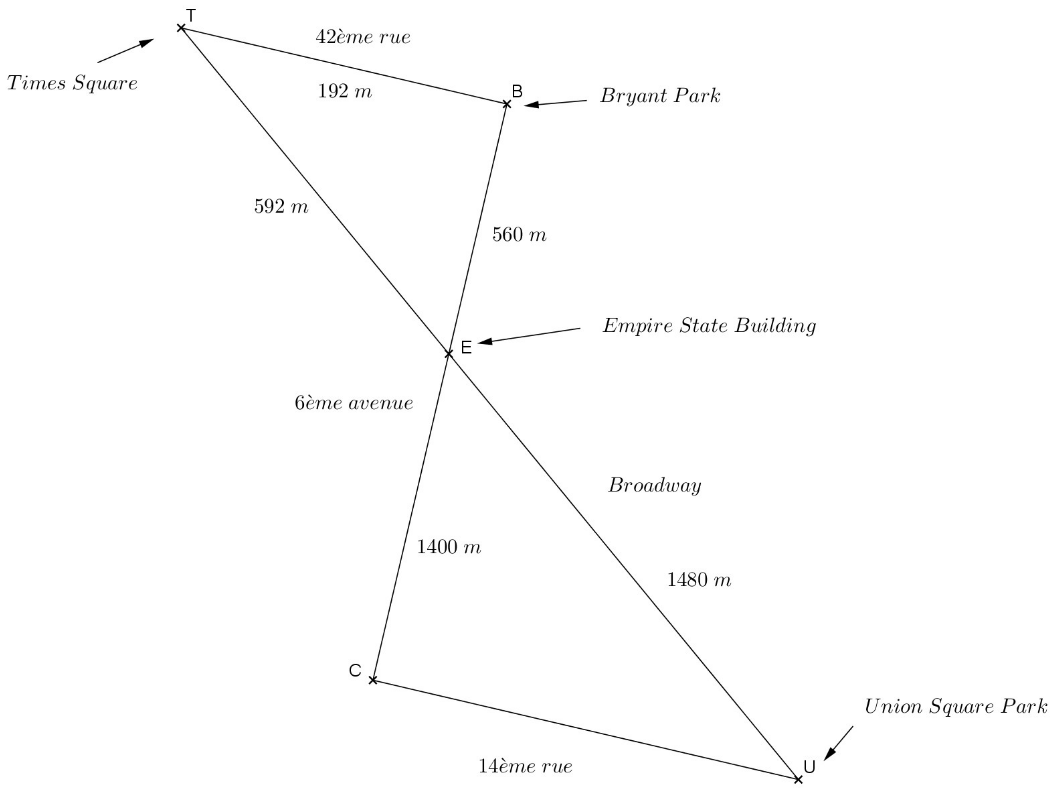
Correction du brevet blanc de mathématiques.

Pour chaque exo, j'ai remis le sujet. Je fais des commentaires et des explications en bleu, puis une solution (en noir).

Exercice n°1 : *16 points*

Jojo, élève de troisième, examine ce plan de Manhattan**,** dans la ville de New York, aux États-Unis. Dans cette ville, les rues et les avenues n'ont pas toujours des noms, mais des numéros. Il y a par exemple la 14ème et la 42ème rue ou la 62ème avenue comme dans cet exercice.



Toutes les réponses doivent être justifiées.

Dans cet exercice, vous êtes nombreux à avoir fait des erreurs en commençant par calculer des longueurs soit en utilisant Thalès alors qu'on ne sait pas que les droites sont parallèles ou alors en utilisant Pythagore dans des triangles dont on ne sait pas s'ils sont rectangles.
Il y en a qui utilise Thalès pour calculer une longueur sans savoir si les droites sont parallèles et ensuite qui regarder si Thalès est vérifiée ! Ben oui, c'est sûr si vous l'avez utilisé !

