Exemples de sous-groupes distinguées et de groupes quotients. Applications.

Mohamed NASSIRI

L'idée de départ est de trouver une "décomposition atomique" des groupes. Ces "atomes" sont les *sous-groupes distingués*. Avoir un sous-groupe distingué permet de *quotienter* le groupe et de garder encore une structure de groupe.

Une autre façon de voir est la suivante : quotienter permet de faciliter l'étude d'un ensemble en "regroupant" des éléments "de même nature". Par exemple, pour les espaces L^p, on peut se rappeler que pour $p \in [1, +\infty]$, l'espace $L^p(X)$ est le quotient de l'espace $\mathcal{L}^p(X)$ (l'ensemble des fonctions f, mesurables de X dans $\mathbb{C}$, qui vérifient $||f||_p < \infty$) par le noyau de la semi-norme $||.||_p$:

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X)/\mathrm{Ker}||.||_p$$

On introduit la notion de *relation d'équivalence à droite* et *à gauche modulo H dans G* comme suit : à tout sous-groupe H d'un groupe G, on peut associer deux relations d'équivalences $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$, définies dans G par :

$$x\mathcal{R}_H y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in H \quad \text{et} \quad x\, {}_H\mathcal{R} y \;\Leftrightarrow\; x^{-1}y \in H$$

Ainsi, dans un groupe G, un sous-groupe H sera dit *distingué* si $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$ (Notation : $H \lhd G$). Cependant, on utilise souvent la caractérisation suivante :

$$H \lhd G \quad \Leftrightarrow \quad xhx^{-1} \in H,\ \forall h \in H,\ \forall x \in G$$

Par ailleurs, on peut même montrer que dans un groupe G, on a $H \lhd G$ si et seulement s'il existe un groupe G' et un morphisme $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$ tel que $H = \mathrm{Ker} f$. On introduit également les notions de *centre, normalisateur, centralisateur* et *groupe dérivée* qui nous permettent d'avoir plusieurs résultats intéressants et importants concernant les sous-groupes distinguées.

Grâce à la notion de sous-groupes distingués, on a les très célèbres théorèmes d'isomorphismes :

<u>1^{er} théorème d'isomorphisme :</u>
Soient G un groupe, $H \lhd G$ et $\pi : G \to \frac{G}{H}$ la projection canonique. Alors, quelque soient le groupe G' et le morphisme $f : G \to G'$ tel que $H \subseteq \mathrm{Ker} f$, il existe un unique morphisme $\varphi : \frac{G}{H} \to G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & \frac{G}{H} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & \mathrm{Im} f \subseteq G' & \end{tikzcd}$$

<u>2^{eme} théorème d'isomorphisme :</u>
Soient G un groupe, $H \lhd G$. Alors pour tout sous-groupe K de G, les groupes quotients $\frac{K}{H\cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent et on a

$$\frac{K}{H \cap K} \overset{\sim}{\to} \frac{HK}{H}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & HK \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{K}{H\cap K} \arrow[r, "\exists!\varphi"] & \frac{HK}{H} \end{tikzcd}$$

<u>3^{eme} théorème d'isomorphisme :</u>
Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $H \subseteq K$. Alors on a

$$\frac{G}{K} \overset{\sim}{\to} \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \frac{G}{H} \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{G}{K} \arrow[r, "\exists!\overline{\sigma}"] & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \end{tikzcd}$$

En s'intéressant aux *espaces vectoriels quotients*, on peut montrer que l'on peut construire le cylindre et le tore de la façon suivante :

Construction du cylindre $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Construction du tore $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k, h \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R_1 \\ y_1 = y_2 + 2h\pi R_2 \end{cases}$$

Une théorie "mélange" les espaces vectoriels et les groupes : Une *représentation linéaire* d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho \ : \ G \to \mathrm{GL}(V)$. L'intérêt des sous-groupes distingués est le suivant : soit $N \lhd G$. On note ρ_U la représentation régulière de G/N. Alors il existe une représentation canonique $\tilde{\rho}_U$ de G sur U telle que les sous-repérsentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\tilde{\rho}_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & GL(U) \\ & G/N \arrow[ur, "\rho_U"'] & \end{tikzcd}$$

A partir d'une représentation ρ d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n, on lui associe son *caractère* χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace. C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (*i.e.*) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$. Dans cet espace, on va poser un produit scalaire : si φ et ψ sont deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

$\langle ., . \rangle$ est un produit hermitien sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ des fonctions de G sans $\mathbb{C}$. Il se trouve que les caractères des représentations irréductibles d'un groupe G forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. En fait, on a mieux ! Les caractères sont des fonctions dites *centrales* : une fonction $\varphi \ : \ G \to \mathbb{C}$ est dite centrale si elle vérifie

$$\forall g, h \in G, \ \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note $\mathbb{C}[G]^G$ l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}[G]$. Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales ! On peut donc en déduire un résultat important de la théorie des représentations : le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de G.

