ETUDE DE FONCTIONS

Déterminer les courbes de niveau d'une fonction :

1. Résoudre $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = cste$
2. Exprimer y en fonction de x et de la $cste$

Montrer qu'une fonction $f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\end{pmatrix}$ a une limite en l'origine :

- On utilise le fait que $\lim_{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}} f\begin{pmatrix}x\\y\\\dots\end{pmatrix} = \lim_{r\to 0}\left|f\begin{pmatrix}r\\\theta\\\dots\end{pmatrix}\right|$

1. Calculer et simplifier $f(r,\theta,\dots)$ en faisant un changement de variables en
   - coordonnées polaire $\begin{cases}x = r\cdot\cos\theta\\ y = r\cdot\sin\theta\end{cases}$
   - coordonnées sphériques $\begin{cases}x = r\cdot\sin\theta\cos\varphi\\ y = r\cdot\sin\theta\sin\varphi\\ z = r\cdot\cos\theta\end{cases}$
2. Faire tendre $r\to 0$ (si on a une fonction composée, faire tendre uniquement la partie qui contient les variables et ajouter la composition après)
   a. Si $f(r,\theta,\dots) = 0 \Rightarrow f$ a bien une limite en l'origine
   b. Sinon, probablement que $f(x,y)$ n'a pas de limite mais il faut le vérifier

Montrer qu'une fonction $f(x,y)$ n'a pas de limite en un point (M1) :

⇔ Prendre 2 suites u_n et v_n qui ont la même limite avec $f(u_n)$ et $f(v_n)$ qui n'ont pas la même limite

1. Trouver u_n et v_n
2. Faire tendre u_n et v_n vers l'infini et mq u_n et v_n ont bien la même limite
3. Calculer $f(u_n)$ et $f(v_n)$
4. Faire tendre n vers l'infini, et mq ces 2 nouvelles limites ne sont pas les mêmes

- On en déduit que la fonction n'admet pas de limite au point étudié
- Généralement, on prend avec $\frac{1}{n}$ et 0 (on peut aussi $\frac{1-n}{n^2}$)

Montrer qu'une fonction $f(x,y)$ n'a pas de limite en un point p (M2) :

⇔ Montrer que $f(p,x_2,\dots,x_n) = f(x_1,p,\dots,x_n) = \cdots = f(x_1,x_2,\dots,p)$

Calculer la dérivée partielle en un point :

- Formule : $\frac{\partial f(a_1,a_2,\dots,a_i,\dots,a_n)}{\partial x_i} = \lim_{x_i\to 0}\frac{f(a_1,a_2,\dots,a_i+x_i,\dots,a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_i,\dots,a_n)}{x_i}$
- Exemple : Dérivée partielle selon x au point $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$: $\frac{\partial f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f\begin{pmatrix}1+x\\2\end{pmatrix}-f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{x}$
  - Si la limite trouvée tend vers $\pm\infty \Rightarrow$ la dérivée partielle en ce point n'existe pas
- La dérivée partielle seconde : $\lim_{x\to 0}\frac{\partial^2 f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{\partial x\partial y} = \frac{\frac{\partial f\begin{pmatrix}1+x\\2\end{pmatrix}}{\partial y}-\frac{\partial f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}{\partial y}}{x}$

EQUATION DU PLAN TANGENT :

- Si f est définie sur un ouvert et est différentiable en $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ définis sur un ouvert :
  - $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + (x-a)\frac{\partial f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}{\partial y}$

CALCULER UNE DIFFERENTIELLE

- Soit $f \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$ un point et $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ une perturbation
- $d_a f = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} d_a x_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} d_a x_n$
- $d_a f\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} d_a x_1 \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} d_a x_n \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \cdot h_n$
  - $d_a x_i \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$ renvoie la $i^{\text{ème}}$ coordonnée de $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$

