Chapitre | AL13

Projecteurs et symétries

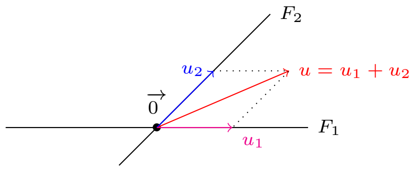
Version du 10-08-2023 à 15:20

Contexte

Dans tout ce qui suit :

- m, n, p et q désigneront des éléments de $\mathbb{N}^*$;
- E désignera un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie qui pourra être $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$ ou $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On rappelle que si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E, pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

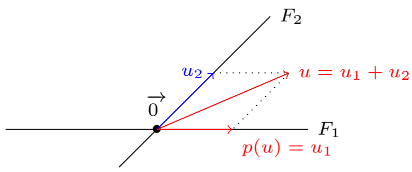


1. Projecteurs

Définition 1| Projecteur

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.
On appelle **projecteur sur** F_1 **de direction** F_2 l'application p définie par :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & p(u) = u_1 \end{array} \right.$$



Théorème 1| Caractère linéaire d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors p est un endomorphisme de E.

Éléments de preuve:

Théorème 2| Caractérisation d'un projecteur

On suppose que p est un endomorphisme de E. Alors : $(p$ est un projecteur$) \quad \Leftrightarrow \quad (p \circ p = p)$.

Éléments de preuve:

Supposons que p soit un projecteur de E sur un sous-espace F_1 de direction F_2 : montrons que $p \circ p = p$, c'est à dire que que : $\forall u \in E,\ p(p(u)) = p(u)$.

En notant $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ est l'unique décomposition de u sur $F_1 + F_2$, on a :

Supposons que p soit un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$: montrons qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires de E tels que p est le projecteur sur F_1 parallèlement à F_2.

Soit alors $u \in E$. On remarque que $u = (u - p(u)) + \underbrace{p(u)}_{\in \mathrm{Im}\,(u)}$.

Méthode 1| Reconnaître un projecteur

Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est un projecteur, on doit donc établir que : $\forall u \in E, \quad f\,(f\,(u)) = f\,(u)$.
On pourra adopter la rédaction suivante :

D'après la caractérisation des projecteurs, on sait que :

$$(\,f \in \mathcal{L}\,(E) \text{ est un projecteur}\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in E,\ f\,(f\,(u)) = f\,(u))$$

Or on a : $\quad \forall u \in E, \quad f\,(f\,(u)) \;=\; \dots$

$$\vdots$$

$$= f\,(u)$$

Ainsi, f est bien un projecteur.

Application 1 | Réf. 4717

Montrer que l'application linéaire $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array} \right.$ est un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 1 | Éléments caractéristiques d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors p est le projecteur sur $\mathrm{Im}\,(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(p)$.
On dit aussi que $\mathrm{Im}\,(p)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par p.

Éléments de preuve:
Le projecteur f sur $\mathrm{Im}\,(p)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(p)$ est par définition : $f : \left| \begin{array}{ccc} E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p) & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & f(u) = u_1 \end{array} \right.$.

Montrons que $f = u$, c'est à dire que : $\forall u \in E,\ p(u) = f(u)$.
Soit alors $u \in E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$. Il existe donc un unique $(u_1, u_2) \in \mathrm{Im}\,(p) \times \mathrm{Ker}\,(p)$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Proposition 2 | Image d'un projecteur

Si p est un projecteur de E, alors $\mathrm{Im}\,(p) = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_E)$ où $\mathrm{Id}_E : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ u & \longmapsto & u \end{array} \right.$.

Éléments de preuve:

Application 2 | Réf. 1414

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $v_1 + v_2 + v_3 = 1$.
On considère l'application linéaire :

$$\Phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & \Phi(x) = x - (x_1 + x_2 + x_3)\, v \end{array} \right.$$

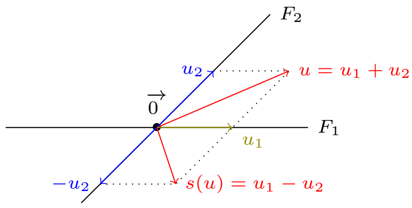
1. Démontrer que Φ est un projecteur.
2. Déterminer les éléments caractéristiques de Φ.

2 . Symétrie

Définition 2| Symétrie

Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.
On appelle **symétrie par rapport à F_1 de direction F_2** l'application s définie par :

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E = F_1 \oplus F_2 & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & s(u) = u_1 - u_2 \end{array} \right.$$



Théorème 3| Caractère linéaire d'une symétrie

Si s est une symétrie de E, alors s est un endomorphisme de E.