Une table des caractères est importante et permet d'avoir plusieurs informations sur un groupe : notamment les sous-groupes distingués à partir de la notion de *noyau de caractères*, etc. Mais une table de caractère ne détermine pas totalement une groupe. En effet, on peut montrer que le groupe des quaternions de norme 1, $\mathbb{H}_8$, et le groupe diédral D_4 (d'ordre 8) ont la même table des caractères et pourtant ils ne sont pas isomorphes.

Références

[ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas

[GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone

[CAL] Éléments de théorie des groupes, Josette Calais

[DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt

[PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré

[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

Développements

$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions

Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

1 Sous-groupes distingués, groupes quotients

Dans cette leçon, G est un groupe et X un ensemble.

1.1 Définitions et premières propriétés [CAL] p.71 → 77, p.149 → 152

Proposition-définition 1 *A tout sous-groupe H d'un groupe G, on peut associer deux relations d'équivalences $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$, dites respectivement relation d'équivalence à droite et à gauche modulo H dans G, définies dans G par :*

$$x\mathcal{R}_H y \;\Leftrightarrow\; xy^{-1} \in H \;\text{ et }\; x\,{}_H\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; x^{-1}y \in H$$

Les ensembles $Hx := \{hx \; ; \; h \in H\}$ et $xH := \{xh \; ; \; h \in H\}$ sont respectivement appelés classes à droite et à gauche de x modulo H.
Les ensembles quotients $\frac{G}{\mathcal{R}_H}$ et $\frac{G}{{}_H\mathcal{R}}$ sont respectivement notés $\left(\frac{G}{H}\right)_d$ et $\left(\frac{G}{H}\right)_g$.
Le cardinal de $\left(\frac{G}{H}\right)_d$ $\left(= \mathrm{card}\left(\left(\frac{G}{H}\right)_d\right)\right)$ s'appelle l'indice de H dans G et se note $[G : H]$.

Définition 2 *Dans un groupe G, un sous-groupe H est dit distingué (ou normal) si $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$. On notera $H \lhd G$.*

Théorème 3 *Si H est un sous-groupe distingué d'un groupe G, alors l'ensemble quotient $\frac{G}{H}$ peut-être muni de la loi de composition quotient induite par celle de G, telle que*

$$\overline{xy} = \overline{x}\overline{y}, \quad \forall \overline{x}, \overline{y} \in \frac{G}{H}$$

relativement à cette loi.
$\frac{G}{H}$ est un groupe et l'application canonique $\pi : G \to \frac{G}{H}$ est un épimorphisme de groupes.

Définition 4 *Si $H \lhd G$, le groupe $\frac{G}{H}$ est appelé groupe quotient de G par le sous-groupe distingué H.*

Théorème 5 *Dans un groupe G, on a $H \lhd G$ si et seulement s'il existe un groupe G' et un morphisme $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$ tel que $H = \mathrm{Ker} f$.*

Définition 6 *Un groupe G est dit simple si $G \neq \{e\}$ et s'il n'a pas d'autre sous-groupe distingué que G et $\{e\}$.*

Proposition 7 *Les seuls groupes simples abéliens sont les groupes cycliques d'ordre premier.*

1.2 Premiers exemples [CAL] p.149 → 151

Exemple 8 *Dans tout groupe G, $\{e\}$ et G sont distingués.*

Exemple 9 *Dans un groupe abélien, tout sous-groupe est distingué.*

Exemple 10 *Pour tout entier $n > 1$, le groupe alterné $\mathfrak{A}_n$ est distingué dans $\mathfrak{S}_n$.*

Exemple 11 *Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K, le groupe spécial linéaire $\mathrm{SL}(E)$ est distingué dans $\mathrm{GL}(E)$.*

1.3 Caractérisations et propriétés [CAL] p.154 → 161

Théorème 12 *H est un sous-groupe distingué d'un groupe G si et seulement s'il vérifie l'une des cinq conditions équivalentes suivantes :*
(i) $Hx = xH, \; \forall x \in G$
(ii) $xHx^{-1} = H, \; \forall x \in G$
(iii) $x^{-1}Hx = H, \; \forall x \in G$
(iv) $xhx^{-1} \in H, \; \forall h \in H, \; \forall x \in G$
(v) $x^{-1}hx \in H, \; \forall h \in H, \; \forall x \in G$

Remarque 13 *Si H et K sont deux sous-groupes d'un groupe G, tels que $H \subseteq K$, alors si $H \lhd G$, on a $H \lhd K$.*

