CH VI : Convergence des suites réelles

I. Suites réelles convergentes

I.1. Définitions

Définition *Suites réelles convergentes*

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ un nombre réel (fini).

- La suite (u_n) **converge vers** ℓ (ou admet la limite ℓ / ou tend vers ℓ) quand n tend vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon)}$$

- Par abus de langage, on omettra de préciser « quand n tend vers $+\infty$ ».
- Lorsque (u_n) converge vers ℓ, on note :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

- Énonçons cette propriété sous forme de phrase mathématique :
  « quelque soit la précision ε (> 0) choisie, on peut trouver un rang à partir duquel les éléments de la suite ne s'écartent pas de ℓ de plus de ε »

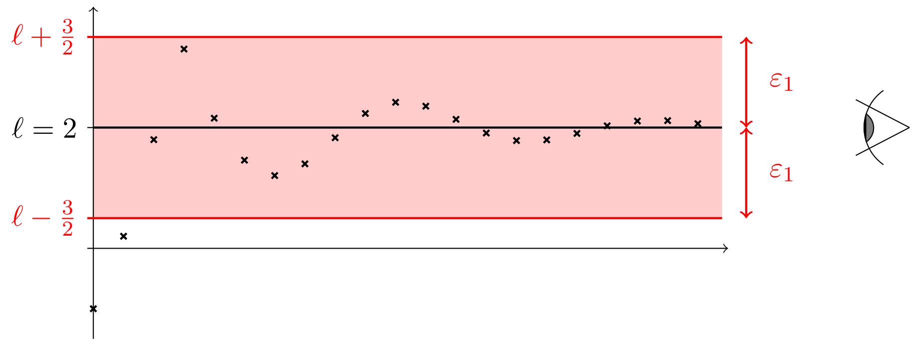
Note
La notation « $\varepsilon > 0$ » est une abréviation de « $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ ».

I.2. Représentation graphique

On considère (u_n) une suite convergeant vers le réel $\ell = 2$.
On dispose de la représentation graphique des premiers termes de la suite et on cherche à représenter la notion de convergence sur ce graphique.

1) Si on choisit une précision $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$

a) En considérant (u_n) comme une fonction :

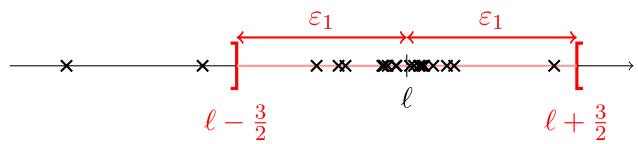


- La propriété de convergence énonce que pour cette précision $\varepsilon_1 = \frac{3}{2}$ donnée, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ (ici $n_1 = 2$) tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon_1$$

- Graphiquement, cela signifie qu'à partir du rang $n_1 = 2$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans la bande rouge.

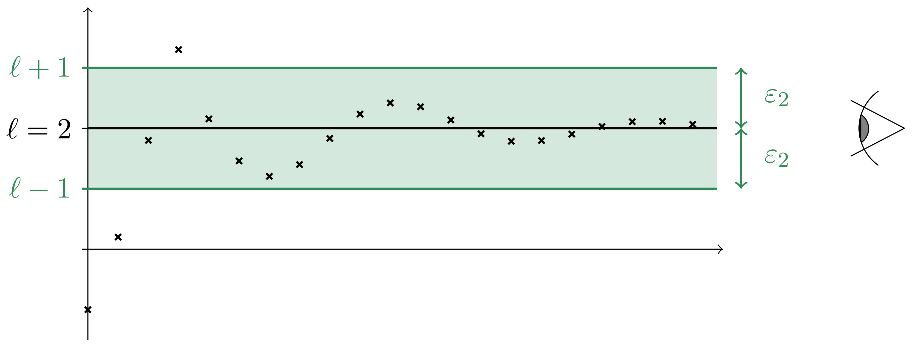
b) En considérant la position des éléments (u_n) sur la droite réelle :



- À partir du rang $n_1 = 2$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans l'intervalle $]\ell - \frac{3}{2}, \ell + \frac{3}{2}[$. Autrement dit, l'intervalle $]\ell - \frac{3}{2}, \ell + \frac{3}{2}[$ contient tous les termes de (u_n) sauf les deux premiers (u_0 et u_1).

2) Si on choisit une précision $\varepsilon_2 = 1$

a) En considérant (u_n) comme une fonction :

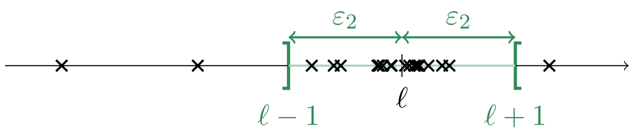


- La propriété de convergence énonce que pour cette précision $\varepsilon_2 = 1$ donnée, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ (ici $n_2 = 4$) tel que :

$$\forall n \geqslant n_2,\ |u_n - \ell| < \varepsilon_2$$

- Graphiquement, cela signifie qu'à partir du rang $n_2 = 4$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans la bande verte.