Ici, il fallait reconnaître deux triangles qui vont correspondre à une configuration de Thalès, mais pour l'instant, on ne sait pas si c'est parallèle. On doit voir deux triangles qui ont l'air rectangle, mais on ne le sait pas… Il faudra le vérifier en utilisant l'égalité de Pythagore.

Attention, certains perdent de nombreux points parce que la rédaction n'est pas complète… voire inexistante ! Certains ne cite même pas le nom des théorèmes (et il perdent donc 1 point à chaque fois!). D'ailleurs, même si on ne sait pas l'utiliser mais qu'on connaît le nom du théorème à utiliser, il faut le citer… ça rapporte un point !

1) Montrer que les droites (BT) et (CU) sont parallèles.

Dans cet question, on reconnaît une configuration de Thalès et on veut savoir si les droits sont bien parallèles. On va donc **écrire deux rapports de Thalès** pour lesquels on connaît toutes les longueurs, pour savoir si les rapports sont égaux. Pour cela, il faut bien **identifier les deux triangles !** La réciproque de Thalès nous permet d'affirmer que si les rapports sont égaux, les droites sont parallèles.

Dans les triangles EBT et ECU, les points B,E,C et T,E,U sont alignés dans cet ordre.

D'une part, $\frac{EB}{EC}=\frac{560}{1400}=\frac{2}{5}$

D'autre part, $\frac{TE}{EU}=\frac{592}{1480}=\frac{2}{5}$

Donc $\frac{EB}{EC}=\frac{TE}{EU}$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (TB) et (CU) sont parallèles

2) Montrer que la 42ème rue et la 6ème avenue forment un angle droit.

Dans cette question, il faut vérifier qu'une triangle est rectangle. Il faut donc vérifier que l'égalité de Pythagore est vérifiée… Il ne faut donc pas tout de suite écrire l'égalité des carrés parce que justement, on veut vérifier que c'est égale. Il faut donc faire les calculs séparément !

Dans le triangle BET

D'une part, $TE^2=592^2=350464$

D'autre part, $TB^2+BE^2=192^2+560^2=350464$

Donc $TE^2=TB^2+BE^2$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, TBE est rectangle en B.
Donc la 42ème rue et la 6ème avenue forment un angle droit.

3) Calculer l'angle $\widehat{BET}$. Arrondir au degré.

On a montrer dans la question précédente que le triangle BET était rectangle, donc on peut utiliser la trigonométrie. (il est bien de montrer qu'on a bien vu que le triangle était rectangle). On repère déjà l'hypoténuse, le coté adjacent à l'angle, le coté opposé à l'angle, puis on choisit la formule. Ici, on connaît l'hypothénuse [TE] et le coté adjacent [BE]

Dans le triangle BET,

cos $\widehat{BET}=\frac{BE}{ET}$

cos $\widehat{BET}=\frac{560}{592}$

donc $\widehat{BET}=\arccos\left(\frac{560}{592}\right)$

et donc $\widehat{BET}$ ≈19°

4) Calculer la distance CU.

Là, il y avait plusieurs possibilités… par exemple expliquer que le triangle CUE est rectangle en C car les droites (BT) et (CU) sont parallèles et comme (BT) est perpendiculaire à (BC), (CU) est aussi perpendiculaire à (BC). Donc on peut utiliser Pythagore.
Sinon, plus simple je pense, on reprend la configuration de Thalès, sauf que maintenant on sait que les droites sont parallèles, donc les rapports sont égaux !
On reconnaît les triangles EBT et ECU pour écrire les rapports.

Les droites (BT) et (CU) sont parallèles et les droites (TU) et (BC) sont séantes en E.
D'après le théorème de Thalès,

$\frac{ET}{EU}=\frac{EB}{EC}=\frac{BT}{CU}$ donc $\frac{592}{1480}=\frac{560}{1400}=\frac{192}{CU}$

donc $560\times CU=192\times1400$

et donc $CU=\frac{192\times1400}{560}$ =480 m

Exercice n°2 : ***14points***

Voici un programme de calcul

- Choisir un nombre - Multiplier ce nombre par 4 - Ajouter 8 - Multiplier le résultat par 2

1) Vérifier que si on choisit le nombre -1, ce programme donne 8 comme résultat final.

