Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Exemples.

Mohamed NASSIRI

On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie n. Une *représentation linéaire* d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho \ : \ G \to \mathrm{GL}(V)$. Par la suite, on s'intéresse à la *décomposition* des représentations dites *irréductibles* dans le sens suivant : si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée *sous-représentation*. Par la suite, une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.

Parmi les représentations linéaires de groupes, l'exemple fondamentale est la représentation régulière. Plus précisement, la représentation régulière à gauche est la représentation d'un groupe G sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ (espace vectoriel de dimension $|G|$ sur $\mathbb{C}$ dont la base est indexée par G et de la forme $\{e_g\}_{g\in G}$) définie par le morphisme

$$\forall g \in G, \quad \rho(g) \ : \ \begin{cases} \mathbb{C}[G] & \to \mathbb{C}[G] \\ e_h & \mapsto e_{gh} \end{cases}$$

Cette représentation est importante, car dans sa décomposition, apparaissent toutes les représentations irréductibles d'un groupe G.

A partir d'une représentation ρ d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n, on lui associe son *caractère* χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace. C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (*i.e.*) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$. Dans cet espace, on va poser un produit scalaire : si φ et ψ sont deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$, on pose

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

$\langle .,. \rangle$ est un produit hermitien sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ des fonctions de G sans $\mathbb{C}$. Il se trouve que les caractères des représentations irréductibles d'un groupe G forment une famille orthonormée pour ce produit scalaire. En fait, on a mieux ! Les caractères sont des fonctions dites *centrales* : une fonction $\varphi \ : \ G \to \mathbb{C}$ est dite centrale si elle vérifie

$$\forall g, h \in G, \ \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note $\mathbb{C}[G]^G$ l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}[G]$. Les caractères irréductibles forment une base orthonormée de l'espace des fonctions centrales ! On peut donc en déduire un résultat important de la théorie des représentations : le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de G.

En notant $\{C_1, ..., C_p\}$ les différentes classes de conjugaison de G et en se donnant une famille de représentants $(V_i)_{i=1}^p$ de l'ensemble des représentations irréductibles $\rho_i := \rho_{V_i}$ sur G de caractères χ_i, on appelle *table des caractères* le tableau constitué des éléments de la matrice $(\chi_i(C_j))_{1\le i,j\le p}$.

	1 1	$\lvert C_1\rvert$ C_1	$\dots$ $\dots$	$\lvert C_p\rvert$ C_p
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	$\dots$	1
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	$\dots$	$\chi_2(C_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(C_2)$	$\dots$	$\chi_p(C_p)$

Une table des caractères est importante et permet d'avoir plusieurs informations sur un groupe : notamment les sous-groupes distingués à partir de la notion de *noyau de caractères*, etc. Mais une table de caractère ne détermine pas totalement une groupe. En effet, on peut montrer que le groupe des quaternions de norme 1, $\mathbb{H}_8$, et le groupe diédral D_4 (d'ordre 8) ont la même table des caractères et pourtant ils ne sont pas isomorphes.

Références

[GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon
[PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré
[OTZ] Exercices d'algèbre, Pascal Ortiz
[RAU] Les groupes finis et leurs représentations, Gérard Rauch
[H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni ♠

Développements

Table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et les isométries du tétraèdre
Noyaux de caractères et sous-groupes distingués

1 Représentations linéaires de groupes

1.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194-195

Définition 1 *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Une représentation linéaire d'un groupe G dans V est la donnée d'un morphisme $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$. Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe G sur V :*

$$\begin{aligned} G \times V &\to V \\ (g, v) &\mapsto g.v = \rho(g)(v) \end{aligned}$$

Définition 2 *Une représentation ρ est dite fidèle si ρ est injective. On dit aussi que G agit fidèlement sur V.*

Exemple 3 *Fort de l'isomorphisme $Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$, on peut établir une représentation du groupe $\mathfrak{S}_4$ sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ comme un groupe de transformations orthogonales.*

Définition 4 *On définit $\mathbb{C}[G]$ l'espace vectoriel de dimension $|G|$ sur $\mathbb{C}$ dont la base est indexée par G et de la forme $\{e_g\}_{g\in G}$.*

Remarque 5 *Pour $g \in G$, on note*

$$\delta_g : \begin{cases} G & \to \mathbb{C} \\ h & \mapsto \begin{cases} 1 & si\ h = g \\ 0 & sinon \end{cases} \end{cases}$$

Par suite, pour une fonction $f : G \to \mathbb{C}$, on a

$$f = \sum_{g\in G} f(g)\delta_g$$

Ce qui permet d'identifier $\mathbb{C}[G]$ avec l'espace des fonctions de G sans $\mathbb{C}$.

