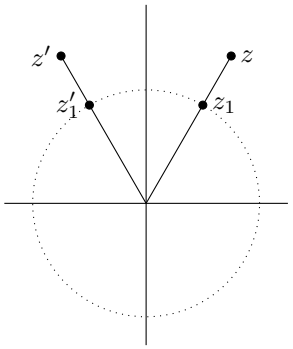
Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

Mohamed NASSIRI

Les nombres complexes sont un outil puissant en géométrie et en algèbre. De plus, l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{C}$, est entièrement déterminée à partir de l'ensemble des nombres complexes de module 1, $\mathbb{U}$.

Illustrons ceci rapidement sur un exemple. Pour étudier la rotation qui à z associe z' comme sur la figure ci-contre, on applique une homothétie de rapport $\frac{1}{|z|}$ au point d'affixe z. On obtient donc un point d'affixe z_1 qui appartient donc au cercle unité. On applique ensuite la rotation au point d'affixe z_1, on obtient un point d'affixe z_1' qui appartient encore au cercle unité. Enfin, à ce dernier point, on lui applique l'homothétie de rapport $|z|$ et on obtient le point d'affixe z'.



La fonction exponentielle joue un rôle important. C'est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, .)$. On peut également définir π comme le nombre qui vérifie $e^{i\pi}+1 = 0$. La fonction exponentielle nous permet surtout d'avoir une notation plus compacte et très maniable des nombres complexes : le nombre complexe non nul z, de module ρ et d'argument θ, s'écrit alors $\rho e^{i\theta}$. C'est l'écriture dite exponentielle de z.

Une des applications importantes des nombres complexes de module 1 sont les polynômes cyclotomiques. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère l'ensemble $\mathbb{U}_m = \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\}$ des racines m-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, et on appelle racine primitive m-ièmes de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_m$. On note $\mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ l'ensemble des racines primitives m-ièmes de l'unité. On appelle m-ième polynôme cyclotomique le polynôme

$$\Phi_{m,\mathbb{Q}}(X) = \prod_{\xi \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})} (X - \xi)$$

Les polynômes cyclotomiques ont des applications variées : théorème de Wedderburn, théorème de Dirichlet (version faible), etc.

On a une interprétation géométrique sympathique des racines n-ièmes de l'unité : l'ensemble des points ayant pour affixe les racines n-ièmes de l'unité est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier de centre O et inclus dans le cercle trigonométrique. De plus, avec la notion de *racines primitives*, on a l'interprétation suivante :

Théorème
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et ξ une racine primitive n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Alors les (autres) racines primitives m-ièmes de l'unité sont les ξ^k, où $1 \leq k \leq n$ $\text{pgcd}(k, n) = 1$.
En particulier, si n est premier, toutes les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ sont primitives.

Interprétation géométrique
Les polygones réguliers étoilés à n sommets d'un seul tenant s'obtiennent en joignant de k en k, avec $\text{pgcd}(k, n) = 1$, les sommets d'un polygone régulier à n sommets.
En particulier, si n est premier, tous les polygones réguliers étoilés à n sommets sont d'un seul tenant.

Les représentions linéaires de groupes offrent également aux nombres complexes de module 1 une place importante. En effet, en considérant un groupe fini G d'ordre n et une représentation linéaire de G dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie V $\rho : G \to \text{GL}(V)$, alors on en déduit que

$$\forall g \in G,\ g^n = e \Rightarrow \rho(g)^n = \rho(g^n) = \rho(e) = Id_V$$

Ce qui se traduit par le fait que pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont de module 1. Une des applications intéressantes est la caractérisations des sous-groupes distingués de G et des noyaux de caractères irréductibles de G. Cette caractérisation permet de lire très rapidement les sous-groupes distigués d'un groupe sur sa table de caractères.

En algèbre linéaire, on peut montrer que le déterminant de la matrice, de taille $n \times n$, dite circulante fait apparaître les racines n-ième de l'unité. Une application géométrique amusante est le résultat suivant : Soit $Z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe. En notant, $Z_k = (z_{k,1}, ..., z_{k,n})$, on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \quad \text{et} \quad Z_{k+1} = (\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, ..., \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2})$$

Alors la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes $z_1, ..., z_n$.

