Amphi 6 : Diagonalisation des matrices symétriques réelles et classification des matrices orthogonales Fondements Mathématiques 3

Ann Lemahieu

October 14, 2019

Matrices symétriques

Définition

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite symétrique si ${}^tA = A$.

Définition

Un endomorphisme f de E est symétrique (autoadjoint) si la matrice de f dans une base orthonormée de E est symétrique.

Matrices symétriques

Proposition

1. Soit f un endomorphisme de E. Alors f est symétrique (autoadjoint) ssi $\forall x, y \in E$: $< f(x), y >=< x, f(y) >$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est une matrice symétrique ssi $\forall X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $< AX, Y >=< X, AY >$.

But

Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Alors :

1. f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$
2. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux

Diagonalisation des matrices symétriques réelles

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

1. A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$
2. Les espaces propres sont deux à deux orthogonaux

Résumé : Diagonalisation des endomorphismes symétriques/matrices symétriques réelles

Théorème

Tout endomorphisme symétrique $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Théorème

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors il existe une matrice orthogonale P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet :

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$$

et donc les valeurs propres sont 1 et -2.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet :
$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$$
et donc les valeurs propres sont 1 et -2.
2. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable et il existe donc une base de vecteurs propres.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. A est symétrique réelle donc toutes les valeurs propres sont réelles. En effet :

$$P_A(x) = -(x-1)(x+2)^2$$

et donc les valeurs propres sont 1 et -2.

2. A est symétrique réelle donc A est diagonalisable et il existe donc une base de vecteurs propres. En effet :

$$mult_{alg}(-2) = dim(E_{-2}) = dim(Vect((-1,1,0),(-1,0,1)))$$

et

$$mult_{alg}(1) = dim(E_1) = dim(Vect(1,1,1)),$$

et $((-1,1,0),(-1,0,1),(1,1,1))$ est une base de vecteurs propres.

Exemple : suite

3. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur chaque espace propre :

$$\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\right) \text{ est une b.o.n. de } E_{-2}$$

$$\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) \text{ est une b.o.n. de } E_{1}$$

4. A est symétrique réelle donc les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux.

Exemple : suite

3. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt sur chaque espace propre :

$$((\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})) \text{ est une b.o.n. de } E_{-2}$$

$$((\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})) \text{ est une b.o.n. de } E_1$$

4. A est symétrique réelle donc les espaces propres sont 2 à 2 orthogonaux. En effet :

$$E_{-2} \perp E_1.$$

Ainsi l'union des b.o.n. des espaces propres est une b.o.n. de vecteurs propres de $\mathbb{R}^n$!

Exemple : suite

5. La matrice de passage P de la base canonique vers la nouvelle b.o.n. de vecteurs propres est orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

Exemple : suite

5. La matrice de passage P de la base canonique vers la nouvelle b.o.n. de vecteurs propres est orthogonale :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}.$$

6. $P^{-1}AP$ est la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe une matrice orthogonale $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Qu'est-ce que cela implique sur A ?

Résumé

Théorème

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Il existe une matrice orthogonale $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que
${}^tPAP$ soit diagonale
si et seulement si
A est symétrique.

Transformation orthogonale

Lemme

Soit f un endomorphisme d'un espace Euclidien E.
Si la matrice de f est orthogonale dans une base orthonormée de E, alors la matrice de f est orthogonale dans toute base orthonormée de E.

Transformation orthogonale

Lemme

Soit f un endomorphisme d'un espace Euclidien E.
Si la matrice de f est orthogonale dans une base orthonormée de E, alors la matrice de f est orthogonale dans toute base orthonormée de E.

Définition

Un endomorphisme f de E est dit orthogonal si la matrice de f dans une base orthonormée de E est orthogonale.

Endomorphismes/transformations orthogonales

Proposition

Soit f un endomorphisme de E. Sont équivalents :

1. f est orthogonal
2. $\forall x, y \in E : < f(x), f(y) >=< x, y >$
3. $\forall x \in E : \|f(x)\| = \|x\|$.

Transformations orthogonales directes/indirectes

Proposition

Soit f un endomorphisme orthogonale de E. Alors $det(f) = \pm 1$.

Définition

Les transformations/matrices orthogonales de déterminant 1 sont dites directes ;
les transformations/matrices orthogonales de déterminant -1 sont dites indirectes.

Les transformations orthogonales sont également appelées isométries vectorielles.

Groupe orthogonal

Rappels

Soit $O(n,\mathbb{R}) := \{P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t PP = I_n\}$. Alors

1. si $P, Q \in O(n,\mathbb{R})$, alors $PQ \in O(n,\mathbb{R})$;
2. $I_n \in O(n,\mathbb{R})$;
3. si $P \in O(n,\mathbb{R})$, alors $P^{-1} \in O(n,\mathbb{R})$.