Exemple 14 *Pour tout groupe G, on a $\mathrm{Int}G \lhd \mathrm{Aut}G$, où $\mathrm{Int}G$ est le groupe des automorphismes intérieurs de G (i.e.) de la forme*

$$\begin{aligned} \sigma_g : G &\to G \\ g &\mapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in \mathrm{Aut}G$, on a

$$\alpha \circ \sigma_g \circ \alpha^{-1} = \sigma_{\alpha(g)}$$

Proposition 15 *Soit G un groupe quelconque et Z(G) son centre :*

$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \; \forall x \in G\}$$

Z(G) est un sous-groupe de G et pour tout $x \in G$ et $a \in Z(G)$, on a $xa^{-1} \in Z(G)$, donc $Z(G) \lhd G$.
Plus généralement :

$$H \leq G \text{ et } H \subseteq Z(G) \quad \Rightarrow \quad H \lhd G$$

Proposition 16 *Soit G un groupe quelconque et Z(G) son centre, alors on a*

$$\frac{G}{Z(G)} \text{ est monogène } \Rightarrow \; G \text{ est abélien}$$

Proposition 17 *Soient G un groupe et H un sous-groupe de G, alors :*

$$[G : H] = 2 \;\Rightarrow\; H \lhd G$$

Exemple 18 *Dans le groupe diédral D_n d'ordre $2n$, le sous-groupe cyclique des rotations Γ_n est d'indice 2, d'où $\Gamma \lhd D_n$.*

Proposition 19 *Soient G un groupe et $\{H_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-groupes de G, alors :*

$$(H_i \lhd G,\ \forall i \in I) \ \Rightarrow\ \bigcap_{i\in I} H_i \lhd G$$

Proposition 20 *Soient deux groupes G et G' et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$. Alors :*
(i) $H \lhd G \ \Rightarrow\ f(H) \lhd f(G)$. En particulier, si f est surjective, $f(H) \lhd G'$.
(ii) $H' \lhd G' \ \Rightarrow\ f^{-1}(H') \lhd G$.

Proposition 21 *Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Alors :*
(i) $H \lhd G \ \Rightarrow\ H \cap K \lhd K$.
(ii) $H \lhd G \ \Rightarrow\ HK$ est un sous groupe de G et que $H \lhd HK$.

Définition 22 *Soient G un groupe et $S \neq \varnothing$ dans $\mathcal{P}(G)$ (l'ensemble des parties de G). On dit $S' \in \mathcal{P}(G)$ est conjuguée de S s'il existe $x \in G$ tel que $S' = xSx^{-1} := \{xsx^{-1}\ ;\ s \in S\}$*
L'ensemble $\{xSx^{-1}\ ;\ x \in G\}$ est appelé classe de conjugaison de S.

Définition 23 (i) *Etant donné une partie non vide S d'un groupe G, on appelle normalisateur de S dans G le sous-groupe*

$$N_G(S) := \{x \in G \mid xSx^{-1} = S\}$$

(ii) Pour $S \in \mathcal{P}(G)$ tel que $\mathrm{card} S > 1$, on appelle centralisateur de S dans G l'ensemble

$$C_G(S) := \{x \in G \mid xsx^{-1} = s,\ \forall s \in S\}$$

Théorème 24 *Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Alors :*

$$H \lhd G \ \Leftrightarrow\ N_G(H) = G$$

Proposition 25 *Soit G u groupe. Alors :*
(i) Pour tout sous-groupe H de G, on a $H \lhd N_G(H)$.
(ii) Si H et K sont deux sous-groupes de G tels que $H \leq K$, alors

$$H \lhd K \ \Rightarrow\ K \leq N_G(H)$$

(iii) $K \leq N_G(H) \ \Rightarrow\ HK \leq G$ et $H \lhd HK$.

Remarque 26 *Pour tout sous-groupe H d'un groupe G, $N_G(H)$ est le plus grand sous-groupe (au sens de l'inclusion) de G dans lequel H est normal.*

1.4 Cas particulier : groupe dérivé [CAL] p.171

Définition 27 *Soit G un groupe. On appelle commutateur de x et y dans G l'élément $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ pour tout $x, y \in G$.*
On appelle groupe dérivé de G, le sous-groupe de G engendré par l'ensemble des commutateurs de G. On le note $D(G)$.

Remarque 28 *(i) G est abélien si et seulement si $D(G) = e$ pour tout $x, y \in G$.*
(ii) $H \lhd G$ et x ou y dans $H \Rightarrow [x, y] \in H$

Théorème 29 *Soit G un groupe. On a*
(i) $D(G) \lhd G$.
(ii) Si $N \lhd G$, alors G/N est un groupe abélien si et seulement si $D(G) \subseteq N$. En particulier, $G/D(G)$ est abélien.

2 Les théorèmes d'isomorphismes [CAL] p.161 → 170

Théorème 30 *Premier théorème d'isomorphisme*
Soient G un groupe, $H \lhd G$ et $\pi : G \to \frac{G}{H}$ la projection canonique. Alors, quelque soient le groupe G' et le morphisme $f : G \to G'$ tel que $H \subseteq \mathrm{Ker} f$, il existe un unique morphisme $\varphi : \frac{G}{H} \to G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & \frac{G}{H} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & \mathrm{Im} f \subseteq G' & \end{tikzcd}$$

Corollaire 31 *Sous les hypothèses du théorème précédent, on a :*
(i) f surjectif $\Rightarrow \varphi$ surjectif.
(ii) $H = \mathrm{Ker} f \Rightarrow \varphi$ injectif.
(iii) f surjectif et $H = \mathrm{Ker} f \Rightarrow \varphi$ est un isomorphisme.

