

## Éléments d'acoustique

### 1 - Introduction

#### ◆ Bref Historique

Les anciens avaient déjà des idées très pertinentes en acoustique.

On attribue à 'Pythagore' (580 - 490 av. JC) l'invention du monocorde, instrument composé d'une corde tendue entre deux chevalets fixes. Un chevalet mobile permettait d'immobiliser la corde en un point intermédiaire aux deux chevalets fixes. En le plaçant au milieu, on pouvait entendre le premier octave supérieur, au quart le second octave et ainsi de suite.

'Pythagore' trouva ensuite les intervalles musicaux en relation avec les longueurs de corde .

'Sénèque' (4 - 65 ap. JC) enseignait que c'est l'élasticité de l'air qui permet aux sons de se propager.

'Bacon' (1561-1626) et 'Galilée' (1564-1642) établissent les bases de l'acoustique.

'Gassendi' (1592 - 1655) explique la hauteur des sons,

'Mersenne' (1588-1648), mesure la vitesse du son dans l'air en 1640 et détermine la fréquence des notes de la gamme musicale.

'Otto von Guericke' (1602 -1686) , démontre, en 1654, que le son ne se propage pas dans le vide.

'Kircher' (1602-1680) donne l'explication de l'écho.

'Sauveur' en 1700 découvre les nœuds et ventre des vibrations que 'Chaldni' (1756-1827) vérifie sur des plaques saupoudrées de sable fin.

'Newton' (1642-1727) élabore la théorie de la transmission du son, fondée sur la seule élasticité des milieux.

'Taylor', 'Daniel', 'Bernouilli', 'Euler' et 'd'Alembert' au 18<sup>ème</sup> siècle établissent la théorie des cordes vibrantes.

'Sturm', 'Colladon' et 'Regnault' déterminent la célérité du son dans divers milieux.

'Helmholtz' et 'Koenig' analysent les sons complexes à l'aide de résonateurs. Ils expliquent le timbre des sons .

#### ◆ Production du son

Un son a pour origine la vibration d'un objet , (corde, membrane, etc..) pourvu que sa fréquence et son intensité soient inclus dans l'espace délimité par nos limites auditives. (cf : psychoacoustique).

#### ◆ Propagation du son

La propagation du mouvement vibratoire de la source, vers notre tympan , se fait par l'intermédiaire d'un ou plusieurs milieux élastiques.

Le son ne se propage pas dans le vide.

Quoique la propagation puisse s'effectuer dans les solides et les liquides , c'est l'air qui reste notre principal milieu de transmission. Ses caractéristiques conditionnent la propagation.

#### ◆ Caractéristiques de l'air sec

Il se compose essentiellement de

- 78,084% d'azote,
- 20,946% d'Oxygène,
- 0,934% d'Argon,
- 0,033% d'Oxyde de carbone,
- 0,003% d'un mélange constitué de néon, d'hélium, de méthane, de krypton, d'hydrogène, de Xénon, d'ozone...

A noter que:

- 99% d'un volume d'air sec sont occupés par l'azote et l'oxygène.

- l'ozone , qui joue un rôle très important dans la protection des êtres vivants du rayonnement solaire, n'intervient que pour 10<sup>-6</sup> % dans la composition de l'air atmosphérique. De même, le méthane dont la contribution à l'effet de serre est en croissance rapide est un constituant très minoritaire.

Aux composants gazeux usuels de l'air s'ajoutent selon des proportions variées des particules liquides et solides dont la présence est naturelle (cendres volcaniques, par exemple) ou liée à des activités humaines (rejets industriels...)

La masse d'air autour de la terre est de l'ordre de  $5,2 \cdot 10^{18}$  kg.

Sa masse volumique  $\rho$ , à  $T_K$  degrés Kelvin, sous une pression atmosphérique  $P_o$ , au niveau de la mer,

est de 
$$\rho = P_o / R_a \cdot T_K \quad (\text{EA-1})$$

dans laquelle apparaît la constante de l'air  $R_a = 287,037$ .

**Remarque:** Cette équation emploie l'échelle de température définie par Lord Kelvin (1824-1907), dans laquelle  $0^\circ\text{K}$ , correspond sur l'échelle centigrade, à une température de  $-273,15^\circ$  Celsius. C'est la température la plus basse envisageable et elle porte le nom de zéro absolu. Le facteur d'échelle étant identique sur les échelles Kelvin et Centigrade, le  $0^\circ\text{C}$  de l'échelle centigrade correspond à une température de  $273,15^\circ\text{K}$  sur l'échelle de Kelvin. A  $0^\circ\text{Celsius}$ , sous une *pression atmosphérique moyenne*

$$P_{oo} = 101325 \text{ Pa} , \quad (\text{EA-2})$$

Cette valeur correspond à ce que nos anciens appelaient 1 atmosphère

et, toujours **au niveau de la mer**, la masse volumique de l'air **sec**, à cette même température et d'après (EA-1) est:

$$\rho_o = 1,2923 \text{ kg/m}^3 \quad (\text{EA-3})$$

En partant de cette valeur, que nous prendrons pour référence, nous pouvons obtenir la masse volumique de l'air **sec** et **au niveau de la mer**, pour toutes les températures sous toute pression atmosphérique en écrivant

$$\rho = P_o \cdot k_p / k_t \quad (\text{EA-4})$$

dans laquelle

$$k_p = P_o / P_{oo} ; \quad (\text{EA-5})$$

$$\text{et:} \quad k_t = (273,15 + t_c) / 273,15 \quad \text{soit} \quad k_t = 1 + (t_c / 273,15) \quad (\text{EA-6})$$

La température  $t_c$  étant exprimée en  $^\circ$  Centigrade.

**Remarque:** Dans la littérature vous retrouverez l'expression de  $k_t$  sous la forme

$$k_t = 1 + \alpha \cdot t_c . \quad \text{avec} \quad \alpha = 1/273,15. \quad (\text{EA-7})$$

#### ♦♦ Variation avec l'altitude

Le gradient thermique de l'air sec dans la troposphère (0 à 11km d'altitude) est de  $-6,5^\circ\text{C}$  par km d'altitude.

Autrement dit la température chute de  $6,5^\circ\text{C}$  tous les 1000m soit d'un degré tous les 153,84m.

La température à l'altitude  $h$  est:

$$t_{c(h)} = t_{c0} - (6,5 \cdot h / 1000) \quad (\text{EA-8})$$

dans laquelle  $h$  est l'altitude et  $t_{c0}$ , la température au niveau 0 (de la mer);

Si la température était constante quelle que soit l'altitude, la pression, et la masse volumique de l'air diminueraient de façon similaire.

Une formule permet de calculer la pression atmosphérique  $P_{o(h)}$  à l'altitude  $h$  et à la température  $T_{k0}$  constatée au niveau de la mer.

$$P_{o(h)} = P_o \left[ 1 - ((\gamma-1) M \cdot g \cdot h / \gamma \cdot R \cdot T_{k0}) \right]^{(\gamma / (\gamma-1))} \quad (\text{EA-9})$$

Dans laquelle :

- $P_{o(h)}$  est la pression atmosphérique à l'altitude  $h$
- $P_o$  est la pression atmosphérique au niveau de la mer
- $\gamma = 1,3996$  le rapport des capacités calorifiques, à pression et volume constant, de l'air
- $M = 28,84 \cdot 10^{-3}$  (kg/mol) la masse molaire de l'air,
- $g = 9,8066$  l'accélération de la pesanteur, en France et au niveau de la mer
- $R = 8,3144$  (J/ $^\circ\text{K}$ /mol) la constante des gaz parfaits
- $T_{k0}$ , La température en  $^\circ\text{K}$  au niveau de la mer,
- $h$ , l'altitude en mètres.

**Remarque:**  $\gamma / (\gamma-1) = 3,5$ , ainsi 
$$P_{o(h)} = P_o \left[ 1 - (282,822 \cdot h \cdot 10^{-3} / (29,1 T_{k0})) \right]^{3,5} \quad (\text{EA-10})$$

ou 
$$P_{o(h)} = P_o \left[ 1 - (9,719 \cdot h \cdot 10^{-3} / T_{k0}) \right]^{3,5} \quad (\text{EA-11})$$

En définissant un coefficient  $k_h = \left[ 1 - (9,719 \cdot h \cdot 10^{-3} / T_{k0}) \right]^{3,5}$  d'altitude (EA-12)

Dans laquelle  $3,5 = 7/2$  ce qui signifie qu'il suffit d'élever le terme entre les accolades à la puissance 7 et en extraire la racine carrée.