1.2 Exemples fondamentaux [PEY] p.195 → 198

Exemple 6 *La représentation régulière à gauche est la représentation de G sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ (espace vectoriel de dimension $|G|$ sur $\mathbb{C}$ dont la base est indexée par G et de la forme $\{e_g\}_{g\in G}$) définie par le morphisme*

$$\forall g \in G, \quad \rho(g) : \begin{cases} \mathbb{C}[G] & \to \mathbb{C}[G] \\ e_h & \mapsto e_{gh} \end{cases}$$

Proposition 7 *La représentation régulière est fidèle.*

Définition 8 *Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit une représentation somme $\rho_{V\oplus W}$ par*
$\forall g \in G,\ \forall (v, w) \in V \times W,$

$$\rho_{V\oplus W}(g)((v, w)) := \rho_V(g)(v) + \rho_W(g)(w)$$

Définition 9 *Pour deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on définit une représentation des morphimes $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ sur $\mathcal{L}(V, W)$ par*
$\forall g \in G,\ \forall f \in \mathcal{L}(V, W),$

$$\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)(f) := \rho_W(g) \circ f \circ \rho_V(g^{-1})$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "\rho_{\mathcal{L}(V,W)}(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

Proposition 10 *On définit bien ainsi une proposition.*

Définition 11 *Pour une représentation ρ sur V, on définit une représentation duale ρ^* sur V^* le dual de V par*

$$\forall g \in G,\ \rho^*(g) :=^t \rho(g^{-1})$$

où l'on a noté ${}^t\phi \in \mathcal{L}(V^*)$ l'opérateur transposé de $\phi \in \mathcal{L}(V)$.

Définition 12 *On définit l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ par*

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] &\to \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \\ (\sigma, P(X_1, ..., X_n)) &\mapsto \sigma.P(X_1, ..., X_n) \\ &= P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

[GOUal] p.78

1.3 Représentations irréductibles [PEY] p.198 → 201

Définition 13 • *Soient ρ et ρ' deux représentations d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V'. Un opérateur d'entrelacement est une application linéaire $\tau : V \to V'$ tel que pour tout $g \in G$, $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\rho(g)"'] & V' \arrow[d, "\rho'(g)"] \\ V \arrow[r, "\tau"] & V' \end{tikzcd}$$

• *On note* $\mathrm{Hom}_G(V,V')$ *l'ensemble des opérateurs d'entrelacements.*
• *Deux représentations ρ et ρ' d'un même groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' sont dites isomorphes (ou G-isomorphes) si τ est bijective.*

Définition 14 *Si une représentation ρ de G sur V admet un sous-espace vectoriel $W \subset V$ stable pour tous les $\rho(g) \in \mathrm{GL}(V)$, elle induit une représentation ρ_W sur W appelée sous-représentation.*

Définition 15 *Une représentation sur un espace V est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations : $\{0\}$ et V tout entier.*

Définition-Proposition 16 *Soit ρ une représentation de G sur V. Alors ρ laisse invariant le produit hermitien suivant :*

$$\langle x, y\rangle_G := \sum_{g\in G} \langle \rho(g)(x), \rho(g)(y)\rangle$$

où $\langle ., .\rangle$ est un produit hermitien quelconque sur V. On dit alors que ρ est une représentation unitaire.

Théorème 17 *Théorème de Maschke*
Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

1.4 Invariance et représentations [PEY] p.203 → 205

Définition 18 *Soit ρ une représentation sur V. On note*

$$V^G = \{v \in V \mid \forall g \in G,\ \rho(g)(v) = g.v = v\}$$

C'est une sous-représentation de V.