DIFFERENTIABILTE

- $\mathcal{C}^1 \Rightarrow \text{diff} \Rightarrow \mathcal{C}^0$
- $\text{non } \mathcal{C}^0 \Rightarrow \text{non diff} \Rightarrow \text{non } \mathcal{C}^1$
- Sur un intervalle :
  - Mq une fonction est différentiable :
    - Si $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ⇒ différentiable sur cet intervalle
  - Mq une fonction n'est pas différentiable :
    - Si n'admet pas de dérivées partielles
- En un point :
  - Mq une fonction n'est pas différentiable :
    - Si n'admet pas de dérivées partielles
  - Voir si une fonction est différentiable ou non :
    - Appliquer : $\frac{|f(a+u) - f(a) - d_a f(u)|}{\|u\|} \underset{\substack{u \to 0 \\ u \neq 0}}{\longrightarrow} 0$ (si c'est le cas, c'est différentiable)
      - a : le point où on veut mq c'est pas diff (ex : point $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)
      - $u \in \mathbb{R}^n$ (ex : $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$)
      - $d_a f(u) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} d_a x_1 u + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} d_a x_2 u = \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \cdot h_n$

Calculer une matrice jacobienne $\mathrm{Jac}_f(a)$:

1. Faire les dérivées partielles de la fonction f
2. Grouper ces dérivées dans une matrice

   $$\mathrm{Jac}_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

3. <u>Remarque</u> : le déterminant de cette matrice est le Jacobien noté $\frac{Df}{D(x,y,z)}$

> Exemple : La matrice Jacobienne de $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+2y \\ \sin x \end{pmatrix}$
>
> 1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos x \end{pmatrix}$
>
> $\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
> 2. $\mathrm{Jac}_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$
> 3. $\frac{Df}{D(x,y)} = (1 * 0) - (\cos x * 2) = -2\cos x$

DL ORDRE 2 FONCTION DE $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f\begin{pmatrix} a+h \\ a+k \end{pmatrix} = f(a) + [\mathrm{Jac}_f(a)]\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[h \ \ k][\mathrm{Hess}_f(a)]\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} + o\left(\begin{vmatrix} h \\ k \end{vmatrix}^2\right)$$

PRIMITIVE D'UNE FONCTION A PLUSIEURS VARIABLES :

Primitiver normalement en ajoutant la constante liée aux autres variables non primitivées :

Ex : $\frac{\partial f\binom{x}{y}}{\partial x} \to f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c(y)$. On primitive f suivant x et on ajoute une constante dépendant de y

EXTREMAS D'UNE FONCTION (NATURE D'UN PT CRITIQUE)

1. Trouver les points critiques
    a. Pour chaque variable, calculer la dérivée partielle de f
    b. Regarder pour quelles valeurs $\frac{\partial f}{\partial \text{var}} = 0$
2. Calculer Hess_f
3. 2 méthodes :
    a. Lire directement sur Hess_f
        i. Echelonner et réduire Hess_f
            - Si on a une colonne de 0 ⇒ on ne peut pas savoir ⇒ **non définie**
        ii. En déduire la signature (p, q)
            1. Compter le nombre de termes positifs p
            2. Compter le nombre de termes négatifs q
        iii. En déduire le signe
            1. Si que $\boldsymbol{p}$ $(q = 0)$ ⇒ positive ⇒ **minimum local**
            2. Si que **q** $(p = 0)$ ⇒ négative ⇒ **maximum local**
            3. Si on a des $\boldsymbol{p}$ **et** $\boldsymbol{q}$ ⇒ elle peut être et positive et négative ⇒ **point selle**
    b. Utiliser le critère des mineurs
        i. Si $\Delta_2 > 0$ et $\Delta_1 > 0$ ⇒ positive ⇒ **minimum local**
        ii. Si $\Delta_2 > 0$ et $\Delta_1 < 0$ ⇒ négative ⇒ **maximum local**
        iii. Si $\Delta_2 < 0$ ⇒ elle peut être et positive et négative ⇒ **point selle**
        iv. Si $\Delta_2 = 0$ ⇒ on ne peut pas connaitre sa nature ⇒ **point dégénéré**