Théorème 32 *Soient G un groupe et $H \lhd G$ et soit $\pi : G \to \frac{G}{H}$ la projection canonique. Alors :*
(i) Tout sous-groupe $\overline{K}$ de $\frac{G}{H}$ est l'image par π d'un unique sous-groupe de K de G contenant H. Plus précisément :

$$\overline{K} = \pi(K) \quad \text{où } K = \pi^{-1}(\overline{K})\ ;\ \text{de plus } \pi(K) = \frac{K}{H}$$

(ii) Si K_1 est un sous-groupe de G tel que $H \subsetneq K_1$, alors HK_1 est un sous-groupe de G contenant H et

$$\pi(K_1) = \frac{HK_1}{H}$$

Proposition 33 *Soit G un groupe et $H \lhd G$.*
(i) Si K et K' sont deux sous-groupes de G contenant H, alors

$$H \leq K \leq K' \ \Rightarrow\ \frac{K}{H} \leq \frac{K'}{H}$$

(ii)

$$(H \leq K \text{ et } K \lhd G) \ \Leftrightarrow\ \frac{K}{H} \leq \frac{G}{H}$$

Proposition 34 *Soient deux groupes G et G'. Etant donné $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ et $f \in \mathrm{Hom}(G,G')$ tel que $f(H) \subseteq H'$, il existe un unique morphisme $\overline{f} \in \mathrm{Hom}\left(\frac{G}{H}, \frac{G'}{H'}\right)$ tel que*

$$\overline{f} \circ \pi = \pi' \circ f$$

où $\pi : G \to \frac{G}{H}$ et $\pi' : G' \to \frac{G'}{H'}$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{G}{H} \arrow[r, "\exists ! \overline{f}"] & \frac{G'}{H'} \end{tikzcd}$$

Théorème 35 <u>*Deuxième théorème d'isomorphisme*</u>
Soient G un groupe, $H \lhd G$. Alors pour tout sous-groupe K de G, les groupes quotients $\frac{K}{H \cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent et on a

$$\frac{K}{H \cap K} \overset{\sim}{\to} \frac{HK}{H}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & HK \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{K}{H \cap K} \arrow[r, "\exists ! \varphi"] & \frac{HK}{H} \end{tikzcd}$$

Théorème 36 <u>*Troisième théorème d'isomorphisme*</u>
Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $H \subseteq K$. Alors on a

$$\frac{G}{K} \overset{\sim}{\to} \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \frac{G}{H} \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{G}{K} \arrow[r, "\exists ! \overline{\sigma}"] & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \end{tikzcd}$$

3 Espaces vectoriels quotients [GRI] p.354 → 357

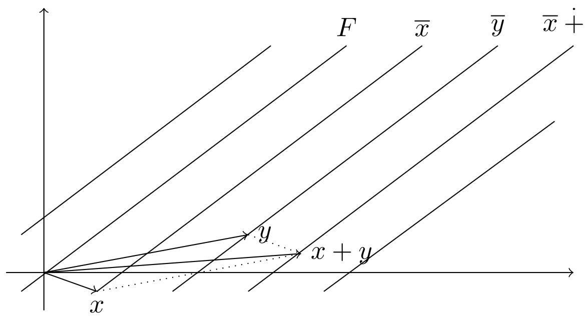
Proposition-définition 37 *Soit E un espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $E/F := \{x+F\}_{x \in E}$ l'espace quotient.*
On munit E/F des lois quotients

$$\overline{x} \dot{+} \overline{y} := \overline{x+y}$$
$$\lambda.\overline{x} := \overline{\lambda x}$$

(i.e.)

$$(x+F) \dot{+} (y+F) = (x+y) + F$$
$$\lambda.(x+F) := \lambda x + F$$

E/F muni des lois quotients est un espace vectoriel.

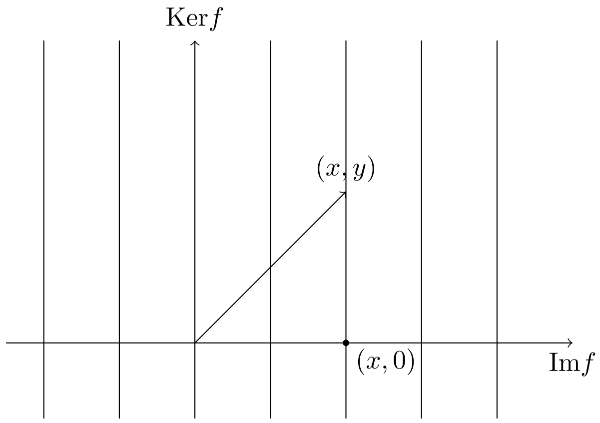


Théorème 38 *Soient E et E' deux espaces vectoriels et $f : E \to E'$ une application linéaire. Alors*

$$E/\mathrm{Ker}f \simeq \mathrm{Im}f$$

Exemple 39 *En considérant l'application*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \mapsto (x,0)$$



$E/\mathrm{Ker}f = \{$droites parallèles à 0y$\}$. L'application f fait correspondre à la droite (x) son intersection avec la droite $\mathrm{Im}f$ ((i.e.) l'axe $0x$).

