab}(x) &\to \omega(x) \\ g\mathrm{Stab}(x) &\mapsto g.x \end{aligned}$$

De plus, l'action induite sur $\omega(x)$ est compatible avec l'action naturelle de G sur le quotient $G\backslash\mathrm{Stab}(x)$ dans le sens suivant :

$$\forall \kappa \in G\backslash\mathrm{Stab}(x),\ \forall g \in G, \quad f_x(g\kappa) = g.f_x(\kappa)$$

Corollaire 11 *Si G et X sont finis, alors $\mathrm{Card}(\omega(x))$ divise $|G|$.*

Proposition 12 *Si $x, y \in X$ sont dans la même orbite, alors $\mathrm{Stab}(x)$ et $\mathrm{Stab}(y)$ sont conjugués.*

Proposition 13 *Equation aux classes*
On a l'égalité

$$|G| = |Z(G)| + \sum_i \mathrm{Card}(\omega_i)$$

où la somme porte sur toutes les classes de conjugaison de cardinal strictement supérieur à 1.

Corollaire 14 *(i) Si G est un p-groupe, on a $|Z(G)| \geq p$.*
(ii) Tout groupe d'ordre p^2 est abélien.

Application 15 ♠ *Théorème de Wedderburn* ♠
Tout corps fini est commutatif. **[PER] p.82**

Proposition 16 *On suppose que G est un p-groupe et que X est fini. Soit*

$$X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G,\ g.x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de X sous l'action de G. Alors

$$\mathrm{Card}(X) \equiv \mathrm{Card}(X^G) \pmod p$$

Définition 17 *On pose, pour $g \in G$,*

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

Remarque 18 *On a, par définition,*

$$X^G = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Fix}(g)$$

Proposition 19 *Formule de Burnside*
On suppose G et X finis. Alors

$$\sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Le nombre d'orbites de X sous l'action de G, noté $\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G))$, est donné par la formule :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))$$

2 Exemples d'actions de groupes

2.1 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $K[X_1, ..., X_n]$ [GOUal] p.78

Définition 20 *Soit K un corps. On définit l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $K[X_1, ..., X_n]$ par*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times K[X_1, ..., X_n] &\to K[X_1, ..., X_n] \\ (\sigma, P(X_1, ..., X_n)) &\mapsto \sigma.P(X_1, ..., X_n) \\ &= P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

Définition 21 *On dit qu'un polynôme $P \in K[X_1, ..., X_n]$ est symétrique si $P \in K[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ (i.e.) si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a*

$$P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) = P(X_1, ..., X_n)$$

2.1.1 Action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence [H2G2t1] p.4-5

Définition 22 *On définit l'action de $G := \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence par*

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q), A) &\mapsto (P,Q).A = PAQ^{-1} \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action par équivalence.

2.2 Actions de groupes sur les espaces de matrices

2.2.1 Action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence [H2G2t1] p.4-5

Définition 23 *On définit l'action de $G := \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ par équivalence par*

$$\begin{aligned} G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) &\to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q), A) &\mapsto (P,Q).A = PAQ^{-1} \end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action par équivalence.

Proposition 24 *Théorème du rang*
En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \exists (P,Q) \in G,\ B = PAQ^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de G, on a, pour tout $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \Leftrightarrow \mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$$

En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang, entier compris entre 0 et $\min(n, m)$.

2.2.2 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ par conjugaison [H2G2t1] p.84→86

Définition 25 *On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ (ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) par conjugaison par*

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) &\to \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PAP^{-1}\end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ sont semblables si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 26 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}),\ B = PAP^{-1}\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, et $\mathrm{Spec}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ prises avec multiplicités, on a, pour tout $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$, que l'application

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) &\to \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n \\ \mathcal{O}_A &\mapsto \mathrm{Spec}(A)\end{aligned}$$

est bien définie et bijective.