Il devient possible de définir  $P_{o(h)} = k_h \cdot P_o$  (EA-13)

ou encore la prise en compte de (EA-5) permet d'écrire  $P_{o(h)} = k_h \cdot k_p \cdot P_{oo}$  (EA-14)

Cette dernière formulation, à priori plutôt encombrante, ainsi que celles, du même genre, qui suivent, sont destinées à établir des correctifs aux formules qui ne prennent en compte que les caractéristiques de l'air sec à une altitude nulle.

Pour une pression atmosphérique  $P_o$  au sol proche de  $P_{oo}$  (EA-2), une formule approchée existe.

Elle est valide à 1% tant que l'altitude ne dépasse pas 5000m

Elle s'énonce:  $P_{o(h)} = P_o - 61,28017 \cdot (0,9525^{h/500})$  (EA-15)

Très restrictive, il m'apparaît que l'emploi de (EA-11) est préférable.

### ♦♦ Caractéristiques de l'air humide

A l'air sec, vient s'ajouter de la vapeur d'eau.

Si l'on considère l'air comme un mélange de plusieurs gaz parfaits, chaque gaz se comporte comme s'il était seul. Les molécules de chacun des gaz constituant exercent une pression partielle,  $P_1$  pour le premier,  $P_2$  pour le second,  $P_3$  pour le troisième et ainsi de suite...

La pression partielle est donc la pression qu'exercerait le gaz s'il occupait seul le volume du mélange.

La **loi de Dalton** indique que la pression totale du mélange est la somme des pressions partielles.

Appliqué à l'air, la pression atmosphérique  $P_o = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$  (EA-16)

ou  $P_1$  à  $P_n$  sont les pressions partielles des gaz ainsi que de la vapeur d'eau.

On note cette somme:  $P_o = \sum p_i$  (EA-17)

et puisque, seule, la vapeur d'eau est additionnée à l'air sec :

$$P_o = P_a + P_{ve} \quad (EA-18)$$

$P_a$  est la pression partielle de l'air sec, et,  $P_{ve}$  la pression partielle de la vapeur d'eau.

La quantité de vapeur d'eau que contient l'air est variable. L'air est sec s'il ne contient pas d'eau. Il est dit humide s'il en contient.

La quantité d'eau dans l'air ne peut dépasser une valeur limite. Passé cette limite l'excédent de vapeur d'eau se condense en gouttelettes et se manifeste sous forme de brouillard ou de pluie dans l'air, de rosée ou de buée sur les objets. Cette valeur limite s'appelle le point de rosée.

La pression partielle de la vapeur d'eau à ce moment est dite saturante. Notons la  $P_{sat(t)}$  car elle dépend de la température. Elle peut être déterminée par la formule de Magnus

$$P_{sat(t)} = 611,213 \cdot \exp[17,5043 \cdot t_c / (241,2 + t_c)] \quad (EA-19)$$

valable entre  $-30^\circ\text{C}$  et  $70^\circ\text{C}$ . Dans cette formule, la température  $t_c$  est exprimée en  $^\circ\text{C}$ .

### ♦♦ Humidité absolue et humidité relative

L'humidité absolue  $H_a$  est une masse de vapeur d'eau, par unité de volume.

Si une masse de vapeur d'eau  $m$  est contenue dans un volume  $V$ , conformément à la définition:

$$H_a = m/V = M_e \cdot P_{ve} / R \cdot T_k \quad (EA-20)$$

dans laquelle :

- $M_e = 18,01528$  (g/mol) est la masse molaire de l'eau,
- $R = 8,3144$  (kJ/ $^\circ\text{K}$ /mol) la constante des gaz parfaits.

A une température donnée, l'humidité absolue est maximale si la pression partielle de vapeur d'eau est saturante.

L'humidité relative  $H_r$ , exprime le rapport entre la pression partielle  $P_{ve}$  de la vapeur d'eau présente dans le mélange et la pression de vapeur saturante  $P_{sat(t)}$ , à la température  $T_k$

$$H_r = P_{ve} / P_{sat(t)} \quad (EA-21)$$

**Remarque:** En utilisant la formule (EA-19),

A une température  $t_c = 0^\circ\text{C}$ ,  $P_{sat(t)} = 611,213$  Pa; à  $t_c = 20^\circ\text{C}$ ,  $P_{sat(t)} = 2334,25$  Pa, à  $t_c = 40^\circ\text{C}$ ,  $P_{sat(t)} = 7372$  Pa

On peut donc affirmer que l'air chaud peut contenir une plus grande quantité de vapeur d'eau, que l'air froid.

Mais, quelle que soit la température ambiante la pression de vapeur saturante  $P_{sat(t)}$  est bien inférieure à la pression atmosphérique  $P_o$ .

Dans la vie courante , le taux d'humidité relative , exprimé en % ,s'écrit.

$$H_{r\%} = 100. H_r \quad (\text{EA-22})$$

C'est elle qui influence les conditions de vie des animaux et végétaux.

Pour un humain le taux d'humidité relative optimum est compris entre 45 et 55%.

### ♦♦ Masse volumique de l'air humide en altitude à $T_k$

La masse volumique de l'air humide s'écrit  $\rho = P_{o(h)} / R_h. T_k$  (EA-23)

dans laquelle  $R_h = R_a / [1 - (H_r. P_{sat(t)} / P_{o(h)}) . (1 - (R_a / R_v))]$  (EA-24)

$R_v = 461,5 \text{ J.kg}^{-1} . \text{K}^{-1}$  est la constante spécifique de la vapeur d'eau

Après calcul de  $P_{sat(t)}$  et  $P_{o(h)}$ , La masse volumique de l'air humide à l'altitude h et à la température  $T_k$  est:

$$\rho(H_r, P_{o(h)}, T_k) = (P_{o(h)} / R_a. T_k) . [1 - ((H_r. P_{sat(t)} / P_{o(h)}) . (1 - (R_a / R_v)))] \quad (\text{EA-25})$$

Le rapport des deux constantes  $(R_a / R_v) = 287,037 / 461,5 = 0,622$  est une constante.

(EA-25) devient  $\rho(H_r, P_{o(h)}, T_k) = (P_{o(h)} / R_a. T_k) . [1 - 0,378. (H_r. P_{sat(t)} / P_{o(h)})]$  (EA-26)

En substituant  $P_{o(h)} = k_h. k_p. P_{oo}$  de (EA-14)

$$\rho(H_r, P_{o(h)}, T_k) = (k_h. k_p. P_{oo} / R_a. T_k) . [1 - 0,378. (H_r. P_{sat(t)} / k_h. k_p. P_{oo})] \quad (\text{EA-27})$$

Or (EA-7) montre que  $T_k = 273,15 + t_c = 273,15. (1 + t_c / 273,15) = 273,15. k_t$  (EA-28)

$$\rho(H_r, P_{o(h)}, t_c) = (k_h. k_p. P_{oo} / R_a. 273,15. k_t) . [1 - 0,378. (H_r. P_{sat(t)} / k_h. k_p. P_{oo})] \quad (\text{EA-29})$$

$$\rho(H_r, P_{o(h)}, t_c) = \rho_0 . (k_p / k_t) . [k_h - 0,378. (H_r. P_{sat(t)} / k_p. P_{oo})] \quad (\text{EA-30})$$

à partir de la masse volumique  $\rho_0$  de l'air sec à  $0^\circ\text{C}$ , au niveau de la mer. Dans cette dernière formule , la masse

volumique  $\rho(P_{o}, t_c) = \rho_0 . (k_p / k_t)$  (EA-4) de l'air sec à  $t_c$  et pour une pression atmosphérique donnée au niveau de la mer est présente. Ainsi,  $\rho(H_r, P_{o(h)}, t_c) = \rho(P_{o}, t_c) . [k_h - 0,378. (H_r. P_{sat(t)} / k_p. P_{oo})]$  (EA-31)

ou encore  $\rho(H_r, P_{o(h)}, t_c) = \rho(P_{o}, t_c) . k_h. [1 - 0,378. (H_r. P_{sat(t)} / k_p. k_h. P_{oo})]$  (EA-32)

qui montre que tant que  $k_h$  est très supérieur à  $0,378. (H_r. P_{sat(t)} / k_p. P_{oo})$ , l'influence de l'humidité de l'air , sur la densité de l'air est négligeable.

Elle montre également que, vis à vis de  $\rho$ , l'humidité de l'air est plus significative en altitude ( $k_h < 1$ ) qu'au niveau de la mer ( $k_h = 1$ ).

Dans la pratique la pression atmosphérique, la température et l'altitude sont les principales variables à prendre en compte pour évaluer la masse volumique de l'air.