Corollaire 40 *Si E est de dimension finie, on a*

$$\mathrm{dim}E/F = \mathrm{dim}E - \mathrm{dim}F$$

Corollaire 41 *Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors*

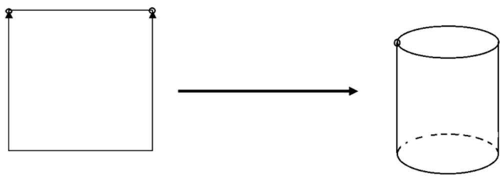
$$\frac{E_1 \oplus E_2}{E_2} \simeq E_1$$

Exemple 42 <u>*Construction du cylindre*</u>
Le cylindre peut-être défini comme l'espace quotient

$$\mathcal{C} = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

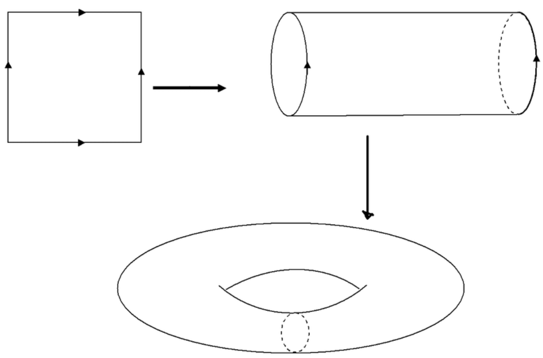


<u>Construction du tore</u>
Le cylindre peut-être défini comme l'espace quotient

$$\mathcal{T} = \mathbb{R}^2/\mathcal{R}$$

où

$$(x_1, y_1) \underset{\mathcal{R}}{\sim} (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k, h \in \mathbb{Z} \text{ tel que :} \\ x_2 = x_1 + 2k\pi R_1 \\ y_1 = y_2 + 2h\pi R_2 \end{cases}$$



4 Représentations linéaires de groupes

4.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194 → 205

Définition 43 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une <u>représentation linéaire</u> d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une <u>action linéaire</u> du groupe G sur V :*

$$\begin{aligned} G \times V &\to V \\ (g, v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Une représentation ρ est dite <u>fidèle</u> si G agit fidèlement sur V.

Exemple 44 *Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit une <u>représentation des morphimes</u> $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ par*
$\forall g \in G, \ \forall f \in \mathcal{L}(V, W)$,

$$\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

Définition 45 • *Soient ρ et ρ' deux représentations d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V'. Un <u>opérateur d'entrelacement</u> est une application linéaire $\tau : V \to V'$ tel que pour tout $g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\tau"] & V' \end{tikzcd}$$

• *Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' sont dites <u>isomorphes</u> si τ est bijective.*

Définition 46 • *Si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée <u>sous-représentation</u>.*
• *Une représentation sur un espace V est dite <u>irréductible</u> si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.*

Proposition 47 *Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.*

Proposition 48 <u>*Lemme de Schur :*</u>
Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles d'un groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' et $f \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur d'entrelacement. Alors
(i) si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $f = 0$.
(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme.
Si on suppose $V = V'$, alors f est une homothétie.

Proposition 49 *Soit $N \lhd G$. On note ρ_U la représentation régulière de G/N. Alors il existe une représentation canonique $\tilde{\rho}_U$ de G sur U telle que les sous-repérsentations de U sous l'action de G/N soient exactement celles de U sous l'action de G.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\tilde{\rho}_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & GL(U) \\ & G/N \arrow[ur, "\rho_U"'] & \end{tikzcd}$$

4.2 Caractères [PEY] p.207 → 226

Définition 50 *Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n.*
On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace.
C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (i.e.) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$.

Proposition 51 *Soient χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles. Alors*
(i) χ_ρ est le caractère d'une représentation irréductible si et seulement si

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g)\overline{\chi_\rho(g)} = 1$$

(ii) Si χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$

Proposition 52 *En notant $(\chi_i)_{i=1}^p$ les caractères irréductibles de G et $(C_i)_{i=1}^p$ les classes de conjugaison de G, on a :*
(i) Formule de Burnside : $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$
(ii) Orthogonalité des caractères :
$\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k)\overline{\chi_i(C_l)} = 0$ *pour $k \neq l$.*

Définition 53 *Une table des caractères est un tableau constitué des éléments de la matrice $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i,j \leq p}$.*

	1 *1*	$\lvert C_1\rvert$ C_1	$\dots$ $\dots$	$\lvert C_p\rvert$ C_p
$\chi_1 = \mathbb{1}$	*1*	*1*	$\dots$	*1*
χ_2	χ_2*(1)*	$\chi_2(C_2)$	$\dots$	$\chi_2(C_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_p	χ_p*(1)*	$\chi_p(C_2)$	$\dots$	$\chi_p(C_p)$

4.3 Espace des fonctions centrales [PEY] p.213 → 215

Définition 54 *Une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est dite centrale si elle vérifie*

$$\forall g,h \in G,\ \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note $\mathbb{C}[G]^G$ l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}[G]$.