Corollaire 27 *Le polynôme caractéristique ou le spectre (valeurs propres avec multiplicités) sont des invariaux totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.*

Remarque 28 *C'est faux pour le polynôme minimal (i.e.) en ne considérant que les valeurs propres sans multiplicités comme le montre les matrices suivantes*

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Proposition 29 *Une matrice complexe A est diagonalisable si et seulement si son orbite $\mathcal{O}_A$ sous $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est fermée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.*

2.2.3 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence [H2G2t1] p.149→157

Définition 30 *On définit l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par congruence par*

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) &\to \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PAP^*\end{aligned}$$

On dit que deux matrices $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ sont congrues si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

Théorème 31 *En notant*

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = PAP^*\}$$

l'orbite de A sous l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :
(i) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A'$$

(ii) Théorème de Sylvester : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A' \textit{ et } \mathrm{sign}A = \mathrm{sign}A'$$

(iii) Si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, et $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$ inversibles :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$$

où $\delta(A)$ est le déterminant de A modulo les carrés de $\mathbb{F}_q$.

Définition 32 *(i) Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose*

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) := \mathcal{O}_{I_n} = \{P^tP \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

$$\mathrm{Stab}(I_n) := O_n(\mathbb{R}) = \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid P^tP = I_n\}$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on pose

$$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) := \mathcal{O}_{I_n} = \{PP^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ ;\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

$$\mathrm{Stab}(I_n) := U(n) = \{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mid PP^* = I_n\}$$

2.3 Matrices de permutations [DEL] p.61→68

Définition 33 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on appelle matrice de permutation une matrice de la forme $P_\sigma = (p_{ij})$ où $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker).*

Proposition 34 *(i) L'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices de permutation est un groupe isomorphe à $\mathcal{S}_n$.*
(ii) $\mathcal{P}$ agit par translation sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exemple 35 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on note $M = (C_1\ C_2\ C_3) = \begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix}$ et en considérant $\sigma = (123)$. Alors :*

$$P_\sigma M = \begin{pmatrix}L_3\\ L_1\\ L_2\end{pmatrix} \textit{ et } MP_\sigma = (C_2\ C_3\ C_1)$$

Proposition 36 *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Alors $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$. En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \arrow[d, "\det"] \\ \{-1, 1\} \arrow[r] & \mathbb{K}^* \end{tikzcd}$$

[OBJ] p.188

2.4 Action de groupe et géométrie

Définition 37 *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble et E un espace vectoriel. On dit que $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'espace affine de direction E, si $(E,+)$ agit transitivement et librement sur $\mathcal{E}$ en notant*

$$\begin{aligned} E \times \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ (\overrightarrow{v}, P) &\mapsto t_{\overrightarrow{v}}(P) \underset{not}{=} P \dot{+} \overrightarrow{v} \end{aligned}$$

[GRI] p.387

Théorème 38 ♠ *Soient Δ_4 le tétraèdre régulier et $Is(\Delta_4)$ le groupe des isométries préservant Δ_4. Alors $Is(\Delta_4)$ agit sur les sommets du tétraèdre, et on a*

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est voir Tableau 1 *et* Partie 3 ♠ **[H2G2t1] p.363-364**

3 Représentations linéaires de groupes

3.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194 → 205

Définition 39 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :*

$$\begin{aligned} G \times V &\to V \\ (g, v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Une représentation ρ est dite fidèle si G agit fidèlement sur V.

Exemple 40 *Fort de l'isomorphisme $Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$, on peut établir une représentation du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ comme un groupe de transformations orthogonales.*

Définition 41 • *Soient ρ et ρ' deux représentations d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V'. Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire $\tau : V \to V'$ tel que pour tout $g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\tau"] & V' \end{tikzcd}$$

• *Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' sont dites isomorphes si τ est bijective.*

Définition 42 • *Si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous-représentation.*
• *Une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.*

Proposition 43 *Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.*

Proposition 44 *Lemme de Schur :*
Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles d'un groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' et $f \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur d'entrelacement. Alors
(i) si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $f = 0$.
(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme.
Si on suppose $V = V'$, alors f est une homothétie.