Éléments de preuve:

Théorème 4| Caractérisation d'une symétrie

On suppose que s est un endomorphisme de E. Alors : (s est une symétrie) $\Leftrightarrow$ $(s \circ s = \mathrm{Id}_E)$.

Éléments de preuve:

- **Supposons que s soit une symétrie de E par rapport à un sous-espace F_1 de direction F_2 :** montrons que $s \circ s = s$, c'est à dire que : $\forall u \in E,\ s(s(u)) = u$.
  En notant $u = u_1 + u_2$ où $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ est l'unique décomposition de u sur $F_1 + F_2$, on a :

- **Supposons que s soit un endomorphisme de E tel que $s \circ s = \mathrm{Id}_E$:** montrons qu'il existe deux sous-espaces supplémentaires de E tels que s est la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2.
  Soit alors $u \in E$. On remarque que $u = \dfrac{1}{2}(u + s(u)) + \dfrac{1}{2}(u - s(u))$.

Méthode 2| Reconnaître une symétrie

Pour montrer qu'un endomorphisme f de E est une symétrie, on doit donc établir que : $\forall u \in E, \quad f(f(u)) = u$.
On pourra adopter la rédaction suivante :

D'après la caractérisation des projecteurs, on sait que :

$$(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est une symétrie}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u \in E,\ f(f(u)) = u)$$

Or on a : $\quad \forall u \in E, \quad \begin{aligned} f(f(u)) &= \ldots \\ &\vdots \\ &= u \end{aligned}$

Ainsi, f est bien une symétrie.

Application 3| Réf. 4718

Montrer que l'application linéaire $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-7x+2y, -24x+7y) \end{array} \right.$ est une symétrie de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 3| Éléments caractéristiques d'une symétrie

Si s est une symétrie de E, alors s est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$.
On dit aussi que $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par s et $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par s.

Éléments de preuve:
La symétrie f par rapport à $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ de direction $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ est par définition :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) & \longrightarrow & E \\ u = u_1 + u_2 & \longmapsto & f(u) = u_1 - u_2 \end{array} \right.$$

Montrons que $f = u$, c'est à dire que : $\quad \forall u \in E,\ s(u) = f(u)$.
Soit alors $u \in E = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$. Il existe donc un unique $(u_1, u_2) \in \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Théorème 5| Caractère bijectif d'une symétrie

Si s est une symétrie de E, alors s est bijective.

Éléments de preuve:

3 . Traduction matricielle des propriétés caractéristiques

Contexte

Dans ce paragraphe, on désigne par $\mathcal{B}$ une base de E et f est un endomorphisme de E, et on note $n = \dim(E)$.
On note alors A la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$, c'est à dire $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Théorème 6| [

halign=center]Caractération matricielle

Caractérisation matricielle d'un projecteur	Caractérisation matricielle d'une symétrie
$(\, f$ est un projecteur $) \quad \Leftrightarrow \quad (\, A \times A = A\,)$	$(\, f$ est une symétrie $) \quad \Leftrightarrow \quad (\, A \times A = \mathrm{I}_n\,)$

Méthode 3| Identifier un projecteur ou une symétrie à partir d'une représentation matricielle

Pour montrer qu'un endomorphisme de E dont on connaît la matrice A dans une base est un projecteur ou une symétrie, il suffit de déterminer A^2 et de regarder si $A^2 = A$ pour un projecteur ou si $A^2 = \mathrm{I}_n$ pour une symétrie.
On pourra adopter la rédaction suivante :

D'après la caractérisation matricielle des projecteurs/symétries :

$$(\, f \in \mathcal{L}(E) \text{ est un projecteur/symétrie}\,) \quad \Leftrightarrow \quad (\, A^2 = A/\mathrm{I}_n\,)$$

Par un calcul direct, on a que :

$$\begin{pmatrix} & (A) & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} & (A) & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & (A) \text{ ou } \mathrm{I}_n \text{ ou } \ldots & \end{pmatrix}$$

et ainsi, f est bien un projecteur/symétrie.

Exemple 1| Nature d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

? f est-il un projecteur ? une symétrie ?

4. Base adaptée et représentation matricielle

Théorème 7| Matrice dans une base adaptée

Matrice d'un projecteur dans une base adaptée

On suppose que p un projecteur de E sur F_1 de direction F_2 et on note $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$.

Alors la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Image de la base de } F_1 & \text{Image de la base de } F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_2 \end{array}$$

Matrice d'une symétrie dans une base adaptée

On suppose que s une symétrie de E par rapport à F_1 de direction F_2 et on note $\mathcal{B}$ une base adaptée à la somme directe $E = F_1 \oplus F_2$.