Proposition 55 *En notant $\{C_1, ..., C_q\}$ les différentes classes de conjugaison de G, les fonctions $f_{C_1}, ..., f_{C_q}$ définies par*

$$\forall g \in G, \quad f_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & \textit{si } g \in C_i \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]^G$.
En particulier, $\dim(\mathbb{C}[G]^G) = q$ (nombre de classes de conjugaisons de G)

Théorème 56 $(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}} = (\chi_i)_{i=1}^p$ *forme une base orthonormale de l'espace $\mathbb{C}[G]^G$.*

Corollaire 57 *Le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de G.*

Corollaire 58 *G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.*

4.4 Noyau de caractères [PEY] p.230 → 232

Proposition 59 *Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation, de caractère χ_V sur un espace V de dimension d. On note $g \in G$ un élément d'ordre k. Alors :*
(i) $\rho(g)$ est diagonalisable.
(ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \mathrm{dim}V = d$ racines k^{ieme} de l'unité.
(iii) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(1) = d$.
(iv) $K_{\chi_V} := \{g \in G \mid \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G. On le nomme le noyau de la représentation.

Proposition 60 *Soient G un groupe fini, et $\widehat{G} = \{\rho_1, ..., \rho_r\}$ son dual, formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes. Les sous-groupes dinstingués d'un groupe fini G sont exactement du type*

$$\bigcap_{i \in I} \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \textit{ où } I \subset \{1, ..., r\}$$

Corollaire 61 *G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$, pour tout $g \in G \backslash \{e\}$, $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.*

Questions

Exercice : A tout sous-groupe H d'un groupe G, on peut associer deux relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$, définies dans G par :

$$x\mathcal{R}_H y \iff xy^{-1} \in H \quad \text{et} \quad x\,{}_H\mathcal{R} y \iff x^{-1}y \in H$$

Les ensembles quotients $\frac{G}{\mathcal{R}_H}$ et $\frac{G}{{}_H\mathcal{R}}$ sont respectivement notés $\left(\frac{G}{H}\right)_d$ et $\left(\frac{G}{H}\right)_g$.
1) Montrer que les relations $\mathcal{R}_H$ et ${}_H\mathcal{R}$ sont des relations d'équivalence.
2) Montrer que

$$\begin{aligned} y \equiv x \pmod{\mathcal{R}_H} \quad &\iff \quad y \in Hx, \quad \text{où } Hx := \{hx \ ; \ h \in H\} \\ y \equiv x \pmod{{}_H\mathcal{R}} \quad &\iff \quad y \in xH, \quad \text{où } xH := \{xh \ ; \ h \in H\} \end{aligned}$$

3) Pour tout sous-groupe H d'un groupe G, les ensembles $\left(\frac{G}{H}\right)_d$ et $\left(\frac{G}{H}\right)_g$ sont équipotents.

Solution : 1) Faisons la démonstration pour la relation $\mathcal{R}_H$.
$\rightarrow$ *Réflexivité* : Pour tout $x \in G$, $xx^{-1} = e \in H$, donc $x\mathcal{R}_H x$.
$\rightarrow$ *Symétrie* : Pour tout $x, y \in H$, alors $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1} \in H$, donc $x\mathcal{R}_H y \Rightarrow y\mathcal{R}_H x$.
$\rightarrow$ *Transitivité* : Pour tout $x, y, z \in H$, alors $xy^{-1} \in H$ et $yz^{-1} \in H$, alors on a $xy^{-1}yz^{-1} = xz^{-1} \in H$. Par suite,

$$x\mathcal{R}_H y \ \text{ et } \ y\mathcal{R}_H z \quad \Rightarrow \quad x\mathcal{R}_H z$$

2) Faisons encore la démonstration pour la relation $\mathcal{R}_H$.

$$y \equiv x \pmod{\mathcal{R}_H} \iff yx^{-1} \in H \iff \exists h \in H,\ y = hx \iff y \in Hx$$

3) Considérons l'application

$$\begin{aligned} \theta : \left(\frac{G}{H}\right)_d &\rightarrow \left(\frac{G}{H}\right)_g \\ Hx &\mapsto x^{-1}H \end{aligned}$$

$\rightarrow$ Montrons que cette application est bien définie (*i.e.*) $Hx = Hy \Rightarrow x^{-1}H = y^{-1}H$. Or

$$Hx = Hy \iff xy^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \in x^{-1}H \Rightarrow y^{-1}H = x^{-1}H$$

$\rightarrow$ θ est injective. En effet,

$$\theta(Hx) = \theta(Hy) \Rightarrow x^{-1}H = y^{-1}H \Rightarrow xy^{-1} \in H \iff Hx = Hy$$

$\rightarrow$ θ est surjective. En effet, tout élément xH de $\left(\frac{G}{H}\right)_g$ peut s'écrire $xH = \theta(Hx^{-1})$.