### Annexe :

- une mole (symbole mol) est la quantité de matière qu'occupent  $6.022 \cdot 10^{23}$  entités de matière. L'entité pouvant être la molécule, l'atome ou l'ion. A l'origine  $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ , appelé nombre d'Avogadro, est le nombre d'atomes présents dans 12g de carbone C12.
- La mole a été introduite afin de pouvoir véhiculer simplement de grands nombres . 1 mole =  $6.022 \cdot 10^{23}$  entités de même nature.
- une mole de gaz, occupe , quel que soit le gaz, un volume de 22,4 dm<sup>3</sup>.
- La masse molaire est la masse que pèse une mole . Ainsi la masse molaire du carbone C12 est de 12g.

### ♦ La célérité du son

'Laplace' a établi l'équation de la célérité du son dans un gaz

$$c = (\gamma P_o / \rho)^{1/2} \quad (\text{EA-33})$$

Pour l'air  $\gamma = 1,3996$  .

A la température de  $0^\circ\text{C}$ , au niveau de la mer  $\rho = \rho_0 = 1,293$ , et, à une pression atmosphérique moyenne

$P_o = P_{oo} = 101325 \text{ Pa}$ , la vitesse de propagation du son dans l'air sec :

$$c_0 = (\gamma P_{oo} / \rho_0)^{1/2} = 331,2 \text{ m/s} . \quad (\text{EA-34})$$

A toute autre température et toute autre pression atmosphérique , et pour de l'air sec

$$c^2 = \gamma P_o / \rho \quad (\text{EA-33}), \text{ dans laquelle } \rho = \rho_o \cdot k_p / k_t \quad (\text{EA-4})$$

$$c^2 = \gamma P_o \cdot k_t / \rho_o \cdot k_p = k_t \cdot \gamma P_o / \rho_o = c_o^2 \cdot k_t \quad (\text{EA-35})$$

ou encore 
$$c^2 = 273,15 \cdot \gamma \cdot R_a \cdot k_t \quad (\text{EA-36})$$

$$c_o^2 = 273,15 \cdot \gamma \cdot R_a \quad (\text{EA-37})$$

Ainsi 
$$c = c_o \cdot k_t^{1/2} \quad (\text{EA-38})$$

Pour tout autre état de l'air la célérité peut être évaluée en fonction des pression et masse volumique précédemment définis et reportés dans l'équation de Laplace.

Le carré de la célérité 
$$c^2 = c_o^2 \cdot k_t \cdot [1 - (0,378 \cdot H_r \cdot P_{\text{sat}(t)} / (k_h \cdot k_p \cdot P_o))] \quad (\text{EA-39})$$

la célérité 
$$c = c_o \cdot (k_t / (1 - (0,378 \cdot H_r \cdot P_{\text{sat}(t)} / (k_h \cdot k_p \cdot P_o))))^{-1/2}$$

est principalement fonction de la température  $(0,378 \cdot H_r \cdot P_{\text{sat}(t)} / (k_h \cdot k_p \cdot P_o) \ll 1)$

**Remarque :**

On appelle impédance intrinsèque ou impédance caractéristique du milieu l'expression:

$$Z_s = \rho \cdot c \quad (\text{EA-40})$$

De ce qui précède cette impédance, à les dimensions d'une résistance acoustique  $[ML^{-2}T^{-1}]$ .

Elle dépend de l'état de l'air. Pour un air sec et une pression atmosphérique donnée, à l'altitude h,

$$Z_s = (\rho_o \cdot c_o \cdot k_p \cdot k_h) / k_t^{1/2} \quad (\text{EA-41})$$

**◆ La pression acoustique**

Une pression est le rapport d'une force F sur une surface S.

$$P = F / S \quad (\text{EA-42})$$

Une force de 1 Newton appliquée uniformément sur une surface de 1 m<sup>2</sup>, provoquera une pression de 1 Pascal, soit, une unité de pression.  $[M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}]$

Si P<sub>o</sub> est la pression statique de l'air, autrement dit, la pression atmosphérique, en lui provoquant une variation de pression P, La pression instantanée résultante est  $P_r = P_o + P$  (EA-43)

Cette variation de pression sera transmise, en se diluant, de proche en proche à la célérité du son

- La pression acoustique (à 1kHz) correspondant à notre seuil d'audition est de :

$$P_{\text{amin}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pascals} \quad (\text{EA-44})$$

- La destruction de l'oreille, à la même fréquence, résulte d'une pression de :

$$P_{\text{amax}} = 63 \text{ Pascals} \quad (\text{EA-45})$$

Quelle que soit la pression acoustique P<sub>a</sub> considérée entre ces deux valeurs extrêmes, P<sub>a</sub> est bien inférieure à P<sub>o</sub>.

*La pression acoustique P<sub>a</sub> est modulante de la pression atmosphérique P<sub>o</sub>.*

**◆ Flux de Vitesse acoustique**

Par définition, un flux est le produit d'un champ de vecteurs par une surface.

Un vecteur étant une grandeur orientée, v est un vecteur,

Le flux de vitesse acoustique V<sub>a</sub> est le produit d'une vitesse mécanique v par une surface S.

$$V_a = v \cdot S \quad (\text{EA-46})$$

Il s'exprime en m<sup>3</sup>/s.  $[L^3 \cdot T^{-1}]$

**◆ Puissance acoustique.**

La puissance acoustique est le produit de la pression acoustique P<sub>a</sub> par le flux de vitesse acoustique V<sub>a</sub>

$$P_a = P_a \cdot V_a \quad (\text{EA-47})$$

Vis à vis de la puissance mécanique qui l'a engendrée,

$$P_a = (F/S) \cdot v \cdot S = F \cdot v \quad (\text{EA-48})$$

Or, 
$$P_m = F \cdot v \quad (\text{EA-49})$$

est cette puissance mécanique.

Il en découle 
$$P_a = P_m \quad (\text{EA-50})$$

qui signifie que la puissance mécanique est entièrement reportée dans le réseau acoustique.

### ◆ Intensité acoustique

Elle présente deux aspects :

- physique et objectif,
- physiologique et subjectif.

✓ L'intensité acoustique physique correspond au rapport de la puissance acoustique  $P_a$  sur la surface  $S$  qui engendre cette puissance. L'intensité acoustique correspond donc à une puissance acoustique traversant une unité de surface. C'est une puissance surfacique.

$$I_a = P_a / S \quad (\text{EA-51})$$

Elle est exprimée en  $W/m^2$  [ $M.T^{-3}$ ].

En partant de la pression acoustique elle s'écrit :

$$I_a = P_a^2 / Z_s \quad (\text{EA-52})$$

En substituant  $Z_s$

$$I_a = P_a^2 / \rho \cdot c \quad (\text{EA-53})$$

Elle dépend de l'état du milieu.

**Physiologiquement**, (cf - La psychoacoustique)

nos organes auditifs sont régis par *une loi fondamentale* énoncée par Mrs WEBER et FECHNER :

***La sensation varie comme le logarithme de l'excitation.***

Si l'on considère  $I_{a0} = 10^{-12} \text{ w/m}^2$  ( $10^{-16} \text{ w/cm}^2$ ) (EA-54)  
l'intensité acoustique correspondant à notre seuil d'audition à 1kHz, et

$$I_{amax} = 10 \text{ w/m}^2, \quad (\text{EA-55})$$

à cette même fréquence l'intensité acoustique de notre seuil de douleur.

Notre sensation  $S_B$  effective entre ces deux extrêmes est :

$$S_B = \log ( I_{amax} / I_{a0} ) \quad (\text{EA-56})$$

$$S_B = \log ( 10/10^{-12} ) = \log 10^{13} = 13 \text{ B} \quad (\text{EA-57})$$

Le Bel B est définie comme l'unité de base de notre perception auditive.

On lui préfère son sous multiple le **déciBel** noté dB.

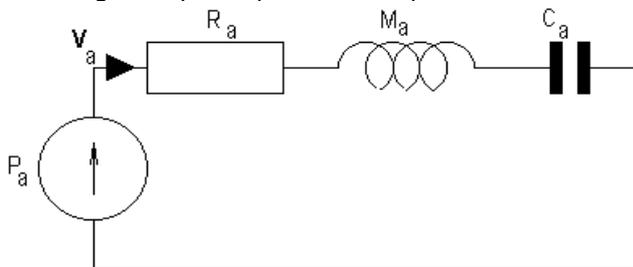
$$S_{dB} = 10 \cdot \log ( 10/10^{-12} ) = 10 \log 10^{13} = 130 \text{ dB}. \quad (\text{EA-58})$$

## 2- Circuits acoustiques

### ◆ Représentation d'un circuit acoustique

Un circuit acoustique Masse, Résistance, Compliance (MRC) série est représenté dans le schéma suivant.

Par analogie sa symbolique est identique à celle d'un circuit électrique. (cf. Les analogies...)