Ce théorème a une interprétation géométrique très intéressante ! En partant d'un polygone à n côtés, le polygone des milieux "converge" vers l'isobarycentre du polygone de départ. Attention cependant à l'emploi du mot "convergence" ... Même si, intuitivement, on comprend ce que ça veut dire, ce n'est pas mathématique correcte s'il n'y a pas de définition d'une topologie sur l'ensemble des polygones qui permettrait à une suite de polygones de tendre vers un point.

Le plus intriguant est que cette affirmation reste encore vraie si le polygone est non convexe (on dit aussi *polygone concave*). En effet, dans la démonstration, la suite de points est quelconque !

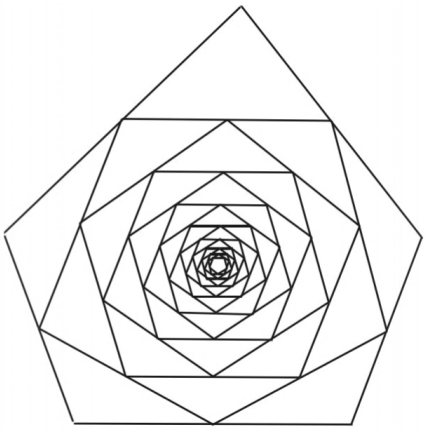


Illustration de la "convergence" des polygones

On sait que $\mathbb{C}$ est algébriquement clos d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, donc il est inutile de vouloir chercher un sur-corps de $\mathbb{C}$. Cepedant, si l'on sacrifie la commutativité, on peut créer un sur-corps de $\mathbb{C}$: le corps des quaternions $\mathbb{H}$. Le lien entre quaternions et transformations géométriques est donné par l'isomorphisme :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

où G est le groupe des quartenions de norme 1. Ce qui permet de faire explicitement le lien entre les quaternions et les rotations dans l'espace sont les *formules de rotation d'Olinde Rodrigues.*

Références

[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin ♠
[GOZ] Théorie de Galois, Ivan Gozard
[PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré ♠
[BIA] Mathématiques pour le CAPES et l'Agrégation Interne, Jean de Biasi
[ML3an] Mathématiques L3 Analyse, Jean-Pierre Marco

Développements

$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions
Théorème de Wedderburn
Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et les isométries du tétraèdre
Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

1 Groupes des nombres complexes de module 1 [BIA] p.74 → 76

1.1 Définitions et premières propriétés

Théorème 1 *L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif* $\mathbb{U}$*, sous-groupe multiplicatif de* $(\mathbb{C}^*, .)$*. C'est le noyau du morphisme*

$$(\mathbb{C}^*, .) \to (\mathbb{R}_+^*, .)$$
$$z \mapsto |z|$$

Proposition-Définition 2 *Soit* $z = x + iy$ *l'affixe d'un point* M *du plan. Alors* $\frac{z}{|z|}$ *est l'affixe d'un*

point m qui appartient au cercle trigonométrique. Si $\theta = (\overline{u}, \overline{Om})$ $(mod\ 2\pi)$, alors on a

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$$

avec $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *et* $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
θ est appelé argument de z et est noté $\arg z = \theta$.
La valeur de $\theta \in]-\pi, \pi[$ est appelé argument principal de z et est noté $\mathrm{Arg} z = \theta$.
$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ *est appelé forme trigonométrique de z.*

Proposition 3 *(i)* $\arg(-z) = \pi + \arg z$ $(mod\ 2\pi)$
(ii) $\arg(\overline{z}) = -\arg z$ $(mod\ 2\pi)$
(iii) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_2) + \arg(z_2)$ $(mod\ 2\pi)$

Proposition 4 *Formule de Moivre*
$\forall n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Proposition-Définition 5 *On pose* $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. *Alors, on a*
(i) Formules d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

(ii) Formule de Moivre exponentielle

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

(iii) Pour la beauté

$$e^{i\pi} = -1$$

Le nombre complexe non nul z, de module ρ et d'argument θ, s'écrit alors $\rho e^{i\theta}$. C'est l'écriture exponentielle de z.