$-1 \times 4 = -4$
$-4 + 8 = 4$
$4 \times 2 = 8$
ou directement $(-1 \times 4 + 8) \times 2 = 8$

2) Le programme donne 30 comme résultat final, quel est le nombre choisi au départ ?

On peut "revenir en arrière" dans le calcul… donc on divise par 2, on soustrait 8, on divise par 4.

Donc $30 \div 2 = 15$ puis $15 - 8 = 7$ puis $7 \div 4 = \frac{7}{4} = 1,75$

Ou alors on le formule comme une équation, en choisissant x comme nombre de départ.
Le programme de calcul correspond à , et donc on résout $(4x + 8) \times 2 = 30$.

Dans la suite de l'exercice, on donne x le nombre choisi au départ.

3) L'expression $A = 2(4x + 8)$ donne le résultat du programme de calcul précédent pour un nombre x donné. On pose $B = (4 + x)^2 - x^2$
Prouver que les expressions A et B sont égales pour toutes les valeurs de x.

$A = 2(4x + 8) = 8x + 16$

$B = (4 + x)^2 - x = (4 + x)(4 + x) - x^2 = 16 + 4x + 4x + x^2 - x^2 = 16 + 8x$

Donc $A = B$ pour toutes les valeurs de x.

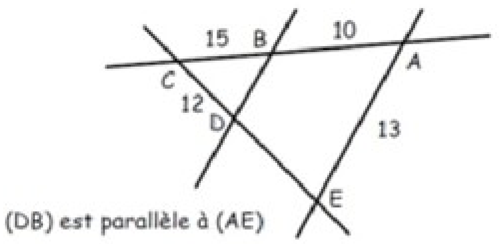
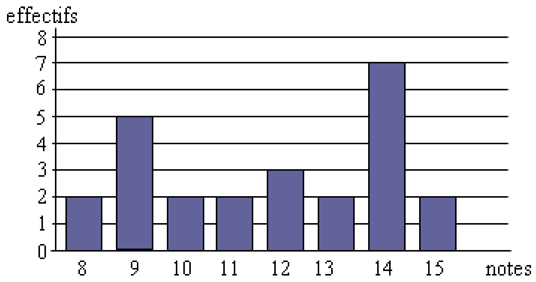
4) Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

- Affirmation 1 : ce programme donne un résultat positif pour toutes les valeurs de x
Il faut faire des essais, et notamment se dire que si x est négatif, le résultat peut être négatif. Par exemple pour $x = -3$, on va obtenir $(-3 \times 4 + 8) \times 2 = -8$ et donc l'affirmation 1 est fausse.

- **Affirmation 2 :** si le nombre x choisi est un nombre entier, le résultat obtenu est un multiple de 8.
On a déjà vu que $A = 2(4x + 8) = 8x + 16$ et on voit que l'on peut factoriser par 8… $A = 8(x + 2)$.
Donc A est bien un multiple de 8 (c'est 8 fois un nombre)

Exercice n°3 : ***10 points***

Les questions 1 à 5 sont à choix multiples. Pour chacune, une ou plusieurs réponses sont justes. Sur ta copie, indique le numéro de la question et le ou les numéro(s) des bonnes réponses.