Exemple 19 *En considérant l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$, on dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ est symétrique si $P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]^{\mathfrak{S}_n}$ (i.e.) si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a*

$$P(X_{\sigma(1)}, ..., X_{\sigma(n)}) = P(X_1, ..., X_n)$$

[GOUal] p.78

Exemple 20 *Dans le cas de la représentation des morphimes $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ sur $\mathcal{L}(V,W)$ de deux représentations ρ_V et ρ_W respectivement sur V et W, on a* $\mathrm{Hom}_G(V,V') = \mathcal{L}(V,W)^G$

Proposition 21 *Lemme de Schur :*
Soient ρ et ρ' deux représentations irréductibles d'un groupe G respectivement sur deux $\mathbb{C}$-espace vectoriel V et V' et $f \in \mathcal{L}(V,V')$ un opérateur d'entrelacement. Alors
(i) si ρ et ρ' ne sont pas isomorphes, $f = 0$.
(ii) Si $f \neq 0$, alors f est un isomorphisme.
Si on suppose $V = V'$, alors f est une homothétie.

Corollaire 22 *On considère toujours deux représentations irréductibles d'un groupe G sur V et V'. On a donc*

$$\dim(\mathrm{Hom}_G(V,V')) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ et } V' \text{ sont isomorphes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2 Caractères

2.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.207-208

Définition 23 *Soit ρ une représentation d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension n.*
On lui associe son caractère χ_ρ défini par $\chi_\rho(g) = \mathrm{tr}(\rho(g))$, où tr désigne la trace.
C'est une fonction de G dans $\mathbb{C}$, (i.e.) $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$.

Proposition 24 *(i) $\chi_\rho(g)(1) = n$.*
(ii) $\forall g \in G$, $\chi_\rho(g^{-1}) = \overline{\chi_\rho(g)}$.
(iii) $\forall g, h \in G$, $\chi_\rho(ghg^{-1}) = \overline{\chi_\rho(h)}$: on dit que χ_ρ est une fonction centrale.
(iv) Si ρ se décompose en une somme directe de deux représentations ρ_V et ρ_W, alors $\chi_\rho := \chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$
(v) Si on note $\rho_{\mathcal{L}(V,W)}$ la représentation des morphimes sur $\mathcal{L}(V,W)$ de deux représentations ρ_V et ρ_W, alors $\chi_{\mathcal{L}(V,W)} = \overline{\chi_{\rho_V}}\chi_{\rho_W}$.
(vi) Si on note ρ^* la représentation duale d'une représentation ρ, alors $\chi_{\rho^*} = \overline{\chi_\rho}$.
(vii) Deux représentations isomorphes ont même caractère.

Exemple 25 *Soit ρ_r la représentation régulière à gauche d'un groupe G sur un espace vectoriel de dimension $|G|$ sur $\mathbb{C}$ dont la base est indexée par G et de la forme $\{e_g\}_{g\in G}$. Alors*

$$\chi_{\rho_r}(g) = \begin{cases} n & \text{si } g = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2.2 Relations d'orthogonalité [PEY] p.208-209

Définition 26 *Si φ et ψ sont deux fonctions de G dans $\mathbb{C}$, on pose*

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)\overline{\psi(g)}$$

$\langle .,. \rangle$ est un produit hermitien sur l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]$ des fonctions de G sans $\mathbb{C}$.

Proposition 27 *Une famille de caractères de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes forme une famille orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions de G sans $\mathbb{C}$ (i.e.)*
(i) Si χ est le caractère d'une représentation irréductible alors $\langle \chi, \chi \rangle = 1$. (ii) Si χ et χ' sont deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors on a $\langle \chi, \chi' \rangle = 0$.

2.3 Décomposition d'une représentation [PEY] p.209 → 211

Dans la suite, on se donne une famille de représentants $(V_i)_{i=1}^p$ de l'ensemble des représentations irréductibles $\rho_i := \rho_{V_i}$ sur G.

Définition 28 *On note $\widehat{G}$ l'ensemble $(\rho_i)_{i=1}^p$ des représentations irréductibles sur G.*

Proposition 29 *Soit ρ une représentation sur V, de caractère χ_V. Alors elle se décompose en*

$$V \underset{G-iso.}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{p} V_i^{\oplus a_i}$$

avec
$a_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$
$V_i^{\oplus a_i} = V_i \oplus ... \oplus V_i$ (a_i fois)
De plus, on a

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i=1}^{p} a_i^2$$

Corollaire 30 *Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.*
De plus, une représentation sur V de caractère χ_V est irréductible si et seulement si $\langle \chi_V, \chi_V \rangle = 1$.