Donc θ est une bijection. D'où le résultat.

Exercice : Théorèmes d'isomorphismes
1) 1^{er} *théorème d'isomorphisme :* Soient G un groupe, $H \lhd G$ et $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ la projection canonique. Montrer que, quelque soient le groupe G' et le morphisme $f : G \rightarrow G'$ tel que $H \subseteq \mathrm{Ker} f$, il existe un unique morphisme $\varphi : \frac{G}{H} \rightarrow G'$ tel que $\varphi \circ \pi = f$.
2) 2^{eme} *théorème d'isomorphisme :* Soient G un groupe, $H \lhd G$. Montrer que pour tout sous-groupe K de G, les groupes quotients $\frac{K}{H \cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent et on a

$$\frac{K}{H \cap K} \overset{\sim}{\rightarrow} \frac{HK}{H}$$

3) 3^{eme} *théorème d'isomorphisme :* Soient H et K deux sous-groupes distingués d'un groupe G tels que $H \subseteq K$. Montrer que l'on a

$$\frac{G}{K} \overset{\sim}{\rightarrow} \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}$$

Solution : 1) Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & \frac{G}{H} \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & \mathrm{Im}f \subseteq G' & \end{tikzcd}$$

où φ est l'application que l'on définit comme suit

$$\begin{aligned} \varphi : \frac{G}{H} &\to G' \\ \overline{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Etape 1 - Montrons que φ est bien définie et que c'est un morphisme :

Soit $\overline{x}, \overline{x'} \in G/H$ tel que $\overline{x} = \overline{x'}$. Par définition, on a

$$\overline{x} = \overline{x'} \text{ dans } \frac{G}{H} \quad \Leftrightarrow \quad xx'^{-1} \in H$$

et comme $H \subseteq \mathrm{Ker}f$, on a donc

$$f(xx'^{-1}) = e'$$

où e' est l'élément neutre de G'. Mais alors,

$$e' = f(xx'^{-1}) = f(x)f(x')^{-1}) \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(x')$$

Donc φ est bien définie.

De plus, φ est un morphisme. En effet, pour tous $\overline{x}, \overline{y} \in G/H$, on a

$$\varphi(\overline{x}\ \overline{y}) = \varphi(\overline{xy}) = f(xy) \underset{\text{f morph.}}{=} f(x)f(x) = \varphi(\overline{x})\varphi(\overline{y})$$

Etape 2 - Montrons que le diagramme commute et que φ est unique :

Comme $\pi(x) = \overline{x}$ pour tout $x \in G$, on a bien $\varphi \circ \pi = f$ (*i.e.*) que le diagramme commute.

Supposons, pour finir, qu'il existe un morphisme $\varphi' : \frac{G}{H} \to G'$ tel que $\varphi' \circ \pi = f$. Alors, pour tout $\overline{x} \in G/H$, on a

$$\varphi'(\overline{x}) = \varphi' \circ \pi(x) = f(x)$$

Ainsi, $\varphi(\overline{x}) = \varphi'(\overline{x})$, et donc $\varphi' = \varphi$.

2) *Etape 1 - Montrons d'abord le petit lemme suivant :*

Lemme : Soient deux groupes G et G'. Etant donné $H \lhd G$, $H' \lhd G'$ et $f \in \mathrm{Hom}(G, G')$ tel que $f(H) \subseteq H'$, il existe un unique morphisme $\overline{f} \in \mathrm{Hom}\left(\frac{G}{H}, \frac{G'}{H'}\right)$ tel que

$$\overline{f} \circ \pi = \pi' \circ f \qquad \text{où } \pi : G \to \frac{G}{H} \text{ et } \pi' : G' \to \frac{G'}{H'}$$

Démonstration :
On va tenter de se ramener au premier théorème d'isomorphisme. Remarquons que

$$f(H) \subseteq H' \quad \Leftrightarrow \quad H \subseteq f^{-1}(H')$$

De plus, e' étant l'élément neutre de G', on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}(\pi' \circ f) &= \{x \in G \mid \pi'(e')\}\\ &= \{x \in G \mid f(x) \in H'\}\\ &= f^{-1}(H')\end{aligned}$$

Ainsi, on a donc $H \subseteq \mathrm{Ker}(\pi' \circ f)$. Ce qui implique, d'après le premier théorème d'isomorphisme, qu'il existe unique morphisme $\overline{f} \in \mathrm{Hom}\left(\frac{G}{H}, \frac{G'}{H'}\right)$ tel que

$$\overline{f} \circ \pi = \pi' \circ f \quad \text{ où } \pi : G \to \frac{G}{H} \text{ et } \pi' : G' \to \frac{G'}{H'}$$

D'où le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G' \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{G}{H} \arrow[r, "\exists!\overline{f}"] & \frac{G'}{H'} \end{tikzcd}$$

□

Etape 2 - Montrons que les groupes quotients $\frac{K}{H\cap K}$ et $\frac{HK}{H}$ existent :

Puisque $H \lhd G$, on a $H \cap K \lhd K$. Donc $\frac{K}{H\cap K}$ existe bien.
Montrons maintenant que HK est un sous-groupe de G. On aura besoin du lemme suivant :

Lemme : Soient H et K deux sous-groupes d'un groupe G. Alors :
(i) KH est un sous-groupe de G si et seulement si $HK = KH$.
(ii) Si $H \lhd G$, alors HK est un sous-groupe de G et $H \lhd HK$.