N°	Question	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3	Réponse 4
1	 L'unité est le centimètre. Quelle est la longueur du segment [DB] ?	7,8	$\frac{39}{5}$	10	$\frac{37}{6}$
2	On a besoin de 400 g de farine pour faire des crêpes pour 8 personnes. Combien en faut-il pour 10 personnes ?	750 g	625 g	500 g	350 g
3	Un pantalon coûte 58 €. Quel est son prix en € après une réduction de 20 % ?	38	46,40	57,80	11,60
4	La factorisation de l'expression $9x^2-16$ est :	$(3x-4)^2$	$(3x+4)(3x-4)$	$(4,5x+8)(4,5x-8)$	$(4,5x+8)^2$
5	Quelle est la moyenne de la série suivante ? 	11,72	3,68	11,5	$\frac{293}{25}$

Question 1 : 1 et 2

Question 2 : 3

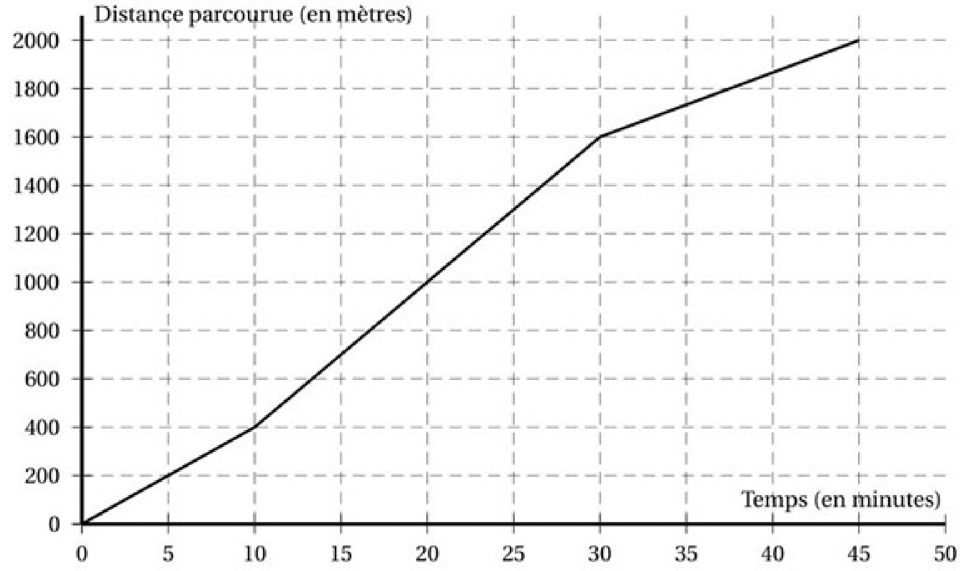
Question 3 : 2

Question 4 : 2

Question 5 : 1 et 4

Exercice n°4 : ***14points***

On étudie les performances de deux nageurs (nageur n°1 et nageur n°2). La distance parcourue par le **nageur n°1** en fonction du temps est donnée par le graphique ci-dessous :



1) Répondre aux questions suivantes par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

a) Quelle est la distance totale parcourue lors de cette course par le **nageur n°1** ? 2000m

b) En combien de temps le **nageur n°1** a-t-il parcouru les 200 premiers mètres ? En 5 min

2) Y a-t-il proportionnalité entre la distance parcourue et le temps sur l'ensemble de la course ? Justifier.

On pouvait répondre en prenant des valeurs : par exemple pour 10 min, il nage 400m et pour 30mn (trois fois plus de temps), il ne nage pas trois plus de distance, puis qu'il nage 1600m. Ce n'est donc pas proportionnel.

On pouvait aussi répondre en observant la forme de la courbe obtenue : la représentation graphique n'est pas une droite passant par l'origine, donc la situation n'est pas proportionnelle.

3) Montrer que la vitesse moyenne du nageur n°1 sur l'ensemble de la course est d'environ 44 m/min ?

On veut la vitesse moyenne, donc par rapport à l'ensemble du temps de nage. Le nageur 1 a parcouru 2000 m en 45 min soit $2000 \div 45 \simeq 44$ m par minute.