1.2 Autour de l'exponentielle complexe [ML3an] p.404 → 406

Proposition-Définition 6 *La fonction exponentielle complexe coïncide pour $z \in \mathbb{C}$ avec la série convergente*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition 7 *(i) La fonction exponentielle complexe est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, .)$.*
(ii) La fonction exp *est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et égale à sa fonction dérivée.*
(iii) La fonction exp *est surjective sur $\mathbb{C}^*$.*

Proposition 8 *(i) La restriction* $\exp_{|\mathbb{R}}$ *est une bijection dérivable strictement croissante et convexe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
(ii) De plus, on a

$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$$

Proposition 9 *La fonction*

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \exp(ix)$$

est périodique, à valeurs dans le cercle unité, et elle est surjective. Sa période est notée 2π.
La fonction exponentielle est donc $2i\pi$-périodique.

2 Racines de l'unité et cyclotomie

2.1 Racines de l'unité et cyclotomie [GOZ] p.67 → 69

Proposition-Définition 10 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathbb{U}_m = \{z \in \mathbb{C} \mid z^m = 1\}$ des racines m-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.*
$\mathbb{U}_m$ est un groupe cyclique d'ordre m.
On appelle racine primitive m-ièmes de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_m$. On notera $\mathcal{P}_m(\mathbb{C})$ l'ensemble des racines primitives m-ièmes de l'unité.

Proposition 11 *$\mathcal{P}_m(\mathbb{C}) = \{\exp(2ik\pi/m),\ 1 \le k \le m,\ pgcd(k,m) = 1\}$ a pour cardinal $\varphi(m)$.*

Proposition 12 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et ξ une racine primitive m-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Alors les (autres) racines primitives m-ièmes de l'unité sont les ξ^k, où $1 \le k \le m$, $pgcd(k,m) = 1$.*

Définition 13 *Le sous-corps $\mathbb{Q}(\mathbb{U}_m)$ de $\mathbb{C}$ engendré par les racines m-ièmes de l'unité, qui est $\mathbb{Q}(\xi)$ où ξ une racine primitive m-ièmes de l'unité quelconque, est appelé corps cyclotomique d'indice m.*

Définition 14 *Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On appelle m-ième polynôme cyclotomique le polynôme*

$$\Phi_{m,\mathbb{Q}}(X) = \prod_{\xi \in \mathcal{P}_m(\mathbb{C})} (X - \xi)$$

$\Phi_{m,\mathbb{Q}}(X)$ est un polynôme unitaire de degré $\varphi(m)$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.

Proposition 15 *(i)*

$$X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_{d,\mathbb{Q}}(X)$$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Z}[X]$
(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X)$ *est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$*

Application 16 ♠ *Théorème de Wedderburn* ♠
Tout corps fini est commutatif. **[PER] p.82**

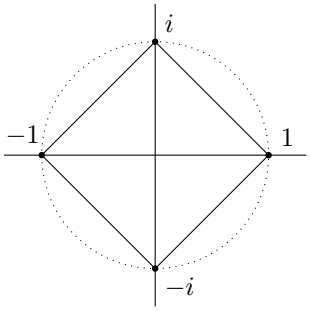
Corollaire 17 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ de toute racine primitive n-ième de l'unité est $\Phi_{n,\mathbb{Q}}(X)$. Donc $[\mathbb{Q}(\mathbb{U}_m) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)$*

2.2 Racines n-ième de l'unité et polygones réguliers [BIA] p.79-80

Définition 18 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note l'ensemble $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$.*
On appelle racine primitive n-ièmes de l'unité tout générateur de $\mathbb{U}_n$.
On note $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des racines primitives n-ièmes de l'unité et $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des points ayant pour affixe les racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 19 *$\mathcal{P}_n$ est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier de centre O et inclus dans le cercle trigonométrique.*

Exemple 20 $\mathcal{U}_n(\mathbb{C}) = \{1, -1, i, -i\}$.



Proposition 21 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et ξ une racine primitive n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$. Alors les (autres) racines primitives m-ièmes de l'unité sont les ξ^k, où $1 \leq k \leq n$ $\text{pgcd}(k, n) = 1$.*
En particulier, si n est premier, toutes les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ sont primitives.

Remarque 22 *Interprétation géométrique*
Les polygones réguliers étoilés à n sommets d'un seul tenant s'obtiennent en joignant de k en k, avec $\text{pgcd}(k, n) = 1$, les sommets d'un polygone régulier à n sommets.
En particulier, si n est premier, tous les polygones réguliers étoilés à n sommets sont d'un seul tenant.
Voir Figure 1, Figure 2 *et* Figure 3.