Démonstration :
(i) $\underline{\Rightarrow :}$ Supposons $HK \leq G$. Soit $x \in H$ et $y \in K$, on a donc

$$yx = (x^{-1}y^{-1})^{-1}$$

D'où yx est l'inverse d'un élément du sous-groupe HK, et ainsi $yx \in HK$ et donc $KH \subseteq HK$.
Soit maintenant $z \in HK$, alors $z^{-1} \in HK$, et donc il existe $x' \in H$ et $y' \in K$ tels que $z^{-1} = x'y'$. Par suite, $z = y'^{-1}x'^{-1} \in KH$, d'où $HK \subseteq KH$.
Par conséquent, HK est un sous-groupe de G implique $HK = KH$.

$\underline{\Leftarrow :}$ Supposons donc que $HK = KH$. Comme $e \in HK$, alors $HK \neq \varnothing$. Soient $x, x_1 \in H$ et $y, y_1 \in K$. Alors

$$(xy)(x_1y_1)^{-1} = x(\underbrace{yy_1^{-1}}_{\in K}\underbrace{x_1^{-1}}_{\in H})$$

Comme $HK = KH$, il existe $x_2 \in H$ et $y_2 \in K$ tels que

$$yy_1^{-1}x_1^{-1} = x_2y_2$$

Par conséquent, on a donc

$$(xy)(x_1y_1)^{-1} = xx_2y_2 \in HK$$

Donc HK est un sous-groupe de G.

(ii) Montrons que $H \lhd G$ implique $HK = KH$ ce qui prouvera le résultat.
Soit $h \in H$ et $k \in K$. Alors

$$H \lhd G \quad \Rightarrow \quad k^{-1}hk \in H$$

donc il existe $h' \in H$ tel que $k^{-1}hk = h'$ $(i.e.)$ $hk = kh'$, d'où $HK \subseteq KH$. On procède de même pour avoir $KH \subseteq HK$.
Ainsi, HK est un sous-groupe de G et comme $H \lhd G$, on a bien $H \lhd HK$

$\square$

Par conséquent, $\frac{HK}{H}$ existe bien.

<u>*Etape 3 - On termine ... :*</u>

Notons l'injection canonique $j : K \to HK$, et les projections canoniques $\pi : K \to \frac{K}{H\cap K}$ et $\pi' : HK \to \frac{HK}{H}$. On a

$$j(H\cap K) = H\cap K \quad\Rightarrow\quad j(H\cap K) \subseteq H$$

Notre petit lemme implique l'existence d'un unique morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}\left(\frac{K}{H\cap K}, \frac{HK}{H}\right)$ tel que $\varphi\circ\pi = \pi'\circ j$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & HK \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{K}{H\cap K} \arrow[r, "\exists!\varphi"] & \frac{HK}{H} \end{tikzcd}$$

Par ailleurs, $\pi'\circ j$ est surjectif. En effet,

$$\pi'\circ j(K) = \pi'(K) = \frac{HK}{H}$$

Par suite, φ est surjectif.
D'autre part, $j^{-1}(H) = H\cap K$, puisque $j(x) = x$ pour tout $x \in K$. Donc j est injectif et par conséquent, φ est un isomorphisme.

3) Notons les projections canoniques $\sigma : G \to \frac{G}{H}$, $\pi : G \to \frac{G}{K}$, et $\pi : \frac{G}{H} \to \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}$. Alors on a

$$H \subseteq K \;\Rightarrow\; \sigma(K) = \frac{K}{H} \text{ est un sous-groupe de } \frac{G}{H}$$

Toujours, d'après notre petit lemme, il existe un unique morphisme $\overline{\sigma} \in \mathrm{Hom}\left(\frac{G}{K}, \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}}\right)$ tel que $\overline{\sigma}\circ\pi = \pi'\circ\sigma$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \frac{G}{H} \arrow[d, "\pi'"] \\ \frac{G}{K} \arrow[r, "\exists!\overline{\sigma}"] & \frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \end{tikzcd}$$

π' et σ étant surjectifs, on a que $\pi'\circ\sigma$ est surjectif, donc $\overline{\sigma}$ est surjectif.
Comme $\mathrm{Ker}(\pi'\circ\sigma) = K$, donc $\overline{\sigma}$ est injectif. Par conséquent, $\overline{\sigma}$ est un isomorphisme.