4) On suppose maintenant que le nageur n°2 nage régulièrement, c'est à dire progresse à vitesse constante. La fonction *f* définie par $f(x) = 50x$ représente la distance qu'il parcourt en fonction du temps x.

a) Calculer l'image de 10 par f. L'image de 10, c'est trouver le résultat par la fonction, donc c'est pour 10mn, combien de mètres a-t-il nagé. $f(10) = 50 \times 10 = 500$.

b) Calculer $f(30)$. $f(30) = 50 \times 30 = 1500$

5) Les nageurs n°1 et n°2 sont partis en même temps.

a) Lequel est en tête au bout de 10 min ? Justifier.

Au bout de 10 min, le nageur 1 a parcouru 400 m alors que le nageur 2 a parcouru 500 m : il est donc en tête.

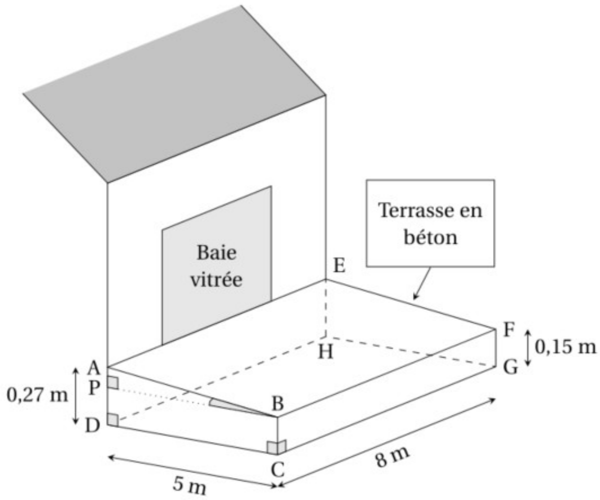
b) Lequel est en tête au bout de 30 min ? Justifier

Au bout de 30 min, le nageur 2 a parcouru 1500 m le nageur 1 a parcouru 1600 m: il est donc en tête.

Exercice n°5 : ***17 points***

Madame Martin souhaite réaliser une terrasse en béton en face de sa baie vitrée. Elle réalise le dessin ci-contre.
Pour faciliter l'écoulement des eaux de pluie, le sol de la terrasse doit être incliné.

La terrasse a la forme d'un prisme droit dont la base est le quadrilatère ABCD et la hauteur est le segment [CG].
P est le point du segment [AD] tel que BCDP est un rectangle.



1) L'angle $\widehat{ABP}$ doit mesurer entre 1° et 1,5°. Le projet de Madame Martin vérifie-t-il cette condition ?

Il faut ici repérer un triangle rectangle pour pouvoir utiliser la trigonométrie pour calculer un angle. C'est par exemple le triangle ABP. Ensuite, la méthode est toujours la même : On repère déjà l'hypoténuse, le coté adjacent à l'angle, le coté opposé à l'angle, puis on choisit la formule. Ici, on connaît le coté adjacent [PB] et le coté opposé [AP], donc on va choisir la tangente.

ABP est un triangle rectangle en P donc on peut utiliser la trigonométrie. AP=0,27-0,15=0,12m (car FG-PD). PB=5m.

$$\tan \widehat{PBA} = \frac{AP}{PB} = \frac{0,12}{5}$$

Et donc $\widehat{PBA} = \arctan(\frac{0,12}{5}) \simeq 1,4°$

La condition est donc vérifiée.

2) Madame Martin souhaite se faire livrer le béton nécessaire à la réalisation de sa terrasse. Elle fait appel à une entreprise spécialisée.
A l'aide des informations contenues dans le tableau ci-dessous, déterminer le montant de la facture établie par l'entreprise.

On rappelle que toute trace de recherche, même incomplète, pourra être prise en compte dans l'évaluation.