3 Représentations linéaires de groupes

3.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194 → 205

Définition 23 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to \text{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :*

$$\begin{aligned} G \times V &\to V \\ (g, v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Une représentation ρ est dite fidèle si G agit fidèlement sur V.

Exemple 24 *Fort de l'isomorphisme $Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$, on peut établir une représentation du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ comme un groupe de transformations orthogonales.*

Définition 25 • *Soient ρ et ρ' deux représentations d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V'. Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire $\tau : V \to V'$ tel que pour tout $g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ {\scriptstyle \rho(g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho'(g)} \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array}$$

• *Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' sont dites isomorphes si τ est bijective.*

Définition 26 • *Si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in \text{GL}(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous-représentation.*
• *Une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.*

Proposition 27 *Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.*

Proposition 28 *Lemme de Schur :*
Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles d'un groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' et $f \in \mathcal{L}(V, V')$ un opérateur d'entrelacement. Alors
(i) si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $f = 0$.
(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme.
Si on suppose $V = V'$, alors f est une homothétie.

3.2 Caractères [PEY] p.207 → 226

Définition 29 *Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n.*
On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace.
C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (i.e.) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$.

Proposition 30 *Soient χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles. Alors*
(i) χ_ρ est le caractère d'une représentation irréductible si et seulement si

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} = 1$$

(ii) Si χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$

Proposition 31 *En notant $(\chi_i)_{i=1}^p$ les caractères irréductibles de G et $(C_i)_{i=1}^p$ les classes de conjugaison de G, on a :*
(i) Formule de Burnside : $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$
(ii) Orthogonalité des caractères :
$\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k)\overline{\chi_i(C_l)} = 0$ pour $k \neq l$.

Définition 32 *Une table des caractères est un tableau constitué des éléments de la matrice $(\chi_i(C_j))_{1\leq i,j\leq p}$.*

	1 *1*	$\lvert C_1\rvert$ C_1	... ...	$\lvert C_p\rvert$ C_p
$\chi_1 = \mathbb{1}$	*1*	*1*	...	*1*
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	...	$\chi_2(C_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(C_2)$	...	$\chi_p(C_p)$

3.3 Noyau de caractères [PEY] p.230 → 232

Proposition 33 *Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation, de caractère χ_V sur un espace V de dimension d. On note $g \in G$ un élément d'ordre k. Alors :*
(i) $\rho(g)$ est diagonalisable.
(ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines k^{ieme} de l'unité.
(iii) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(1) = d$.
(iv) $K_{\chi_V} := \{g \in G \mid \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G. On le nomme le noyau de la représentation.

Proposition 34 ♠ *Noyaux de caractères et sous-groupes distingués* ♠
Soient G un groupe fini, et $\widehat{G} = \{\rho_1, ..., \rho_r\}$ son dual, formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes. Les sous-groupes dinstingués d'un groupe fini G sont exactement du type

$$\bigcap_{i\in I}\{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \text{ où } I \subset \{1, ..., r\}$$

Corollaire 35 ♠ *G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$, pour tout $g \in G\backslash\{e\}$, $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.*

4 Application à l'algèbre linéaire

Proposition 36 *Déterminant circulant :*
Soit $(a_i)_{i=1...n} \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & x_1 \end{vmatrix} = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

où $P = \sum_{k=1}^n a_k X^{k-1}$ et ω une racine primitive n-ième de l'unité. **[GOUal] p.180**

Application 37 ♠ *Suite de polygones* ♠
Soit $Z = (z_1, ..., z_n) \in \mathbb{C}^n$ une suite d'affixes du plan complexe.
En notant, $Z_k = (z_{k,1}, ..., z_{k,n})$, on définit par récurrence

$$Z_0 = Z \text{ et}$$

$$Z_{k+1} = (\frac{z_{k,1} + z_{k,2}}{2}, ..., \frac{z_{k,n-1} + z_{k,n}}{2}, \frac{z_{k,n} + z_{k,1}}{2})$$

Alors la suite $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre des affixes $z_1, ..., z_n$.