Dans ce schéma, le générateur  $P_a$  délivre une pression qui engendre un flux de vitesse  $V_a$ , commun à la résistance acoustique  $R_a$ , la masse acoustique  $M_a$  et la compliance acoustique  $C_a$ .

### ◆ Masse acoustique

Appelée également inertance acoustique, c'est l'élément ( $M_a$ ) qui s'oppose aux variations du flux de vitesse  $V_a$ .

Si une pression acoustique lui est appliquée, d'après cette définition, on peut écrire :

$$P_a - M_a \cdot dV_a / dt = 0 \Leftrightarrow P_a = M_a \cdot dV_a / dt \quad (\text{EA-59})$$

A la pression  $P_a$  correspond une force  $F_m$  mécaniquement appliquée sur une surface  $S$

$$P_a = F_m / S = M_a dV_a / dt \quad (\text{EA-60})$$

En prenant en compte la vitesse mécanique du déplacement  $v$ .

$$F_m = M_a \cdot S^2 \cdot dv / dt \quad (\text{EA-61})$$

Que l'on peut écrire

$$F_m = M_m \cdot dv / dt \quad (\text{EA-62})$$

Par identification la masse mécanique  $M_m = M_a \cdot S^2$

(EA-63)

Un tube cylindrique de longueur  $l$  et de section  $S$ , est rempli d'une masse d'air

$$M_m = l \cdot S \cdot \rho \quad (\text{EA-64})$$

C'est le produit de son volume, par la masse volumique de l'air.

Elle correspond à une masse acoustique

$$M_a = M_m / S^2 = \rho \cdot l / S \quad (\text{EA-65})$$

Elle est donc déterminée en fonction de ses caractéristiques,  $l$  et  $S$ , mesurables.

### Remarque 1 :

LORD RAYLEIGH a montré que la longueur d'un tube, si elle aboutit sur un écran plan supposé infini ou dans un volume important, doit être majorée, pour chacune de ces extrémités, d'une longueur

$$l' = 4 \cdot D / 3 \cdot \pi \quad (\text{EA-66})$$

$D$  est le diamètre du tube.

Autrement dit lors de la construction d'une enceinte bass reflex, si vous employez un tube de diamètre interne  $D$ , la longueur réelle, de l'évent devra être égale à la valeur calculée pour l'accord de l'enceinte, minorée de 2 fois  $l'$  soit :

$$l_{\text{cor}} = 2 \cdot l' = 8 \cdot D / 3 \cdot \pi = 0,84 D \quad (\text{EA-67})$$

En transposant cette dernière équation on obtient une valeur approchée par excès, de  $l_{\text{cor}}$ .

$$L_{\text{cor}} = S^{\frac{1}{2}} \quad (\text{EA-68})$$

En fait cela n'est valable que si les deux extrémités sont affleurantes.

C'est le cas d'un trou circulaire réalisé sur la face avant de l'enceinte.

### Remarque 2 :

Les conditions d'établissement des formules de correction d'extrémité, permettent une approche efficace du résultat escompté.

Toutefois, nous avons considéré :

- le tube comme étant parfaitement rigide, donc dénué de vibrations transversales,
- sa paroi parfaitement lisse donc dénuée de frottement et de turbulences,
- les effets de la viscosité de l'air sur la paroi négligeables,
- aucune limite fréquentielle,
- que le tube abouti dans un volume important d'une part et sur un écran infini d'autre part.

Devant l'ensemble de ces approximations et restrictions, une réalisation soignée nécessitera la vérification et sans doute l'ajustement du tube.

### Remarque 3:

La présence de  $\rho$  dans les formules des masses mécanique et acoustique indique que la température et la pression atmosphérique, l'humidité et l'altitude ont une influence sur ces masses.

## ◆ Compliance acoustique

C'est l'élément qui s'oppose à une variation de la pression acoustique.

Imaginons un volume  $V$  qui sous l'action extérieure d'une variation  $dP$  de pression d'un piston varie d'une quantité  $dV$

La compliance acoustique  $C_a = - dV / dP \quad (\text{EA-69})$

Le signe - signifie que la variation de volume est de sens opposé à celui de la pression.

Lorsque le piston pousse, le volume diminue, et, vice et versa.

En partant de l'équation  $P \cdot V^\gamma = \text{Constante} \quad (\text{EA-70})$

Equation de l'équilibre adiabatique (pas d'échange de chaleur) des gaz, et en posant

$$\delta P / \delta V = 0 \quad (\text{EA-71})$$

qui traduit la recherche d'équilibre

Il vient  $P \cdot \gamma \cdot V^{\gamma-1} \cdot dV + V^\gamma \cdot dP = 0 \quad (\text{EA-72})$

Soit  $dV/dP = -V/P \cdot \gamma$  (EA-73)

Or  $P \cdot \gamma = \rho \cdot c^2$  (EA-74)

Et  $C_a = V / \rho \cdot c^2$  (EA-75)

**Remarque 1 :**

La validité de cette formule prend en compte un volume totalement indéformable et hermétique. Ce qui indique, concrètement, que les parois d'un tel volume doivent être parfaitement rigides et que leur assemblage doit assurer une parfaite étanchéité.

Cette remarque est directement applicable lors de la réalisation d'une enceinte acoustique.

**Remarque 2 :** En vertu de ce qui précède, si l'air est sec, le produit  $\rho \cdot c^2$  peut s'écrire  $\rho \cdot c^2 = C_0^2 \cdot \rho_0 \cdot k_p$  qui montre que la compliance acoustique est indépendante de la température mais inversement proportionnelle au coefficient de pression atmosphérique  $k_p$ .

◆ **Résistance acoustique**

Elle peut être réalisée de différentes manières.

✓ **Tube de faible diamètre :**

D'après Lord RAYLEIGH en négligeant les corrections d'extrémité, l'impédance acoustique du tube de rayon  $r$ , et par conséquent une section  $S_t = \pi \cdot r^2$ , s'écrit

$$Z_a = (8 \cdot \eta \cdot l / \pi \cdot r^4) + j \cdot \omega \cdot 4 \cdot \rho \cdot l / 3 \cdot \pi \cdot r^2$$
 (EA-76)

$\eta$  est le coefficient de viscosité dynamique, et

$\mu$  le coefficient de viscosité cinématique.  $\mu = \eta / \rho$  (EA-77)

A  $P_0 = 101\,300$  Pascals et à une température de  $t_c = 20^\circ C$ ,  $\mu = 1,56 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  ou myriastokes

$$Z_a = (8 \cdot \mu \cdot \rho \cdot l / S_t \cdot r^2) + j \cdot \omega \cdot 4 \cdot \rho \cdot l / 3 \cdot S_t$$
 (EA-78)

La résistance et la masse acoustique apparaissent dans le second terme de l'équation, et elles permettent d'écrire

$$Z_a = R_a + j \cdot \omega \cdot M_a$$
 (EA-79)

Dans laquelle la résistance acoustique

$$R_a = (8 \cdot \mu \cdot \rho \cdot l / S_t \cdot r^2)$$
 (EA-80)

Identifiée à (EA-65), la masse acoustique

$$M_a = \rho' \cdot l / S_t$$
 (EA-81)

On en déduit

$$\rho' = 4 \cdot \rho / 3$$
 (EA-82)

qui montre une modification de la densité de l'air à l'intérieur du tube.

La factorisation de  $R_a$  dans (EA-79)  $Z_a = R_a (1 + j \cdot \omega \cdot M_a / R_a)$

Montre que le tube sera résistif tant que le rapport  $(\omega \cdot M_a / R_a) \ll 1$  (EA-83)

En développant cette inégalité, et après simplification, la résistance acoustique sera prépondérante tant que :

$$2 \cdot \mu / r^2 \gg \omega / 3 \text{ soit } r^2 \ll 6 \cdot \mu / \omega$$
 (EA-84)

Sachant que  $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$ , le tube sera considéré résistif tant que :  $f \ll 3 \cdot \mu / S_t$  (EA-85)

La fréquence  $f_c$  à laquelle résistance et réactance sont identiques est :  $f_c = 3 \cdot \mu / S_t$  (EA-86)

Il est remarquable de constater que la fréquence de transition n'est liée qu'à la section du tube.

La faible valeur du coefficient de viscosité cinématique  $\mu$ , fait entrevoir la difficulté de réalisation d'une résistance mécanique.