Information 1 *Distance entre l'entreprise et la maison de Madame Martin : 23km*

Information 2 *Formule du volume d'un prisme droit* $\mathcal{V}_{prisme\,droit} = \mathcal{A}_{base\,du\,prisme} \times hauteur\,du\,prisme$

Information 3 *Condition tarifaires de l'entreprise spécialisée* *- Prix du m³ de béton 95€* *- Capacité maximale du camion-toupie : 6m³* *- Frais de livraison : 5€ par km parcouru par le camion-toupie* *- L'entreprise facture les distances aller et retour (entreprise / lieu de livraison) parcourues par le camion-toupie.*

Pour répondre à cette question, il faut déjà calculer le volume pour pouvoir déterminer le prix du béton. Il faut ensuite déterminer le nombre de km effectué par le camion, pour déterminer le prix du transport. Il faut enfin additionner les deux prix pour connaître le tarif global. Si vous avez déjà compris cela, il faut le dire… parce que d'expliquer la démarche globale rapporte des points !

Volume de béton : On utilise la formule $\mathcal{V}_{prisme\,droit} = \mathcal{A}_{base\,du\,prisme} \times hauteur\,du\,prisme$

La difficulté pour beaucoup était de reconnaître le prisme droit. Il est en fait "couché", c'est à dire que la base du prisme est $ABCD$ et la hauteur est GC.

La base $ABCD$ est composé du rectangle $PBCD$ et du triangle APB rectangle en P, d'ou

$$\mathcal{A}_{base\,du\,prisme} = \mathcal{A}_{PBCD} + \mathcal{A}_{APB}$$

c'est à dire $\mathcal{A}_{base\,du\,prisme} = 5 \times 0,15 + 0,12 \times 5 \div 2 = 1,05\,m^2$

La hauteur du prisme est $CG = 8\,m$.

Et donc $\mathcal{V}_{prisme\,droit} = \mathcal{A}_{base\,du\,prisme} \times hauteur\,du\,prisme = 1,05 \times 8 = 8,4\,m^3$

D'autres on reconnu un pavé droit "en bas", puis la moitié d'un pavé droit pour la pente. Ils ont donc calculé le pavé droit "du bas" et le pavé droit "du haut" divisé par deux. Cela donne le même résultat.

Prix du béton : On paie 8,4 m³ de béton à 95€ le m³, soit 8,4×95=798 €

Nombre de km effectués : Le camion peut transporter 6m³ au maximum, il faudra donc faire deux aller et retour, soit quatre fois les 23 km, c'est à dire 92 km.

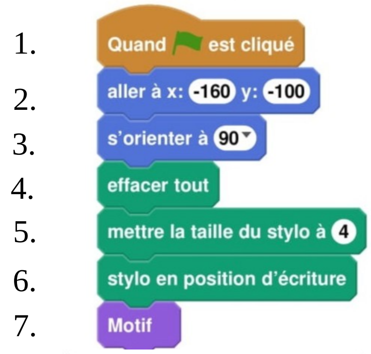
Prix du transport : On paie 5€ par km, soit 92×5=460 € pour le transport.

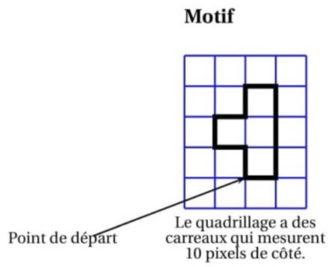
Prix total : 798+460=1258 €

Exercice n°6 : ***15 points***

« S'orienter à 90 » signifie que l'on se tourne vers la droite. Mathieu, Pierre et Elise souhaitent tracer le motif ci-dessous à l'aide de leur ordinateur. Ils commencent tous par le **script commun** ci-dessous mais écrivent un script **Motif** différent.

Script commun *aux trois élèves :*



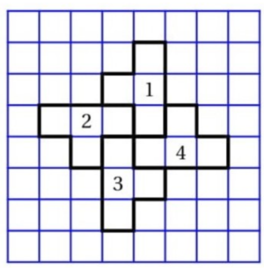


1) Tracer le motif de Mathieu en prenant comme échelle : 1 cm pour 10 pixels.

Attention, sur une feuille à petits carreaux, pour faire 1 cm, il faut prendre 2 carreaux !