Proposition 31 *On note ρ_r la représentation régulière d'un groupe G sur un espace vectoriel V de dimension n de caractère χ_r. La décomposition de la représentation régulière sur V s'écrit*

$$V \underset{G-iso.}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^{p} V_i^{\oplus n_i}$$

avec $n_i := \dim(V_i) = \langle \chi_r, \chi_i \rangle$

Corollaire 32 *On a les relations :*
(i) <u>Formule de Burnside :</u> $\sum_{i=1}^p n_i^2 = |G|$
(ii) Pour $s \neq 1$, $\sum_{i=1}^p n_i \chi_i(s) = 0$

2.4 Espace des fonctions centrales [PEY] p.213 → 215

Définition 33 *Une fonction $\varphi : G \to \mathbb{C}$ est dite <u>centrale</u> si elle vérifie*

$$\forall g, h \in G,\ \varphi(ghg^{-1}) = \varphi(h)$$

On note $\mathbb{C}[G]^G$ l'ensemble des fonctions centrales : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{C}[G]$.

Proposition 34 *En notant $\{C_1, ..., C_q\}$ les différentes classes de conjugaison de G, les fonctions $f_{C_1}, ..., f_{C_q}$ définies par*

$$\forall g \in G, \quad f_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & si\ g \in C_i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

forment une base de l'espace vectoriel $\mathbb{C}[G]^G$.
En particulier, $\dim(\mathbb{C}[G]^G) = q$ (nombre de classes de conjugaisons de G)

Théorème 35 *$(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}} = (\chi_i)_{i=1}^p$ forme une base orthonormale de l'espace $\mathbb{C}[G]^G$.*

Corollaire 36 *Le nombre de représentations irréductibles sur G non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaisons de G.*

Corollaire 37 *G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.*

2.5 Noyau de caractères [PEY] p.230 → 232

Proposition 38 *Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation, de caractère χ_V sur un espace V de dimension d. On note $g \in G$ un élément d'ordre k. Alors :*
(i) $\rho(g)$ est diagonalisable.
(ii) χ_V est somme de $\chi_V(1) = \dim V = d$ racines k^{ieme} de l'unité.
(iii) $|\chi_V(g)| \leq \chi_V(1) = d$.
(iv) $K_{\chi_V} := \{g \in G \mid \chi_V(g) = \chi_V(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G. On le nomme le <u>noyau de la représentation.</u>

Proposition 39 *Soient G un groupe fini, et $\widehat{G} = \{\rho_1, ..., \rho_r\}$ son dual, formé de représentants des représentations irréductibles non isomorphes. Les sous-groupes dinstingués d'un groupe fini G sont exactement du type*

$$\bigcap_{i \in I} \{g \in G \mid \chi_i(g) = \chi_i(e)\} \text{ où } I \subset \{1, ..., r\}$$

Corollaire 40 *G est simple si et seulement si pour tout $i \neq 1$, pour tout $g \in G \backslash \{e\}$, $\chi_i(g) = \chi_i(e)$.*

3 Table des caractères

3.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.225-226

Définition 41 *Une* <u>*table des caractères*</u> *est un tableau constitué des éléments de la matrice* $(\chi_i(C_j))_{1\leq i,j\leq p}$.

	1 1	$\lvert C_1\rvert$ C_1	$\ldots$ $\ldots$	$\lvert C_p\rvert$ C_p
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	$\ldots$	1
χ_2	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	$\ldots$	$\chi_2(C_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_p	$\chi_p(1)$	$\chi_p(C_2)$	$\ldots$	$\chi_p(C_p)$

Proposition 42 <u>*Orthogonalité des colonnes :*</u>
En notant $(\chi_i)_{i=1}^p$ *les caractères irréductibles de* G *et* $(C_i)_{i=1}^p$ *les classes de conjugaison de* G*, on a :*

$$\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k)\overline{\chi_i(C_l)} = 0 \quad \textit{pour } k \neq l$$

.