Alors la matrice de s dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Image de la base de } F_1 & \text{Image de la base de } F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_1 \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{Base de } F_2 \end{array}$$

Exemple 2| Exploitation de la forme adaptée

On désigne par p le projecteur sur $F_1 = \mathrm{Vect}\,((1,0,1),(0,1,-1))$ de direction $F_2 = \mathrm{Vect}\,((1,-1,1))$.

Déterminer la matrice A de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Éléments de réponse:
D'après le théorème de concaténation des bases pour les sous-espaces supplémentaires, la famille $\mathcal{B} = ((1,0,1),(0,1,-1),(1,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$ permettant de définir p.

Par suite la matrice B de p dans la base $\mathcal{B}$ est : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, d'après la formule de changement de bases pour les endomorphismes, on a que $B = Q^{-1}AQ$ c'est à dire que $A = QBQ^{-1}$.

Puisque $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, on en déduit alors que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Lien projecteur et symétrie

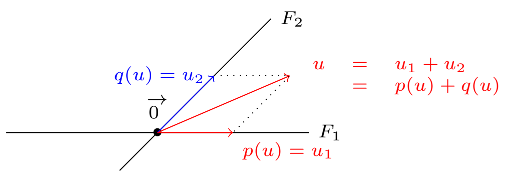
Proposition 4| Relations projecteurs/symétrie

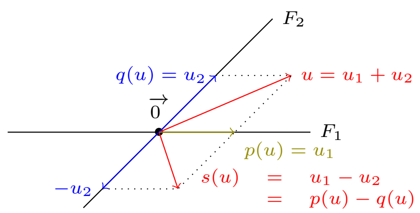
Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces supplémentaires de E.
On désigne par :

- p le projecteur sur F_1 de direction F_2 ;
- q le projecteur sur F_2 de direction F_1 ;
- s la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2.

On a alors que : $\forall u \in E, \left\{ \begin{array}{rcl} p(u)+q(u) & = & u \\ s(u) & = & 2p(u)-u \end{array} \right.$

Ces deux relations s'écrivent aussi : $p+q=\mathrm{Id}_E$ et $s=2p-\mathrm{Id}_E$.





Éléments de preuve:

Application 4| Réf. 4720

On considère l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est le projecteur sur $F_1=\mathrm{Vect}\,((1,1))$ de direction $F_2=\mathrm{Vect}\,((1,-1))$.
2. En déduire l'expression analytique de la symétrie par rapport à F_1 de direction F_2.

6. Plan d'étude d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$ donné par sa matrice

Méthode 4| Montrer qu'un endomorphisme est un projecteur et le caractériser

? Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, on souhaite :

Montrer que f est un projecteur

Caractérisation matricielle

$\left(\text{$f$ est un projecteur}\right) \Updownarrow \left(A \times A = A\right)$

Le calcul de A^2 donne...

- $A^2 = A$ → Conclusion : f est un projecteur
- $A^2 \neq A$ → Conclusion : f n'est pas un projecteur

Identifier les éléments caractérisant f

→ Il s'agit donc de déterminer :

- L'ensemble des vecteurs invariants par f → On cherche donc tous les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = x$ → Traduction matricielle → $x = (x_1, \dots, x_n)$ est solution du système de représentation matricielle $(A - \mathrm{I}_n \,|0)$ → Explicitation des solutions → $\left(\text{$x$ est invariant par f}\right) \Updownarrow \left(x \in \mathrm{Vect}\,(\heartsuit)\right)$
- L'ensemble des vecteurs d'image nulle par f → On cherche donc tous les vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $f(x) = \overrightarrow{0}$ → Traduction matricielle → $x = (x_1, \dots, x_n)$ est solution du système de représentation matricielle $(A\,|0)$ → Explicitation des solutions → $\left(\text{$x$ est d'image nulle par f}\right) \Updownarrow \left(x \in \mathrm{Vect}\,(\clubsuit)\right)$

→ Conclusion : f est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\,(\heartsuit)$ de direction $\mathrm{Vect}\,(\clubsuit)$

On peut adopter la rédaction suivante :
La caractérisation des projecteurs se traduit matriciellement par :

$$\left(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est un projecteur}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^2 = A\right)$$

Par un calcul direct, on a que $A^2 = A$ et ainsi, f est bien un projecteur.
Par ailleurs, en notant :

$$F_1 = \{\text{vecteurs invariants par } f\}$$

$$F_2 = \mathrm{Ker}\,(f)$$

on sait que f est le projecteur sur F_1 de direction F_2.