**Exemple :** Un tube de  $1 \text{ mm}^2$  de section a une fréquence  $f_c$  de transition de 37,8 Hz.

**Remarque :**

Il peut être intéressant de connaître la résistance mécanique  $R_m$ , qui engendre  $R_a$ , en fonction de la surface de la paroi

$$S_p = 2 \cdot l \cdot \pi \cdot r$$
 (EA-87)

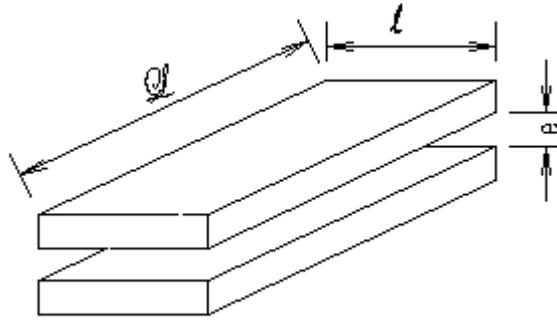
interne au tube. Elle est le produit de la circonférence ( $2 \cdot \pi \cdot r$ ) du tube par sa longueur.

Dans notre cas  $R_m = R_a \cdot S_t^2 = 8 \cdot \mu \cdot \rho \cdot l \cdot S_t / r^2 = 4 \cdot \mu \cdot \rho \cdot l \cdot 2 \cdot \pi \cdot r / r$ , qui donne après (EA-88)

identification de  $S_p$   $R_m = S_p (4 \cdot \mu \cdot \rho / r) = 4 \cdot S_p \cdot (\mu \cdot \rho / r) = 4 \cdot S_p \cdot (\eta / r)$  (EA-89)

### ✓ Fente étroite

Le plan coté est le suivant :



$e$  est l'épaisseur,  $L$  la longueur, et  $l$  la largeur de la fente.

D'après CRANDAL, en négligeant les corrections d'extrémité, et en considérant  $e$  bien inférieure à  $L$  l'impédance acoustique de la fente

$$Z_a = (12. \mu. \rho. l / e^3. L) + j. \omega. (6. \rho. l / 5. e. L) \quad (\text{EA-90})$$

Ou apparaissent :

- la surface  $S_f$  de la fente par le produit de  $e$  par  $L$ ,

- la résistance acoustique  $R_a = 12. \mu. \rho. l / e^2. S_f$  (EA-91)

- la masse acoustique  $M_a = 6. \rho. l / 5. S_f = \rho'. l / S_f$  (EA-92)

La masse volumique apparente dans la fente est  $\rho' = 6. \rho / 5 = 1,2. \rho$  (EA-93)

Pour que la fente se comporte comme une résistance il faut que  $R_a \gg M_a. \omega$  (EA-94)

Soit après développement  $e^2 \ll (10. \mu / \omega)$  (EA-95)

La fréquence charnière entre les deux états est définie par l'égalité entre la résistance  $R_a$

et la réactance  $M_a. \omega_c$ , soit  $R_a = M_a. \omega_c$  (EA-96)

On tire  $\omega_c = 10. \mu / e^2 \Leftrightarrow f_c = 5. \mu / \pi. e^2$  (EA-97)

Elle ne dépend que de l'épaisseur  $e$  de la fente, qui sera considérée purement résistive pour les fréquences  $f < f_c$ .

#### Exemple :

Une fente de 1mm aura une fréquence de transition  $f_c = 25$  Hz

#### Remarque :

Comme précédemment, la connaissance de la résistance mécanique en fonction des paramètres mesurables de la fente peut être intéressante.

L'épaisseur  $e$  de la fente étant faible vis à vis de  $L$  on peut convenir que la surface totale  $S_p$  des deux parois est :

$$S_p = 2. L. l \quad (\text{EA-98})$$

La résistance mécanique  $R_m = R_a. S_f^2 = 12. \mu. \rho. L. S_f / e^2 = 6. \mu. \rho. 2. L. l / e$  (EA-99)

Après identification de  $S_p$ ,  $R_m = 6. S_p (\mu. \rho / e) = 6. S_p (\eta / e)$  (EA-100)

### ✓ Éléments mixtes

D'après CRANDAL et INGARD si le rayon d'un tube cylindrique remplit la condition

$$10^{-2}. f^{-1/2} < r < 10 / f$$

L'expression de son impédance acoustique :  $Z_a = ((\rho. l / \pi. r^3) (2. \omega. \mu)^{1/2}) + j. \omega. \rho. l / \pi. r^2$  (EA-101)

La section du tube  $S_t = \pi. r^2$  et  $Z_a = ((\rho. l / S_t. r) (2. \omega. \mu)^{1/2}) + (j. \omega. \rho. l / S_t)$  (EA-102)

Ou encore  $Z_a = (\rho. l / S_t). (((2. \omega. \mu)^{1/2} / r) + j. \omega)$  (EA-103)

Revient à la factorisation de (EA-102) par  $M_a = \rho. l / S_t$

En convenant pour alléger l'écriture que  $a = (2. \omega. \mu)^{1/2}$  (EA-104)

$$Z_a = M_a [(a/r) + j. \omega] \quad (\text{EA-105})$$

La limite entre les deux états est définie par l'égalité  $a/r = \omega_c \Leftrightarrow a = \omega_c. r$  (EA-106)

soit  $\omega_c = 2.\mu / r^2 \Leftrightarrow f_c = \mu / S_t$  (EA-107)

L'identification, des partie réelle et imaginaire de l'expression entre crochets, permet d'affirmer que si  $f < f_c$

$$Z_a \text{ y } R_a = \alpha. \rho. l / S_t.r, \quad , Z_a \text{ est résistive.} \quad \text{(EA-108)}$$

Ou si  $f > f_c$   $Z_a = M_a. \omega$  ,  $Z_a$  est réactive. (EA-109)

Comme dans les deux cas précédents la définition de  $R_m$  , en fonctions de la surface

$$S_p = l. 2. \pi. r , \quad \text{(EA-110)}$$

de la paroi du tube peut être intéressante. Ainsi :

$$R_m = R_a. S_t^2 = \alpha.\rho.l . S_t/ r \quad \text{(EA-111)}$$

### 3- La source sonore

Caractériser une source sonore nécessite de déterminer,

- Son rendement, qui n'est autre que le rapport de la puissance reproduite par rapport à la puissance qui lui est fournie.
- Sa courbe de réponse , autrement dit ses limites fréquentielles et son comportement entre ces deux limites.
- Sa directivité qui caractérise la partie de l'espace environnant dans laquelle elle rayonne efficacement.

#### ♦ Source élémentaire

Elle est sphérique et ponctuelle.

En champ libre, dans un environnement dénué d'obstacle, elle rayonne la puissance acoustique  $P_a$  qu'elle génère, uniformément dans toutes les directions, à la célérité du son  $c$ .

A une distance  $r_1$  , soit après un temps de parcours  $t_1 = r_1 / c$  (EA-112)

cette énergie est uniformément répartie sur une surface sphérique dont  $r_1$  est le rayon et

$$S_1 = 4.\pi.r_1^2. \quad \text{(EA-113)}$$

Son intensité acoustique est :  $I_{a1} = P_a / S_1 \Leftrightarrow I_{a1} = P_a / 4.\pi.r_1^2$  (EA-114)

Elle est inversement proportionnelle à la surface et, inversement proportionnelle au carré de la distance qui la sépare de la source.

Après un temps  $t_2 > t_1$  la distance aura progressée et sera devenue  $r_2$ .

L'énergie initiale sera répartie sur une nouvelle surface  $S_2 = 4.\pi.r_2^2$ . (EA-115)

A cette nouvelle distance l'intensité acoustique est devenue

$$I_{a2} = P_a / S_2 \Leftrightarrow I_{a2} = P_a / 4.\pi.r_2^2 \quad \text{(EA-116)}$$

inférieure à  $I_{a1}$ ,

Dans la mesure ou chacune d'elle provoque une sensation auditive différente, il est légitime d'établir le rapport entre ces deux intensités acoustiques.

$$I_{a2} / I_{a1} = S_1 / S_2 = (r_1 / r_2)^2 = 1 / (r_2 / r_1)^2 \quad \text{(EA-117)}$$

Qui permet de montrer que

***l'intensité acoustique décroît en fonction du carré du rapport des distances.***

Notre sensation, exprimée en dB, vis à vis de l'éloignement est :

$$S_{dB} = 10 \log (I_{a2} / I_{a1}) = 10 \log (r_1 / r_2)^2 = 20 \log (r_1 / r_2) = - 20 \log (r_2 / r_1) \quad \text{(EA-118)}$$

Afin d'alléger l'écriture, dans la mesure ou le dB sera une unité courante appelons la sensation tout simplement  $S$

#### ✓ Remarque importante

En prenant pour  $r_1 = 1m$  , notre unité de mesure de distance

**(EA-118)** s'écrit  $S_{(r_2)} = 20 \log (1/r_2) = 20 \log (1) - 20 \log (r_2)$  et puisque  $\log (1) = 0$

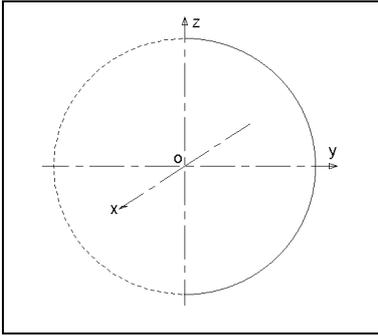
$$S_{(r_2)} = - 20 \log (r_2) \quad \text{(EA-119)}$$

Ainsi à une perception initiale , à 1m de la source ,

- en s'éloignant ( $r_2 > 1m$ ) nous percevons un affaiblissement du niveau sonore,
- en revanche en s'en rapprochant ( $r_2 < 1m$ ) nous percevons un accroissement de niveau sonore.