3.2 Les groupes cycliques [PEY] p.226

Proposition 43 *Soient* $G = \{1, g_0, g_0^2, ..., g_0^{n-1}\}$ *un groupe cyclique fini de cardinal* n *et de générateur* g_0 *et* $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
Alors les éléments de $\widehat{G}$ *sont de la forme, pour* $l \in \{0, ..., n-1\}$*,*

$$\chi_l \ : \ \begin{cases} G & \to \mathbb{C}^* \\ g = g_0^k & \mapsto (\omega_n^l)^k = e^{\frac{2ikl\pi}{n}} \end{cases}$$

En particulier, $G \simeq \widehat{G}$.
La table de $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ *est une matrice de Vandermonde :*

	1 $g_1 = 0$	1 g_2	$\ldots$ $\ldots$	1 g_n
χ_1	1	1	$\ldots$	1
χ_2	1	ω_n	$\ldots$	ω_n^{n-1}
χ_3	1	ω_n^2	$\ldots$	$\omega_n^{2(n-1)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
χ_n	1	ω_n^{n-1}	$\ldots$	$\omega_n^{(n-1)(n-1)}$

3.3 Les groupes diédraux [PEY] p.227-228

Définition 44 *On appelle* <u>*groupe diédral* D_n</u> *le groupe des isométries du plan qui conservent un polygone régulier à* n *côtés. Il contient* n *rotations d'angle* $\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, ..., n-1$ *ainsi que* n *symétries. En notant* r *la rotation d'angle* $\frac{2\pi}{n}$ *et* s *une des symétries, on a*

$$r^n = 1 \qquad s^2 = 1 \qquad (sr)^2 = 1$$

Proposition 45 *Les classes de conjugaison du groupe diédral* D_n *sont :*
- <u>*Pour* n *est pair :*</u> *on a* $\frac{n}{2}+3$ *classes de conjugaison*

$$\{Id\}, \{-Id\}, \{r, r^{n-1}\}, ..., \{r^{n/2-1}, r^{n/2+1}\}$$

$$\{s, sr^2, ..., sr^{n-2}\}, ..., \{sr, sr^3, ..., s^{n-1}\}$$

- <u>*Pour* n *est impair :*</u> *on a* $\frac{n+1}{2}+1$ *classes de conjugaison*

$$\{Id\}, \{r, r^{n-1}\}, ..., \{r^{\frac{n-1}{2}}, r^{\frac{n+1}{2}}\}$$

$$\{s, sr, sr^2, ..., sr^{n-1}\}$$

[OTZ] p.17

Proposition 46 • <u>*Cas où* n *est pair :*</u>
On obtient les 4 représentations irréductibles de degré 1 suivantes

	n r^k	n sr^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

En posant $\omega_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}$*, pour* $h = 1, ..., n/2$*, on a les représentations de degré deux définies par les formules suivantes*

$$\rho_h(r^k) = \begin{pmatrix} \omega_n^{hk} & 0 \\ 0 & \omega_n^{-hk} \end{pmatrix} \quad \rho_h(s^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_n^{-hk} \\ \omega_n^{hk} & 0 \end{pmatrix}$$

d'où

	n r^k	n sr^k
χ_h	$2\cos(\frac{2\pi kh}{n})$	0

• <u>*Cas où* n *est impair :*</u>
On obtient les 2 représentations irréductibles de degré 1 suivantes

	n r^k	n sr^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

On a les mêmes représentations de degré deux pour $h = 1, ..., (n-1)/2$.

3.4 Le groupe $\mathfrak{S}_4$

Théorème 47 ♠ *Soient* Δ_4 *le tétraèdre régulier et* $Is(\Delta_4)$ *le groupe des isométries préservant* Δ_4*. Alors* $Is(\Delta_4)$ *agit sur les sommets du tétraèdre, et on a*

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ *est* voir Tableau 1 *et* Partie 3 ♠
[H2G2t1] p.363-364 - [PEY] p.228 → 230

3.5 Le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ [RAU] p.60

Théorème 48 *Le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$ est formé des 8 matrices suivantes :*

$$\{\pm Id,\ \pm I = \pm i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\pm J = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \pm K = \pm i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\}$$

