TD2 – Dérivabilité des fonctions de plusieurs variables réelles

Exercice 1. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction :

$$f(x,y) = (x-1)\sqrt[3]{x-y},$$

au point $(x,y) = (1,1)$, le long la direction $v = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Solution. D'après la définition on a :

$$D_v f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+\frac{t}{2}, 1+\frac{t\sqrt{3}}{2}) - f(1,1)}{t}$$

Dès que :

$$f(1+\frac{t}{2}, 1+\frac{t\sqrt{3}}{2}) = \frac{t}{2}\sqrt[3]{t\big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\big)},$$

la limite est simplement :

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(1+\frac{t}{2}, 1+\frac{t\sqrt{3}}{2}) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\sqrt[3]{t\big(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\big)} = 0.$$

Donc $D_v f(1,1) = 0$.

Exercice 2. Calculer toutes les dérivées partielles de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x,y,z) = x\cos(xz) + ln(2 - \sin^2(y+z))$$

Solution.

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \cos(xz) - xz\sin(xz) \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -x^2\sin(xz) - \frac{2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}
\end{array}$$

Exercice 3. Calculer le gradient de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$:

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

au point $(2,2,2)$.

Solution.

$$\begin{array}{l}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}
\end{array}$$

Le vecteur gradient au point (2,2,2) est donné par :

$$\nabla f(2,2,2) = \big(\frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}, \frac{2}{\sqrt{12}}\big).$$

Exercice 4. Calculer la dérivée directionnelle de la fonction :

$$f(x,y) = 3x^2y - 4xy,$$

au point $(x,y) = (1,2)$ le long la direction $v = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.
Vérifier l'égalité :

$$D_v f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot v = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)v_2$$

Solution. D'après la définition on a :

$$D_v f(1,2) = \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + \frac{t\sqrt{3}}{2}, 2 - \frac{t}{2}) - f(1,2)}{t}$$

Dès que :

$$f(1 + \frac{t\sqrt{3}}{2}, 2 - \frac{t}{2}) = -\frac{9}{8}t^3 + \frac{9-\sqrt{3}}{2}t^2 + \frac{1+4\sqrt{3}}{2}t - 2$$

la limite est simplement :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(1 + \frac{t}{2}, 1 + \frac{t\sqrt{3}}{2}) + 2}{t} = \lim_{t \to 0} -\frac{9}{8}t^2 + \frac{9-\sqrt{3}}{2}t + \frac{1+4\sqrt{3}}{2} = \frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

Le gradient de f est le vecteur :

$$\nabla f(x,y) = \big(6yx - 4y, 3x^2 - 4x).$$

Le gradient de f au point $(1,2)$ est :

$$\nabla f(x,y) = \big(4, -1).$$

Finalement :

$$4(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 1(-\frac{1}{2}) = \frac{1+4\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 5. Calculer d'après la définition les dérivées partielles de la fonction :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

au point $(0,0)$. La fonction est-elle continue au point $(0,0)$?

Solution.

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$
$$\partial_y f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

La fonction f admet dérivées partielles $\partial_x f(0,0) = \partial_y f(0,0) = 0$. Cependant elle est pas continue au point $(0,0)$. Pour le montrer, on considère les restrictions de f le long les courbes $y = x$ et $y = x^3$.

$$f(x,x) = \frac{x^4}{x^6+x^2} = \frac{x^2}{x^4+1} \quad \textit{et} \quad f(x,x^3) = \frac{x^6}{x^6+x^6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x,x) = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x \to 0} f(x,x^3) = \frac{1}{2}$$

Dès que $0 \neq \frac{1}{2}$ la fonction n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 6. Calculer la dérivée de la fonction $z : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, où :

— $z(t) = f(x(t), y(t))$

— $f(x,y) = \cos(x+4y)$
— $x(t) = 5t^4$
— $y(t) = \frac{1}{t}$

Solution. z(t) est dérivable car elle est composition de fonctions dérivables. D'après la chain rule on a :

$$z\prime(t) = \partial_x f(x(t),y(t))x\prime(t) + \partial_y f(x(t),y(t))y\prime(t) =$$
$$-\sin(x(t)+4y(t))20t^3 + -4\sin(x(t)+4y(t))(\frac{-1}{t^2}) =$$
$$-20t^3\sin(5t^4+\frac{4}{t}) + \frac{4}{t^2}\sin(5t^4+\frac{4}{t})$$

Exercice 7. Calculer la dérivée de la fonction $w : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, où :
— $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$
— $f(x,y,z) = xe^{\frac{y}{z}}$
— $x(t) = t^2$
— $y(t) = 1$
— $z(t) = 1+2t$

Solution. w(t) est dérivable car elle est composition de fonctions dérivables. D'après la chain rule on a :

$$w\prime(t) = \partial_x f(x(t),y(t),z(t))x\prime(t) + \partial_y f(x(t),y(t),z(t))y\prime(t) + \partial_z f(x(t),y(t),z(t))z\prime(t) =$$
$$e^{\frac{y(t)}{z(t)}}2t + 0 + xe^{\frac{y}{z}}(\frac{-y}{z^2})2 =$$
$$2te^{\frac{1}{1+2t}} + \frac{-2t^2}{(1+2t)^2}e^{\frac{1}{1+2t}}.$$

Exercice 8. Calculer la jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x\cos y, y\sin x)$$

au point $(\pi, \frac{\pi}{2})$.

Solution. Comme $n = 2$ et $p = 2$ la jacobienne est une matrice 2×2, assemblée à partir de toutes les dérivées partielles de toutes les composantes de f :

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos y & -x\sin y \\ y\cos x & \sin x \end{pmatrix}$$

$$J_f(\pi, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\pi \\ -\frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 9. Calculer la jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$:

$$f(x,y,z) = (z\sin(xy), xe^{yz})$$

au point $(\pi, 1, 2)$.

Solution. La jacobienne est une matrice 2×3

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix}$$

$$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} zy\cos(xy) & zx\cos(xy) & \sin(xy) \\ e^{yz} & xze^{yz} & xye^{yz} \end{pmatrix}$$

$$J_f(\pi,1,2) = \begin{pmatrix} -2 & -2\pi & 0 \\ e^2 & 2\pi e^2 & \pi e^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Calculer la jacobienne de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$:

$$f(x, y, z) = (xy + z, xz + y, yz + x).$$

Solution. La jacobienne est une matrice 3×3 :

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x, y, z) & \frac{\partial f_3}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 1 \\ z & 1 & x \\ 1 & z & y \end{pmatrix}$$