### ✓ La sphère

Afin de faciliter le raisonnement, voir les calculs qui feront suite, la connaissance, des propriétés de la sphère, me semble nécessaire. L'aire  $S$  d'une surface de révolution est donnée, en géométrie, par l'équation générale :



$$S = 2.\pi.\int_a^b y.(1+y'^2)^{1/2} dz \quad (\text{EA-120})$$

Appliquée à la sphère :

$$y = (r^2 - z^2)^{1/2} \Rightarrow y' = z / (r^2 - z^2)^{1/2} \Rightarrow 1 + y'^2 = r^2 / (r^2 - z^2) \quad (\text{EA-121})$$

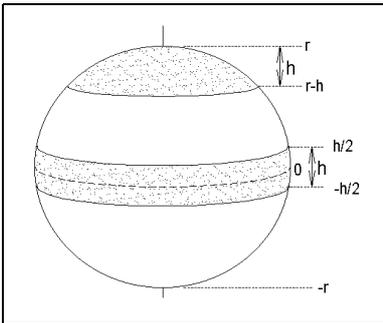
$$\Rightarrow y.(1+y'^2)^{1/2} = r \quad (\text{EA-122})$$

$$S_s = 2.\pi.r.\int_a^b dz = 2.\pi.r.h \text{ avec } h = \int_a^b dz \quad (\text{EA-123})$$

$a$  et  $b$  compris entre  $-r$  et  $r$

$$\text{pour } a=-r \text{ et } b=r \text{ alors } h=2.r \text{ et } S_s = 4.\pi.r^2 \quad (\text{EA-124})$$

**Conséquences :** quelle que soit sa position par rapport à  $z$  mais pourvu qu'elle soit située entre  $-r$  et  $r$ , toute « tranche » de hauteur  $h$  aura une surface  $S_T = 2.\pi.r.h$ , (EA-125) en conformité avec le développement précédent.



Ainsi la calotte polaire située entre  $r$  et  $r-h$  aura même surface que la tranche équatoriale située entre  $-h/2$  et  $h/2$ .

La figure ci contre illustre cette remarquable propriété.

Un cylindre de rayon  $r$ , a pour circonférence  $2.\pi.r$ .

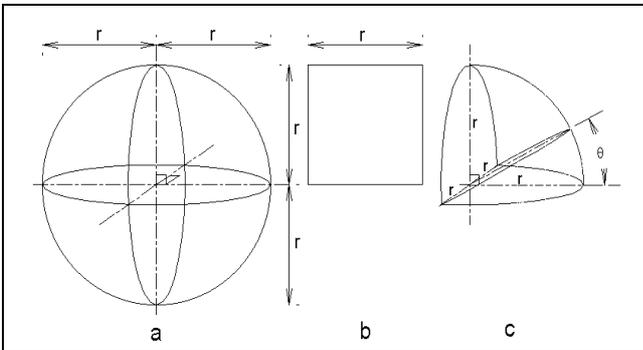
La surface engendrée par un tube cylindrique de rayon  $r$  et de longueur  $h$  a pour surface  $S_T = 2.\pi.r.h$  identique à celle précédemment calculée pour la sphère.

Du reste si la longueur du tube est égale à son propre diamètre soit  $h=2.r$  sa surface  $S = 4.\pi.r^2$

Elle est identique à celle de la sphère de même rayon.

De ces observations, découle une simplification des calculs de nombreux facteurs de directivité.

Les figures a,b,c animent les remarques suivantes



Le carré du rayon,  $r^2$ , est une surface (fig :b), et le rapport  $S/r^2$  est constant et égal à  $4.\pi$ .

En géométrie on apprend que la sphère est incluse dans un angle solide de  $4.\pi$  Stéradians

La surface élémentaire  $r^2$  est donc la surface superficielle d'une partie de la sphère délimitée par 1 Stéradian.

A un quart de sphère (fig.c) correspond un angle solide de  $\pi$ , et une surface  $S = \pi.r^2$ .

Cette surface est équivalente à la surface d'un cercle interne à la sphère ( par exemple le cercle équatorial de la figure a).

C'est aussi la somme des deux surfaces, des deux demi cercles perpendiculaires, qui intercepte  $S$  sur la figure c.

Puisque un angle droit vaut  $\pi/2$  radians, l'angle  $\theta$  définissant un stéradian vaut  $(\pi/2) / \pi = 1/2$  radian.

Exprimé en degrés  $\theta = 90/\pi = 28,65^\circ$

### ◆ Rayonnement d'une source sphérique ponctuelle

Écrivons  $A = V_a / 4.\pi$  (EA-126)

le flux de vitesse ramené à un angle solide de 1 stéradian, et appelé **Amplitude du potentiel de vitesse**.

Si la source est excitée par un signal permanent sinusoïdal  $V_a.e^{j\omega t}$ , et que  $r$  est la distance de l'observateur,

Le potentiel de vitesse  $\Phi = A.e^{j\omega t} . (1/r).e^{-j\omega r/c}$  (EA-127)

Qui traduit :

- l'amplitude du potentiel de vitesse de la source  $A$  (EA-128)

- La modulation sinusoïdale  $e^{j\omega t}$  (EA-129)

- L'affaiblissement à la distance  $r$  :  $1/r$  (EA-130)

- le temps de parcours  $\tau_r = r/c$  (EA-131)

qui peut être considérée comme une constante de temps proportionnelle à l'éloignement  $r$ .

Comme toute constante de temps,  $\tau_r$  définit une pulsation caractéristique  $\omega_r = 1/\tau_r$  (EA-132)

L'emploi de l'opérateur d'Heaviside  $p = j \cdot \omega = d/dt$ , dans (EA-127) permet d'écrire le potentiel de vitesse:

$$\Phi = (A/r) \cdot e^{p(t - r/c)} \quad (\text{EA-133})$$

Conformément aux équations de propagation,

- La pression acoustique produite à la distance  $r$  de la source s'écrit

$$P_r = -\rho \cdot d\Phi/dt \quad (\text{EA-134})$$

Et puisque  $d\Phi/dt = p \cdot \Phi$ , homogène à une accélération

$$P_r = -\rho \cdot p \cdot \Phi \quad (\text{EA-135})$$

- La vitesse vibratoire  $v_r = d\Phi/dr = -\Phi \cdot [(1/r) + (p/c)]$  (EA-136)

Le rapport  $P_r/v_r$  détermine l'impédance acoustique intrinsèque du milieu pour une onde sphérique divergente

$$Z_{is} = P_r/v_r = \rho \cdot c \cdot ((p \cdot r/c) / (1 + p \cdot r/c)) = \rho \cdot c \cdot (p \cdot \tau_r / (1 + p \cdot \tau_r)) = \rho \cdot c \cdot (s_r / (1 + s_r)) \quad (\text{EA-137})$$

Avec  $s_r = p \cdot \tau_r$  (EA-138)

Ainsi  $Z_{is}$  est le produit de l'impédance caractéristique du milieu par une fonction de transfert,

$$T_{r(s)} = s_r / (1 + s_r) \quad (\text{EA-139})$$

caractéristique d'un filtre passe haut du 1<sup>er</sup> ordre.

$$Z_{is} = \rho \cdot c \cdot T_r \quad (\text{EA-140})$$

L'impédance  $Z_{is}$  est équivalente à une masse acoustique  $M_a = \rho \cdot r$ , (EA-141)

parallèle à une résistance  $R_a = \rho \cdot c$  (EA-142)

### ◆ Facteur de directivité

C'est le rapport entre l'intensité acoustique produite une source acoustique, à un point situé dans son axe, par l'intensité acoustique d'une source sphérique ponctuelle qui rayonnerait la même puissance acoustique.