La table de caractères de $\mathfrak{H}_8$ est voir Tableau 2

Remarque 49 *Il faut remarquer que $\mathbb{H}_8$ et D_4 ont la même table de caractères bien que $\mathbb{H}_8$ et D_4 ne soient pas isomorphes.*

Illustrations

	Id 1	$\{(1\ 2)\}$ 6	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$ 3	$\{(1\ 2\ 3)\}$ 8	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$ 6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
χ_3	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
χ_5	2	0	2	-1	0

Tableau 1 : La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$

	Id 1	$-Id$ 1	$\{I\}$ 2	$\{J\}$ 2	$\{K\}$ 2
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	-1	-1	1
χ_3	1	1	1	-1	-1
χ_4	1	1	-1	1	-1
χ_5	2	-2	0	0	0

Tableau 2 : La table de caractères de $\mathbb{H}_8$

Questions

Exercice : Montrer que tout caractère irréductible d'un groupe fini, de degré supérieur strictement à 1, s'annule au moins une fois.

Solution : Par l'absurde, on suppose que le caractère irréductible χ d'un groupe fini G ne s'annule jamais. Or, on a

$$G = \bigsqcup \{g^i \ ; \ i \in I(g)\}$$

où $I(g)$ désigne l'ensemble des entiers positifs, inférieurs à l'ordre de g et premier avec cet ordre.

Soit ρ la représentation sur un espace V de dimension d associée à χ. Pour $g \in G$ d'ordre k, $\rho(g)$ est diagonalisable. En effet, comme $g^k = 1$, on a $\rho(g)^k = Id$, donc le polynôme minimal de $\rho(g)$ divise $X^k - 1$, qui est scindé à racines simples. Par suite, on en déduit que χ_V est somme de $\chi(1) = \dim V = d$ racines k^{ieme} de l'unité puisqu'en posant $\omega_1, ..., \omega_d$ les valeurs propres de $\rho(g)$, qui sont des racines k^{ieme} de l'unité, on a $\chi(g) = \omega_1 + ... + \omega_d$.

Par suite,

$$\prod_{i \in I(g)} |\chi(g^i)| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i \in I(g)} |\chi(g^i)|^2 \geq 1$$

Par l'inégalité entre la moyenne arithmétique et géométrique, on a

$$\frac{1}{I(g)} \sum_{i \in I(g)} |\chi(g^i)|^2 \geq \prod_{i \in I(g)} |\chi(g^i)|^{2/I(g)} \geq 1$$

Par conséquent,

$$\sum_{g \in G \setminus \{1\}} |\chi(g)|^2 \geq |G| - 1$$

Or $\chi(1) = \dim V > 1$, donc

$$\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \chi(1) + \sum_{g \in G \setminus \{1\}} |\chi(g)|^2 \geq |G| - 1 + \chi(1) > |G|$$

Ce qui contredit l'irréductibilité de χ car

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|} \underbrace{\sum_{g \in G} |\chi(g)|^2}_{>|G|} > 1$$

Exercice : On note $(\chi_i)_{i=1}^p$ les caractères irréductibles de G et $(C_i)_{i=1}^p$ les classes de conjugaison de G. Montrer que :
(i) Formule de Burnside : $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$
(ii) Orthogonalité des caractères : $\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k)\overline{\chi_i(C_l)} = 0$ pour $k \neq l$.

Solution : (i) On rappelle que pour une représentation ρ sur V, de caractère χ_V. On a la décomposition :

$$V \underset{G-iso.}{\simeq} \bigoplus_{i=1}^p V_i^{\oplus a_i}$$

avec
$a_i = \langle \chi_V, \chi_i \rangle$

$V_i^{\oplus a_i} = V_i \oplus ... \oplus V_i$ (a_i fois)
De plus, on a

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \sum_{i=1}^{p} a_i^2$$

Pour montrer notre premier résultat, il suffit de décomposer la représentation régulière ρ_r de caractère χ_r et de remarquer que $\langle \chi_r, \chi_i \rangle := a_i = n_i := \dim_{\mathbb{C}}(V_i)$. En effet,

$$a_i = \langle \chi_r, \chi_i \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_r(s)} \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_r(s^{-1}) \chi_i(s) = \frac{1}{|G|} \chi_r(1) \chi_i(1) = \chi_i(1) = n_i$$