5 Quaternions [PER] p.160 → 164

Proposition-Définition 38 *Il existe une algèbre $\mathbb{H}$ de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, appelé algèbre des quaternions, muni d'une base 1,i,j,k telle que :*
(i) 1 est élément neutre pour la multiplication,
(ii) on a les formules +ùùù

$$jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j, \quad ij = -ji = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

Un quaternions s'écrit alors

$$q = a + bi + cj + dk, \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Définition 39 *$\mathbb{H}$ est muni de la norme algébrique N suivante : $\forall\ q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$*

$$N(q) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Proposition 40 *Le groupe G des quaternions de norme 1 est le groupe*

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

Ce groupe est d'ordre 8 et non abélien.

Théorème 41 ♠ *$SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions* ♠
Soit G le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

Illustrations

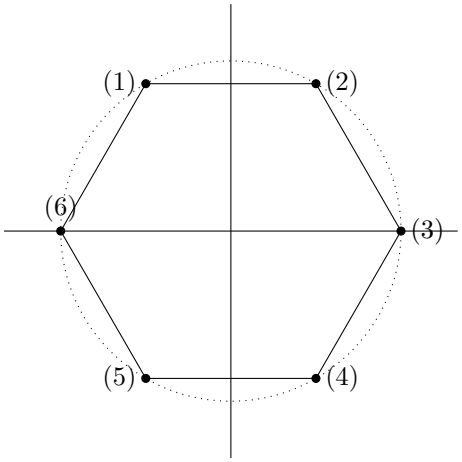


Figure 1 : Polygone régulier étoilé d'un seul tenant avec $n = 6$ et $k = 5$.

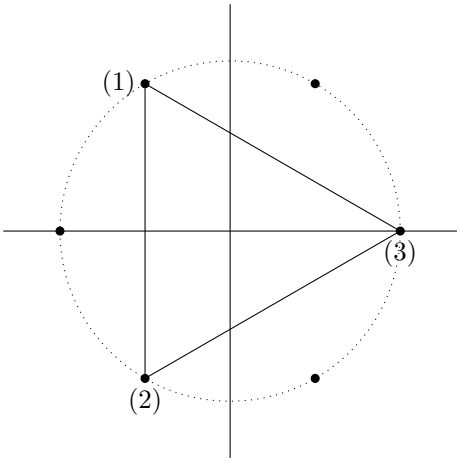


Figure 2 : Echec du polygone régulier étoilé d'un seul tenant avec $n = 6$ et $k = 2$.

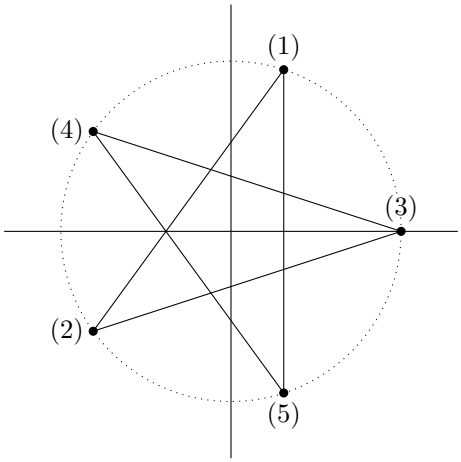


Figure 3 : Polygone régulier étoilé d'un seul tenant avec $n = 5$ et $k = 2$.

Questions

Exercice : Groupes de Prüfer
Soit p un nombre premier. On rappelle que l'on note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité (dans le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$). On appelle $p-$groupe de Prüfer l'ensemble

$$\mathbb{U}_{p^\infty} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbb{U}_{p^k}$$

1) Montrer que c'est un groupe et que les $\mathbb{U}_{p^k}$ forment une suite croissante de sous-groupes.
2) Soit H un sous-groupe strict de $\mathbb{U}_{p^\infty}$. Montrer que l'ensemble des ordres des éléments de H est fini. En déduire que H est l'un des $\mathbb{U}_{p^n}$.
3) Montrer que le quotient de $\mathbb{U}_{p^\infty}$ par $\mathbb{U}_{p^k}$ est isomorphe à $\mathbb{U}_{p^\infty}$.

Solution : 1) Soient z et z' deux éléments de $\mathbb{U}_{p^\infty}$. Alors

$$z^{p^n} = z'^{p^{n'}} = 1$$

pour un certain n et un certain n' et donc

$$(zz')^{p^{\sup(n,n')}} = 1$$

De plus, comme $z^{p^{n+1}} = 1$, on a donc

$$\mathbb{U}_{p^n} < \mathbb{U}_{p^{n+1}}$$

A titre d'illustration, on peut donner les premiers éléments de $\mathbb{U}_{2^\infty}$:

$$\mathbb{U}_{p^\infty} = \{1, -1, i, -i, e^{i\pi/4}, e^{3i\pi/4}, e^{-i\pi/4}, e^{-3i\pi/4}, ...\}$$

De plus, $\mathbb{U}_{p^\infty}$ est un sous-groupe multiplicatif du groupe des nombres complexes de module 1.