En particulier, $O(n,\mathbb{R})$ est un groupe, dit groupe orthogonal.

Notation

On note

$$SO(n,\mathbb{R}) := \{P \in O(n,\mathbb{R}) \mid det(P) = 1\}$$

pour l'ensemble des matrices orthogonales directes.

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?
Lesquelles sont directes/indirectes ?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?
Lesquelles sont directes/indirectes ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?
Lesquelles sont directes/indirectes ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?
Lesquelles sont directes/indirectes ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ?
Lesquelles sont directes/indirectes ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? symétrie par rapport à une droite

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ? Lesquelles sont directes/indirectes ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? symétrie par rapport à une droite
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?

Exemples / contre-exemples en $\mathbb{R}^2$

Quelles matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont des matrices orthogonales ? Lesquelles sont directes/indirectes ?

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$? homothétie de rapport 2
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$? symétrie par rapport à une droite
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$? rotation

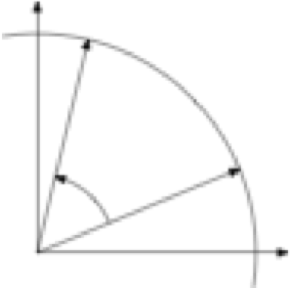
Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

Théorème

Si $A \in SO(2, \mathbb{R})$, alors il existe un angle θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

A représente la rotation d'angle θ de centre 0.



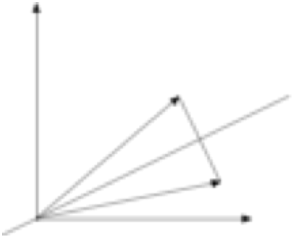
Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

Théorème

Si $A \in O(2,\mathbb{R}) \setminus SO(2,\mathbb{R})$, alors il existe un angle θ tel que

$$A = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sin(\theta) \\ sin(\theta) & -cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

A représente la symétrie orthogonale d'angle $\theta/2$ par rapport à la droite.



Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

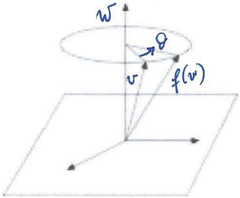
Corollaire

Soit $A \in O(2, \mathbb{R})$.
Si $det(A) = 1$, alors A représente une rotation.
Si $det(A) = -1$, alors A représente une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

Théorème

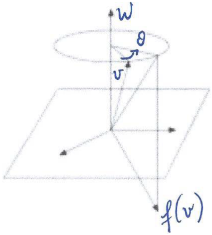
Si $A \in SO(3, \mathbb{R})$, alors A représente une rotation autour d'une droite.



Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

Théorème

Si $A \in O(3, \mathbb{R}) \setminus SO(3, \mathbb{R})$, alors A représente une rotation autour d'une droite D, suivie d'une symétrie orthogonale par rapport au plan $D^{\perp}$.



Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour la matrice orthogonale

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix},$$

on a que $P^{-1}AP$ est diagonale. Comme $det(P) = 1$, le passage de la base canonique à la base

$$\left((\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \right)$$

est une

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Pour la matrice orthogonale

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & \sqrt{3}/3 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & \sqrt{3}/3 \end{pmatrix},$$

on a que $P^{-1}AP$ est diagonale. Comme $det(P) = 1$, le passage de la base canonique à la base

$$\left((\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}) \right)$$

est une rotation.

Test

Vrai ou faux ?

1. Une translation est une isométrie vectorielle.

Test

Vrai ou faux ?

1. Une translation est une isométrie vectorielle.
2. Soient $f : E \longrightarrow$ une application linéaire telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B} := ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$ est une matrice orthogonale. Alors f est une transformation orthogonale.

Test

Vrai ou faux ?

1. Une translation est une isométrie vectorielle.
2. Soient $f : E \longrightarrow$ une application linéaire telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B} := ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$ est une matrice orthogonale. Alors f est une transformation orthogonale.
3. Soit A une matrice symétrique. Alors les valeurs propres de A sont toutes réelles.

Test

Vrai ou faux ?

1. Une translation est une isométrie vectorielle.
2. Soient $f : E \longrightarrow$ une application linéaire telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B} := ((1,0,0),(0,2,0),(0,0,1))$ est une matrice orthogonale. Alors f est une transformation orthogonale.
3. Soit A une matrice symétrique. Alors les valeurs propres de A sont toutes réelles.
4. Soit A une matrice réelle. Alors A est n'est pas toujours diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais l'est toujours sur $\mathbb{C}$.