**Exemple :** Situé à une distance  $r$  d'un système rayonnant une puissance acoustique  $P_a$  canalisée dans 1 Stéradian. A cette distance la surface rayonnante est  $S_1 = r^2$  et l'intensité acoustique vaut :

$$I_{a1} = P_a / S_1 \quad (\text{EA-143})$$

Pour une source sphérique ponctuelle, la surface rayonnante à la même distance  $r$  est  $S_0 = 4 \cdot \pi \cdot r^2$  et l'intensité acoustique vaut :

$$I_{a0} = P_a / S_0 \quad (\text{EA-144})$$

D'après la définition le facteur de directivité

$$Q = I_{a1} / I_{a0} = S_0 / S_1 \quad (\text{EA-145})$$

Dans notre exemple  $Q = 4 \cdot \pi = 12,56$

### ◆ L'indice de directivité

Il exprime le facteur de directivité convertit en décibels.  $ID = 10 \log Q$  (EA-146)

#### Remarque

Pour un unique transducteur le facteur de directivité peut varier, en fonction de la fréquence et de la position de l'auditeur par rapport à l'axe. Dans ce cas il est suivi d'une fonction de transfert qui traduit les variations fréquentielles et angulaires.

Pour des sources groupées, il varie également en fonction, de la fréquence et de la position de l'auditeur vis à vis d'un axe déterminé pour le groupement.

Une source sphérique ayant un facteur de directivité  $Q=1$  soit un indice  $ID=0$ , rayonnant uniformément dans l'espace environnant est omnidirectionnelle.

### ◆ Perte de déviation angulaire

Elle est caractérisée par la différence exprimée en dB, de la source considérée mesurée dans son axe principal, et la réponse de cette même source dans une direction écartée d'un angle  $\theta$ , avec le dit axe.

Si, **par exemple**, situé à 1m d'une source sonore la mesure indique un niveau  $NdB_0 = 100dB$  dans l'axe, et que, toujours situé à 1m, mais décalé de l'axe précédent d'un angle de  $30^\circ$ , la mesure indique un niveau de  $NdB_\theta = 97dB$ , la perte de déviation angulaire est:

$$R_\theta = NdB_0 - NdB_\theta \quad (EA-147)$$

Vis à vis de l'exemple  $R_\theta = 97 - 100 = -3dB$

Le résultat négatif exprime qu'il s'agit d'une perte.

Il lui correspond un facteur de perte angulaire que l'on définit à partir de  $R_\theta$

$$F_{(\theta)} = 10^{R_\theta / 10} \quad (EA-148)$$

A partir du précédent exemple :  $F_{(\theta)} = 10^{-0,3} = 1/2 = \mathbf{I}_{(\theta)} / \mathbf{I}_{(\theta=0)} = 0,5$

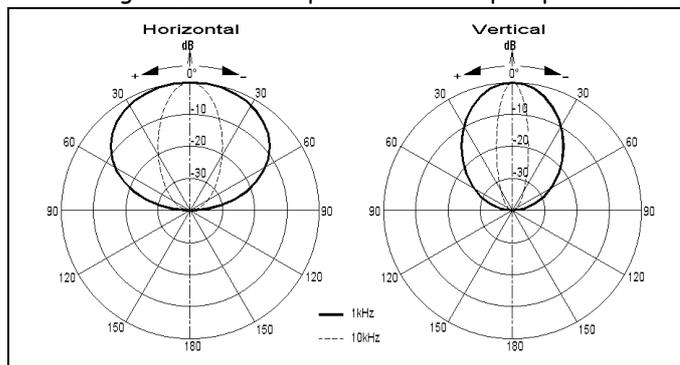
(EA-149)

### ✓ Le diagramme de directivité

Il traduit la perte de déviation angulaire  $R_\theta$  pour chacun des angles  $\theta$ . Il est représenté sur un plan polaire.

Pour décrire totalement les caractéristiques de directivité d'une source il est nécessaire de réaliser les diagrammes

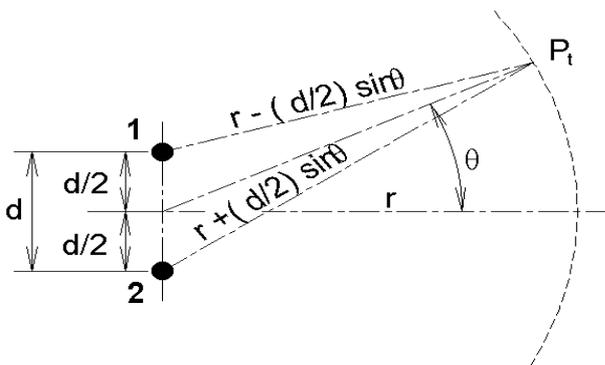
- des pertes de déviations angulaires horizontales, et
- des pertes de déviations verticales, pour chacune des fréquences, judicieusement choisies et caractéristiques de la zone fréquentielle de reproduction de cette source. Un exemple est représenté ci contre.



### ◆ Couplage de sources sphériques et ponctuelles.

#### ✓ Couplage de 2 sources en phase

Dans la figure suivante



Chacune des sources est supposée omnidirectionnelle.

L'expression de la pression  $P_i$  parvenant à l'auditeur est:

$$P_i = -(j.k.\rho.A/r).e^{j.\omega.t}.e^{-j.k.(r - (d/2).\sin \theta)} \quad (EA-150)$$

si l'on considère

$$r \gg d/2 \quad (EA-151)$$

et

$$k = \omega/c \quad (EA-152)$$

Après les transformations d'usage,

$$\Phi = (A/r).e^{p(t - r/c)} \quad (EA-153)$$

et

$$P_i = -p.\rho.\Phi.e^{p.(d/2.c).\sin \theta} \quad (EA-154)$$

De la même manière issue de la source 2,

$$P_2 = -p.\rho.\Phi.e^{-p.(d/2.c).\sin \theta} \quad (EA-155)$$

Le terme  $d/2.c$  est homogène à un temps.  $\tau_d = d/2.c$

(EA-156)

C'est le temps  $\tau_d$  au bout duquel les 2 sources interagissent entre elles.

Il lui correspond une pulsation caractéristique

$$\omega_d = 1/\tau_d \quad (EA-157)$$

(EA-157)

et une fréquence correspondante  $f_d = 1 / 2 \cdot \pi \cdot \tau_d$  (EA-158)

L'auditeur perçoit la somme des deux pressions.  $P_T = P_1 + P_2$ , (EA-159)

soit  $P_T = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot (e^{p \cdot \tau_d \cdot \sin \theta} + e^{-p \cdot \tau_d \cdot \sin \theta})$  (EA-160)

En écrivant  $\alpha = \omega \cdot \tau_d \cdot \sin \theta = (\omega / \omega_d) \cdot \sin \theta = (f / f_d) \cdot \sin \theta$  (EA-161)

l'expression de  $P_T = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$  (EA-162)

s'en trouve simplifiée et permet après identification de:  $e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2 \cdot \cos \alpha$ , (EA-163)

de mener à l'expression de la pression perçue par l'auditeur  $P_T = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot 2 \cdot \cos \alpha$ , (EA-164)

En y restituant l'expression de  $\alpha$ ,  $P_T = -2 \cdot p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot \cos((f/f_d) \cdot \sin \theta)$  (EA-165)

Il est encore possible de l'écrire  $P_T = -2 \cdot p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot F_{(\theta, f)}$  (EA-166)

Forme dans laquelle apparaît le facteur de perte angulaire

$$F_{(\theta, f)} = \cos((f/f_d) \cdot \sin \theta) \quad (\text{EA-167})$$

Qui par transformation peut s'écrire  $F_{(\theta, f)} = \sin(2 \cdot (f/f_d) \cdot \sin \theta) / 2 \cdot \sin((f/f_d) \cdot \sin \theta)$  (EA-168)

### Remarques

La fréquence caractéristique  $f_d$  est inversement proportionnelle à la distance  $d$  qui sépare les deux sources. Autrement dit  $f_d$  sera d'autant plus élevée que la distance  $d$  sera faible.

Pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$  ( $180^\circ$ )  $\sin \theta = 0$  et  $F_{(\theta, f)} = 1$ . Quel que soit le rapport  $f/f_d$  la pression

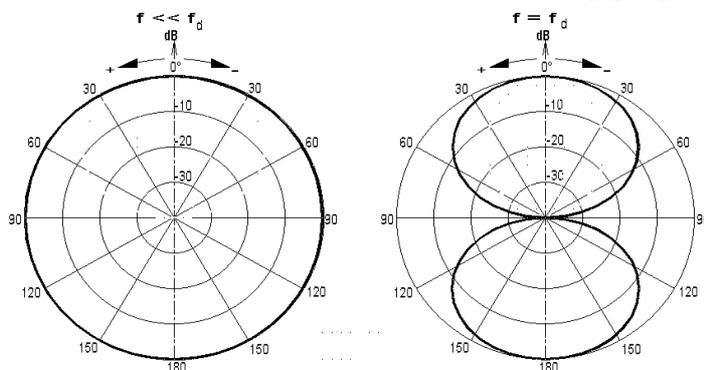
$$P_T = -2 \cdot p \cdot \rho \cdot \Phi, \quad (\text{EA-169})$$

est maximale et est délivrée dans l'axe du système.