2) On rappelle qu'un élément d'ordre p^k est une racine primitive p^k-ième de l'unité et donc engendre $\mathbb{U}_{p^k}$.
Raisonnons par l'absurde. Si la suite des ordres des éléments de H était infinie, alors pour tout $z \in \mathbb{U}_{p^\infty}$ d'ordre p^k, il existerait un élément $h \in H$ d'ordre supérieur $p^{k'}$ et H contiendrait $\mathbb{U}_{p^{k'}}$ et donc z. Par suite, $\mathbb{U}_{p^\infty}$ serait inclus dans H, donc égal à H.
Soit maintenant, un élément de H d'ordre maximum p^{k_0}, alors H est égal à $\mathbb{U}_{p^{k_0}}$ par le même argument.

3) Considérons l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{U}_{p^\infty} &\to \mathbb{U}_{p^\infty} \\ z &\mapsto z^{p^n} \end{aligned}$$

Manifestement, φ est un morphisme de groupe. Son noyau est $\mathbb{U}_{p^n}$ et elle est surjective. En effet, tout élément de $\mathbb{U}_{p^\infty}$ est de la forme $e^{2li\pi/p^k}$ et est l'image de $e^{2li\pi/p^{k+n}}$. Donc par le premier théorème d'isomorphisme, on a

$$\mathbb{U}_{p^\infty}/\mathbb{U}_{p^n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{U}_{p^\infty}$$

Exercice : Calculer l'expression

$$A = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad ; \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Solution : D'après la formule d'Euler, on a

$$\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{e^{ik\pi/n} - e^{-ik\pi/n}}{2i} = e^{-ik\pi/n}\frac{e^{2ik\pi/n} - 1}{2i}$$

Ainsi, on a donc

$$A = \underbrace{\frac{e^{-i\pi/n}e^{-2i\pi/n}...e^{-i(n-1)\pi/n}}{2^{n-1}i^{n-1}}}_{:=B}\underbrace{(e^{-2i\pi/n} - 1)(e^{-4i\pi/n} - 1)...(e^{-2(n-1)i\pi/n} - 1)}_{:=C}$$

D'une part, le calcul de B donne

$$\begin{aligned} B = \frac{e^{-i\pi/n}e^{-2i\pi/n}...e^{-i(n-1)\pi/n}}{2^{n-1}i^{n-1}} = \frac{e^{-i\pi/n[1+2+...+n-1]}}{2^{n-1}i^{n-1}} &= \frac{e^{-\frac{i\pi}{n}\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{n-1}i^{n-1}} \\ &= \frac{e^{-i\pi\frac{(n-1)}{2}}}{2^{n-1}i^{n-1}} \\ &= \frac{(e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-1}}{2^{n-1}i^{n-1}} \\ &= \frac{(-i)^{n-1}}{2^{n-1}i^{n-1}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

D'autre part, pour le calcul de C, on aura besoin des racines $n-$ièmes de l'unité ! En effet,

$$C = (e^{-2i\pi/n} - 1)(e^{-4i\pi/n} - 1)...(e^{-2(n-1)i\pi/n} - 1)$$

On voit apparaître les racines $n-$ièmes de l'unité sauf 1.
Considérons le polynôme $Q(X) = X^n - 1$ dont les racines sont les racines $n-$ièmes de l'unité (avec 1) et le polynôme

$$P(X) = \frac{Q(X)}{X - 1} = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$$

dont les racines sont les racines $n-$ièmes de l'unité sauf 1. Par conséquent,

$$P(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1} = (X - e^{-2i\pi/n})(X - e^{-4i\pi/n})...(X - e^{-2(n-1)i\pi/n})$$

Ainsi, on remarque que

$$C = (-1)^{n-1}P(1) = (-1)^{n-1}n$$

Finalement,

$$A = B.C = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.(-1)^{n-1}n = \frac{n}{2^{n-1}}$$