Détermination de F_1 :

$$\left(x = (x_1, \dots, x_n) \in F_1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \end{array}\right)$$

On a : $(A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \sim_L \dots \sim_L \dots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_1 = \mathrm{Vect}\,(\heartsuit)$

Détermination de F_2 :

$$\left(x = (x_1, \dots, x_n) \in F_2\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \dots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A \,|\, 0) \end{array}\right)$$

On a : $(A \,|\, 0) \sim_L \dots \sim_L \dots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_2 = \mathrm{Vect}\,(\clubsuit)$

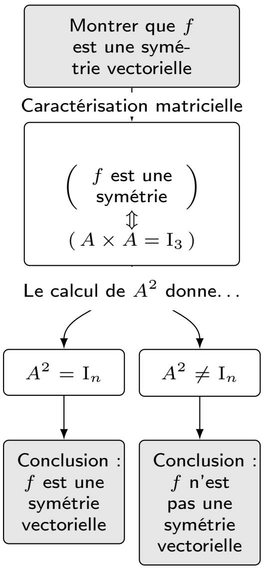
Conclusion :

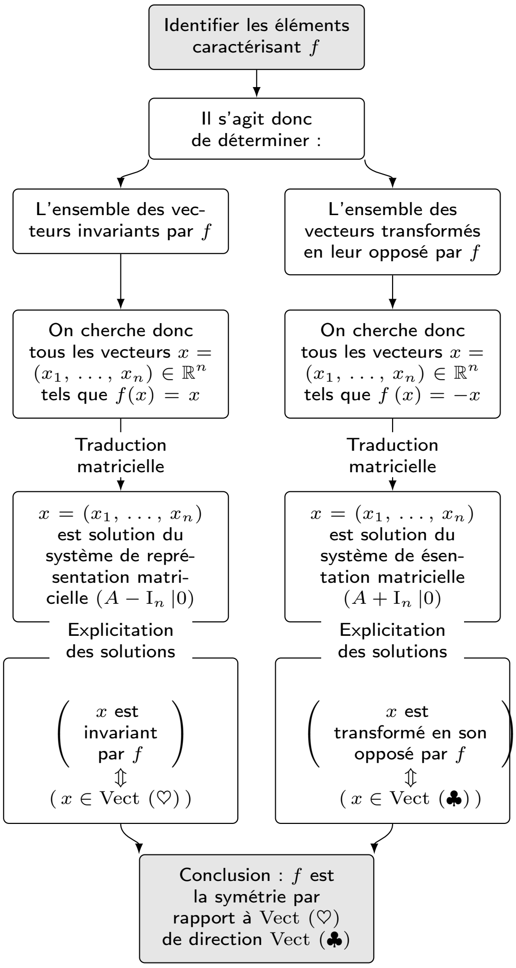
$\boxed{\text{$f$ est le projecteur sur $\mathrm{Vect}\,(\heartsuit)$ de direction $\mathrm{Vect}\,(\clubsuit)$}}$

7 . Plan d'étude d'une symétrie de $\mathbb{R}^n$ donnée par sa matrice

Méthode 5| Montrer qu'un endomorphisme est une symétrie et la caractériser

Pour $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^n$, on souhaite :





On peut adopter la rédaction suivante :
La caractérisation des symétries se traduit matriciellement par :

$$(f \in \mathcal{L}(E) \text{ est une symétrie,}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(A^2 = \mathrm{I}_n\right)$$

Par un calcul direct, on a que $A^2 = \mathrm{I}_n$ et ainsi, f est bien une symétrie.
Par ailleurs, en notant :

$$F_1 = \{\text{vecteurs invariants par } f\}$$

$$F_2 = \{\text{vecteurs transformés en leur opposés par } f\}$$

on sait que f est la symétrie vectorielle par rapport à F_1 de direction F_2.

Détermination de F_1 :

$$(x = (x_1, \ldots, x_n) \in F_1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \ldots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \end{array}\right)$$

On a : $(A - \mathrm{I}_n \,|\, 0) \sim_L \ldots \sim_L \ldots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_1 = \mathrm{Vect}\ (\heartsuit)$

Détermination de F_2 :

$$(x = (x_1, \ldots, x_n) \in F_2) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{c} (x_1, \ldots, x_n) \text{ est solution} \\ \text{du système de} \\ \text{représentation} \\ \text{matricielle } (A + \mathrm{I}_n \,|\, 0) \end{array}\right)$$

On a : $(A + \mathrm{I}_n \,|\, 0) \sim_L \ldots \sim_L \ldots$

Par conséquent, on en déduit que : $F_2 = \mathrm{Vect}\ (\clubsuit)$

Conclusion :

$\boxed{f \text{ est la symétrie par rapport à } \mathrm{Vect}\ (\heartsuit) \text{ de direction } \mathrm{Vect}\ (\clubsuit)}$