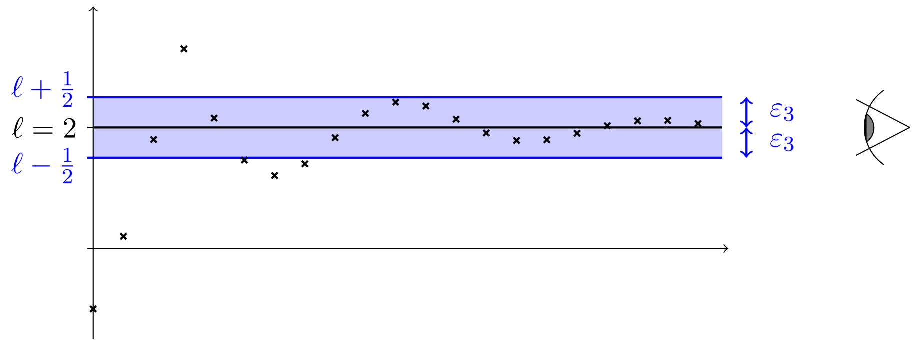
b) En considérant la position des éléments (u_n) sur la droite réelle :



- À partir du rang $n_2 = 4$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans l'intervalle $]\ell-1, \ell+1[$. Autrement dit, l'intervalle $]\ell-1, \ell+1[$ contient tous les termes de (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux (u_0, u_1, et u_3 en l'occurrence).

3) Si on choisit une précision $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$

a) En considérant (u_n) comme une fonction :

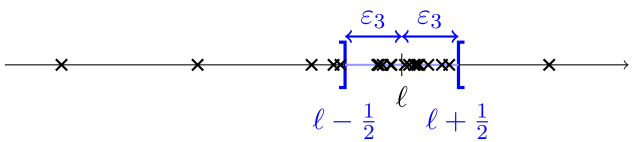


- La propriété de convergence énonce que pour cette précision $\varepsilon_3 = \frac{1}{2}$ donnée, il existe un rang $n_3 \in \mathbb{N}$ (ici $n_3 = 7$) tel que :

$$\forall n \geqslant n_3,\ |u_n - \ell| < \varepsilon_3$$

- Graphiquement, cela signifie qu'à partir du rang $n_3 = 7$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans la bande bleue.

b) En considérant la position des éléments (u_n) sur la droite réelle :



- À partir du rang $n_3 = 7$, tous les éléments de la suite (u_n) sont situés dans l'intervalle $]\ell-\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}[$. Autrement dit, l'intervalle $]\ell-\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}[$ contient tous les termes de (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux (u_0, u_1, u_3, u_5 et u_6 en l'occurrence).

Exemple

- Une suite constante est convergente.
- Une suite stationnaire est convergente.
- La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.

  (à partir de quel rang peut-on assurer une précision de 10^{-8} ?)
- La suite $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 1.

Définition *Des définitions équivalentes*

1) (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux.
(c'est la définition donnée par le programme officiel)

2) (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon}$$

(avec l'abus de notation « $\forall n \geqslant n_0$ »)

Proposition 1.

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers la limite } \ell \quad \Leftrightarrow \quad (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & (u_n - \ell) \text{ converge vers } 0 \\ \Leftrightarrow\ & \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |(u_n - \ell) - \cancel{0}| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow\ & (u_n) \text{ converge vers } \ell \end{aligned}$$

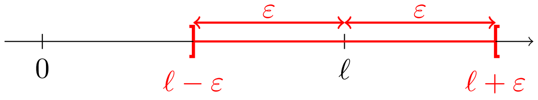
□

On ne parlera pas de la limite d'une suite (u_n) si on n'a pas prouvé au préalable que (u_n) était convergente.

Exercice

Soit (u_n) une suite tendant vers une limite $\ell > 0$.
Démontrer que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n > 0$.

La démonstration tient dans le dessin suivant.



On choisit ε de sorte que : $\ell - \varepsilon \in]0, \ell[$. Par exemple : $\varepsilon = \frac{\ell - 0}{2} = \frac{\ell}{2}$.

I.3. Suites réelles divergentes

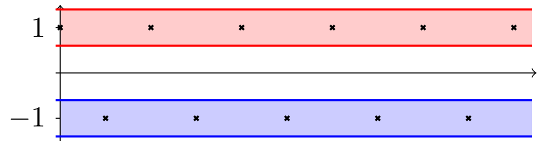
Définition *Suites réelles divergentes*

- Une suite réelle (u_n) sera dite **divergente** si elle n'est pas convergente.
- Autrement dit, (u_n) est divergente s'il n'existe pas d'éléments $\ell \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Les « suites convergeant vers $+\infty$ (ou $-\infty$) » (dont on verra la définition plus loin) sont des suites divergentes.