2) Quel élève a un script permettant d'obtenir le motif souhaité ? On ne demande pas de justifier. Elise a écrit le bon script

3) a) On utilise ce motif pour obtenir la figure ci-contre. Quelle transformation du plan permet de passer à la fois du motif 1 au motif 2, du motif 2 au motif 3 et du motif 3 au motif 4 ?

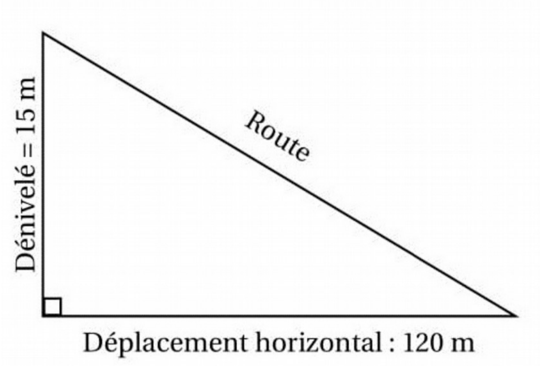


La transformation du plan est une rotation d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre et de centre le coin en bas à gauche du motif 1.

b) Modifier le **script commun** à partir de la ligne 7 incluse pour obtenir la figure voulue. On écrira sur la copie uniquement la partie modifiée. Vous pourrez utiliser certaines ou toutes les instructions suivantes :

Exercice n°7: ***14 points***

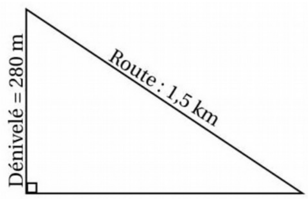
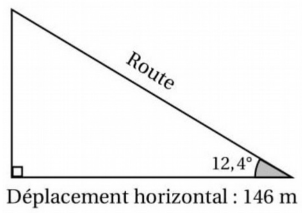
On obtient la pente d'une route en calculant le quotient du dénivelé (c'est à dire du déplacement vertical) par le déplacement horizontal correspondant. Une pente s'exprime sous forme de pourcentage.



Sur l'exemple ci-contre, la pente de la route est :

$$\frac{dénivelé}{déplacement\,horizontal}=\frac{15}{120}=0{,}125=12{,}5\,\%$$

Classer les pentes suivantes dans l'ordre croissant. Vous justifierez votre résultat en expliquant votre démarche.

Route descendant du château des Adhémar, à Montélimar.	
Tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (Ain)	
Tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (région des Asturies, Espagne)	

Il faut réussir à exprimer les pentes toutes de la même façon. Comme on nous indique comment calculer les pourcentages, autant tout mettre en pourcentage (mais on aurait aussi pu calculer à chaque fois les angles en degré par exemple)

Calcul de la pente du tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier. Il faut calculer le déplacement horizontal. Le triangle étant rectangle, on peut utiliser Pythagore. Il faut bien sûr faire attention aux unités de longueurs : on peut par exemple tout mettre en m.

$horizontal^2+280^2=1500^2$ donc $horizontal^2=2250000-78400=2171600$ et donc $horizontal=\sqrt{2171600}\simeq=1474\,m$

La pente est donc $\dfrac{dénivelé}{déplacement\,horizontal}=\dfrac{280}{1474}=0{,}190=19\,\%$

Calcul de la pente du tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru. Il faut calculer le dénivelé. Le triangle étant rectangle, on peut utiliser la trigonométrie.

$\tan(12,4)=\dfrac{denivele}{horizontal}$ et donc $denivele=146\times\tan(12,4)\simeq 32,1\,m$

La pente est donc $\dfrac{dénivelé}{déplacement\,horizontal}=\dfrac{32{,}1}{146}=0{,}22=22\,\%$

Les pentes sont classées dans l'ordre croissant des pentes est donc :

le tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (19%)
le tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (22%)
la route descendant du château des Adhémar, à Montélimar. (24%)