De plus, on rappelle que la représentation régulière s'applique sur un espace de dimension $|G|$. Par suite,

$$\langle \chi_V, \chi_V \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{\chi_r(s)} \chi_r(s) = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \chi_r(s^{-1}) \chi_r(s) = \frac{1}{|G|} \chi_r(1) \chi_r(1) = \chi_r(1) = |G|$$

(ii) Pour l'autre égalité, il faut considérer les fonctions "indicatrices sur les classes de conjugaison de G" (en fait, on va montrer un peu plus que cette égalité). Plus précisément, en notant $\{C_1, ..., C_p\}$ les différentes classes de conjugaison de G, les fonctions $f_{C_1}, ..., f_{C_p}$ définies par

$$\forall g \in G, \quad f_{C_i}(g) = \begin{cases} 1 & si\ g \in C_i \\ 0 & sinon \end{cases}$$

sont des fonctions de l'espace vectoriel des fonctions centrales $\mathbb{C}[G]^G$ (en fait, c'est même une base de cette espace).
De plus, $(\chi_\rho)_{\rho \in \widehat{G}} = (\chi_i)_{i=1}^p$ forme une base orthonormale de l'espace $\mathbb{C}[G]^G$. Ainsi, pour tout $k \in \{1, ..., p\}$, on peut décomposer la fonction f_{C_k} dans la base $(\chi_i)_{i=1}^p$ (*i.e.*)

$$f_{C_k} = \sum_{i=1}^{p} \langle \chi_i, f_{C_k} \rangle \chi_i$$

Soit $l \in \{1, ..., k\}$. Comme les fonctions centrales sont constantes sur les classes de conjugaison, on peut se permettre de noter $\chi_i(C_l)$ au lieu de $\chi_i(g)\ \forall g \in C_l$. Ainsi, d'une part, on a

$$\begin{aligned} f_{C_k}(C_l) &= \sum_{i=1}^{p} \langle \chi_i, f_{C_k} \rangle \chi_i(C_l) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} \overline{f_{C_k}(s)} \chi_i(s) \right) \chi_i(C_l) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\frac{1}{|G|} \# C_k \chi_i(C_k) \right) \chi_i(C_l) \\ &= \frac{\# C_k}{|G|} \sum_{i=1}^{p} \chi_i(C_k) \chi_i(C_l) \qquad (\dagger) \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de f_{C_k},

$$f_{C_k}(C_l) = \begin{cases} 1 & si\ k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Ainsi, $(\dagger)$ devient

$$\sum_{i=1}^{p} \chi_i(C_k) \chi_i(C_l) = \begin{cases} \frac{|G|}{\# C_k} & si\ k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$$

Exercice : On considère une représentation ρ d'un groupe G sur un $\mathbb{C}$-e.v. V. Justifier pourquoi, dans la définition de la représentation duale, on a $\forall g \in G,\ \rho^*(g) :={}^t \rho(g^{-1})$ et non $\forall g \in G,\ \rho^*(g) :={}^t \rho(g)$?

Solution : On peut apporter une réponse par un argument matriciel. Il faut se rappeler que $\forall g \in G$, $\rho(g) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ où $n = \mathrm{dim} V$. Pour que ρ^* soit un morphisme, il faut bien évidemment

$$\forall g, h \in G, \quad \rho^*(gh) = \rho^*(g)\rho^*(h)$$

Or en prenant la deuxième "définition", on aura

$$\forall g, h \in G, \quad \rho^*(gh) =^t \rho(gh) =^t (\rho(g)\rho(h)) =^t \rho(h)^t\rho(g) = \rho^*(h)\rho^*(g) \neq \rho^*(g)\rho^*(h)$$

En revanche, avec la première définition, on a

$$\begin{aligned}\forall g, h \in G, \quad \rho^*(gh) =^t \rho((gh)^{-1}) &=^t (\rho(gh)^{-1}) \\ &=^t ((\rho(g)\rho(h))^{-1}) \\ &=^t (\rho(h)^{-1}\rho(g)^{-1}) \\ &=^t \rho(g)^{-1}\ {}^t\rho(h)^{-1} \\ &= \rho^*(g)\rho^*(h)\end{aligned}$$