3.2 Caractères [PEY] p.207 → 226

Définition 45 *Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n.*
On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace.
C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (i.e.) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$.

Proposition 46 *Soient χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles. Alors*
(i) χ_ρ est le caractère d'une représentation irréductible si et seulement si

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} = 1$$

(ii) Si χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$

Proposition 47 *En notant $(\chi_i)_{i=1}^p$ les caractères irréductibles de G et $(C_i)_{i=1}^p$ les classes de conjugaison de G, on a :*
(i) Formule de Burnside : $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$
(ii) Orthogonalité des caractères : $\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k)\overline{\chi_i(C_l)} = 0$ pour $k \neq l$.

Définition 48 *Une table des caractères est un tableau constitué des éléments de la matrice $(\chi_i(C_j))_{1 \le i,j \le p}$.*

	1 *1*	$\lvert C_1\rvert$ C_1	… …	$\lvert C_p\rvert$ C_p
$\chi_1 = \mathbb{1}$	*1*	*1*	…	*1*
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	…	$\chi_2(C_p)$
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(C_2)$	…	$\chi_p(C_p)$

Illustrations

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

Tableau 1 : La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

Questions

Exercice : 1) Montrer que $SO_2(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $SO_3(\mathbb{R})$ agit transitivement sur le sphère unité de $\mathbb{R}^3$.

Solution : 1) Soit $A, B \in \mathbb{R}^2$ deux points du plan. Il nous faut donc trouver un élément $r \in SO_2(\mathbb{R})$ telle $r(A) = B$: il suffit de considérer la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

2) Soit $A, B \in \mathbb{R}^3$ deux points de l'espace. Il nous faut donc trouver un élément $r \in SO_3(\mathbb{R})$ telle $r(A) = B$. Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par O, A, B et d la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par O. Dans ce cas, il nous suffit de considérer la rotation d'axe d et d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Exercice : Un groupe G à 35 éléments agit sur un ensemble X à 19 éléments sans fixer aucun d'entre eux. Combien y-a-t-il d'orbites ? Combien d'éléments contiennent-elles ?

Solution : Rappelons que le cardinal d'une orbite divise le cardinal du groupe et que les orbites forment une partition de l'ensemble X.
Par conséquent, le cardinal d'une orbite ne peut pas être 1 puisque par hypothèse aucun point n'est fixé et ne peut pas être 35 car une orbite a au maximum 19 éléments. Ce ne peut donc être que 5 ou 7.
Notons n le nombre d'orbites à 5 éléments et m le nombre d'orbites à 7 éléments. Les orbites réalisant une réunion disjointe de l'ensemble à 19 éléments, on doit avoir

$$5n + 7m = 19$$

La seule possibilité est $n = 1$ et $m = 2$. Il y a donc 3 orbites, l'une à 5 éléments, les deux autres à 7 éléments.

Exercice : Démontrer la formule de Burnside :
On suppose G et X finis. Alors le nombre d'orbites de X sous l'action de G, noté $\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G))$, est donné par la formule :

$$\mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g))$$

Solution : L'idée est d'évaluer de deux manières différentes l'ensemble E suivant

$$E = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$$

en remarquant que

$$(g, x) \in E \Leftrightarrow g \in \mathrm{Stab}(x) \Leftrightarrow x \in \mathrm{Fix}(g)$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{Card}(E) = \sum_{g \in G} \mathrm{Card}(\mathrm{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)|$$

Or, on sait que les orbites forment une partition de X, ainsi on a

$$\sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{\omega} \sum_{x \in \omega} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{\omega} \sum_{x \in \omega} \frac{|G|}{\mathrm{Card}(\omega)} = |G| \mathrm{Card}(\mathrm{Orb}_X(G))$$