**Aux fréquences  $f < f_d$** , l'effet de  $(f/f_d) \cdot \sin \theta$  est considérablement amoindri et  $F_{(\theta, f)}$  est voisin de 1.

Les deux sources semblent n'en faire qu'une, qui délivre une pression  $P_T = -2 \cdot p \cdot \rho \cdot \Phi$ . (EA-170)

Cette source virtuelle est dans ce cas considérée comme omnidirectionnelle.



A la fréquence  $f = f_d$  le système devient bidirectionnel, et aux fréquences  $f \gg f_d$  le diagramme de directivité a une allure de marguerite.

**Remarque:** Deux sources distantes de 1m auront une  $f_d = 108$  Hz

### ✓ Couplage de 2 sources en opposition de phase

On posera que la source 2 est en opposition de phase par rapport à la source 1

En développant comme précédemment :

$$P_T = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot (e^{p \cdot \tau_d \cdot \sin \theta} - e^{-p \cdot \tau_d \cdot \sin \theta}) = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad (\text{EA-171})$$

Cette fois  $(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) = 2 \cdot j \cdot \sin \alpha$  (EA-172)

L'auditeur perçoit une pression totale

$$P_T = -j \cdot \omega \cdot \rho \cdot \Phi \cdot 2 \cdot j \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \omega \cdot \rho \cdot \Phi \cdot \sin \alpha = 2 \cdot \omega \cdot \rho \cdot \Phi \cdot \sin((f/f_d) \cdot \sin \theta) \quad (\text{EA-173})$$

Ou l'on distingue  $F_{(\theta, f)} = \sin((f/f_d) \cdot \sin \theta)$  (EA-174)

✓ ✓ Conséquences :

Quel que soit le rapport  $f/f_d$  la pression est nulle dans l'axe du système,  $\theta=0$  ou  $\theta=180^\circ$ ,  $\sin\theta = 0$

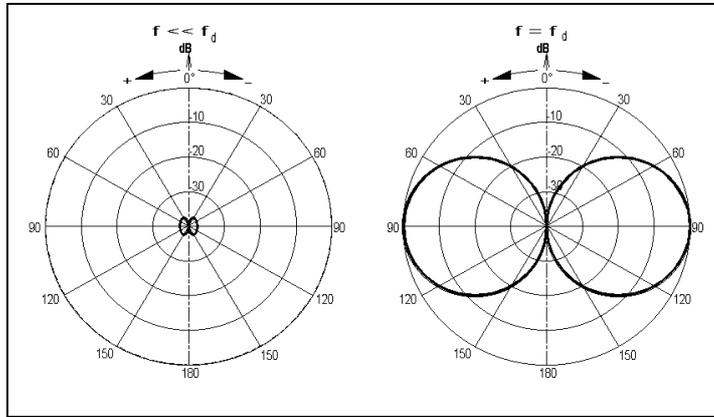
et  $F_{(\theta,f) \text{ axe}} = 0$

Dans les autres directions, aux fréquences  $f \ll f_d$ ,  $f/f_d \ll 1$  l'effet de  $\sin\theta$  est négligeable,

et  $F_{(\theta,f)}$  est voisin de 0. Quel que soit l'angle d'observation, Le système ne transmet pas les fréquences basses.

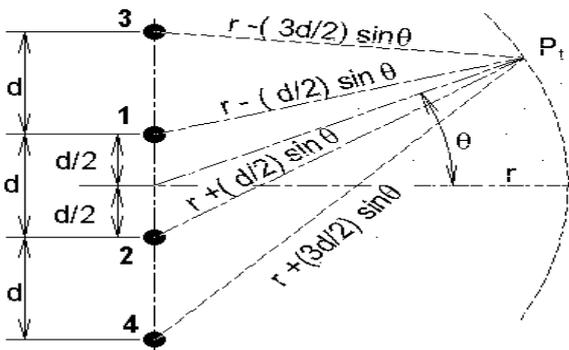
A la fréquence  $f = f_d$  le système est bidirectionnel, et les lobes sont perpendiculaires à l'axe principal.

Aux fréquences  $f > f_d$  reprend progressivement l'allure d'une marguerite.



◆ Couplage de 4 sphériques ponctuelles en phase

Alors que ce n'est pas apparent sur la figure ci dessous, nous considérerons que l'auditeur est placé à une distance  $r \gg d/2$ .



Conformément aux développements précédents, pour un système à 4 sources,

$$P_1 = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot e^{p \cdot (d/2 \cdot c) \cdot \sin \theta} \quad (\text{EA-175})$$

$$P_2 = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot e^{-p \cdot (d/2 \cdot c) \cdot \sin \theta} \quad (\text{EA-176})$$

$$P_3 = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot e^{p \cdot (3d/2 \cdot c) \cdot \sin \theta} \quad (\text{EA-177})$$

$$P_4 = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot e^{-p \cdot (3d/2 \cdot c) \cdot \sin \theta} \quad (\text{EA-178})$$

$$\text{En posant } \mathbf{A} = (\omega \cdot d/2 \cdot c) \cdot \sin \theta = \omega/\omega_d \sin \theta \quad (\text{EA-179})$$

$$\text{Comme précédemment, } \tau_d = d/2 \cdot c \quad (\text{EA-180})$$

$$\omega_d = 1/\tau_d, \quad f_d = 1/2 \cdot \pi \cdot \tau_d \quad (\text{EA-181})$$

L'expression de la pression totale perçue par l'auditeur

$$P_t = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot (e^{j \cdot A} + e^{-j \cdot A} + e^{3 \cdot j \cdot A} + e^{-3 \cdot j \cdot A}) \quad (\text{EA-182})$$

$$\text{Or, } e^{j \cdot A} + e^{-j \cdot A} = 2 \cdot \cos A \quad (\text{EA-183})$$

$$\text{et, } e^{3 \cdot j \cdot A} + e^{-3 \cdot j \cdot A} = 2 \cdot \cos(3 \cdot A) \quad (\text{EA-184})$$

$$\text{La pression totale devient } P_t = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot 2 \cdot (\cos A + \cos(3 \cdot A)) \quad (\text{EA-185})$$

La relation  $\cos A + \cos(3 \cdot A)$  s'apparente à la relation trigonométrique

$$\cos(u) + \cos(u+h) + \cos(u+2h) + \dots + \cos(u+(n-1)h) = \cos[u + (n-1)h/2] \cdot \sin(n \cdot h/2) / \sin(h/2) \quad (\text{EA-186})$$

En identifiant,  $u = a$  et  $h = 2.a$ ,  $(\cos(a) + \cos(3.a)) = [\cos(2.a) \cdot \sin(2.a)] / \sin(a)$  (EA-187)

Au numérateur  $\cos(2.a) \cdot \sin(2.a) = \sin(4.a) / 2$  (EA-188)

La pression totale  $P_{\uparrow} = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot \sin(4.a) / \sin(a)$  ((EA-189)

Afin de faire apparaître le facteur de directivité du système, multiplions haut et bas par le nombre de sources

$$P_{\uparrow} = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot 4 \cdot (\sin(4.a) / 4 \sin(a)) \quad (\text{EA-190})$$

Soit  $P_{\uparrow} = P_{\uparrow 0} \cdot F_{(\theta, f)}$  (EA-191)

Dans laquelle  $P_{\uparrow 0} = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot 4$ , (EA-192)

et,  $F_{(\theta, f)} = \sin(4.a) / 4 \sin(a)$  (EA-193)

$$F_{(\theta, f)} = \sin(4 \cdot (f/f_c) \cdot \sin(\theta)) / 4 \cdot \sin((f/f_c) \cdot \sin(\theta)) \quad (\text{EA-194})$$

Quelle que soit  $f$ , l'auditeur placé sur l'axe principal ( $\sin \theta = 0$ )  $F_{(\theta, f)} = 1$  et  $P_{\uparrow} = P_{\uparrow 0}$

Il en va de même pour  $f \ll (f_c / 4)$ .

◆ **Couplage de plusieurs sources sphériques ponctuelles en phase**

De ce qui précède, si  $n$  est le nombre de sources, alignées et distantes de  $d$  entre elles,

$$P_{\uparrow} = -p \cdot \rho \cdot \Phi \cdot n \cdot (\sin(n.a) / n \sin(a)) \text{ d'ou} \quad (\text{EA-195})$$

$$F_{(\theta, f)} = \sin(n \cdot (f/f_c) \cdot \sin(\theta)) / n \cdot \sin((f/f_c) \cdot \sin(\theta)) \quad (\text{EA-196})$$