Exemple

- La suite $((-1)^n)$ est divergente. Notons (u_n) cette suite. Alors :
  - × tous les termes u_m dont l'indice m est pair sont tels que : $u_m = 1$. Ces termes sont situés dans toute bande centrée en 1.
  - × tous les termes u_p dont l'indice p est pair sont tels que : $u_p = -1$. Ces termes sont situés dans toute bande centrée en -1.



  Il n'y a pas de $\ell \in \mathbb{R}$ tel que toute bande centrée en ℓ contienne (à partir d'un certain rang) à la fois les termes d'indice pair et d'indice impair.

I.4. Propriétés des suites convergentes

Théorème 1. *(Unicité de la limite)*

Soit (u_n) une suite réelle.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R} \\ u_n \to \ell_2 \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 = \ell_2}$$

Autrement dit, si une suite (u_n) admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$, celle-ci est unique.

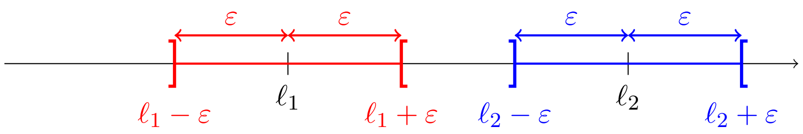
Démonstration.
Par l'absurde, supposons $u_n \to \ell_1 \in \mathbb{R}$, $u_n \to \ell_2 \in \mathbb{R}$ et $\texttt{NON}(\ell_1 = \ell_2)$.
Comme $\ell_1 \neq \ell_2$, on peut supposer (quitte à renommer ces limites) $\ell_2 > \ell_1$.

Soit $\varepsilon = \dfrac{\ell_2 - \ell_1}{3}$.
(ce choix est guidé par le dessin ci-après : il faut faire en sorte que les intervalles bleus et rouges ne s'intersectent pas)

1) Comme $u_n \to \ell_1$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$.

2) Comme $u_n \to \ell_2$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell_2| < \varepsilon$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-après.



Notons $N = \max(n_1, n_2)$.

- À partir du rang N, tous les termes de (u_n) sont dans l'intervalle rouge.
- À partir du rang N, tous les termes de (u_n) sont dans l'intervalle bleu.

Impossible ! $\square$

Remarque

- Ce théorème permet de justifier (après coup !) la notation $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$, qui n'a de sens que par unicité de la limite.

> Le programme officiel précise « [qu'] aucune démonstration concernant les résultats [du chapitre convergence] n'est exigible ».
>
> - Ce type de démonstration, dite « avec les ε », est de ce fait considéré comme très technique.
> - Par contre, il faut savoir faire le dessin, affirmer que tous les termes (sauf un nombre fini d'entre eux) de la suite (u_n) sont dans l'intervalle rouge, mais aussi dans le bleu et aboutir ainsi à une contradiction.

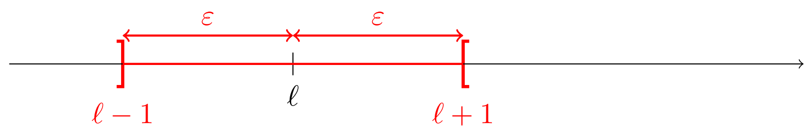
Théorème 2.

Soit (u_n) une suite réelle.

$$\boxed{(u_n) \text{ convergente } \Rightarrow \ (u_n) \text{ bornée}}$$

Autrement dit, toute suite convergente est bornée.

Démonstration.
Notons ℓ la limite de la suite (u_n). Choisissons une précision $\varepsilon = 1$.
Alors, à partir d'un certain rang n_0, on sait que $|u_n - \ell| < 1$.



Autrement dit, on a : $\forall n \geqslant n_0, \ \ell - 1 < u_n < \ell + 1$.
La suite (u_n) est donc bornée à partir d'un certain rang (n_0 en l'occurrence).
Il reste à montrer qu'elle est bornée tout court. Pour ce faire, on doit considérer les éléments de la suite précédant le rang n_0 : $u_0, u_1, \ldots, u_{n_0-1}$.
Ces éléments sont en nombre fini et possèdent donc un minimum $a = \min\{u_n \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$ et un maximum $A = \max\{u_n \mid n \in [\![0, n_0 - 1]\!]\}$.

Si on note $m = \min(a, \ell - 1)$ et $M = \max(A, \ell + 1)$,
on a alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ m \ \leqslant \ u_n \ \leqslant \ M$ $\square$

Remarque

- Par contraposée, on en déduit qu'une suite non bornée ne peut converger.
- Cet énoncé n'est pas une équivalence.
  En effet, une suite bornée n'est pas forcément convergente.
  Considérer par exemple la suite $((-1)^n)$

Proposition 2.

Soit (u_n) *est une suite réelle.*
Soit $(v_n) = (u_{\varphi(n)})$ *une suite extraite de* (u_n).

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad\Rightarrow\quad u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell}$$

Autrement dit, si (u_n) *admet la limite* ℓ*, alors il en est de même de toutes ses suites extraites.*

Démonstration.
On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et on montre $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

2) Or, comme φ est strictement croissante, il existe un rang n_1 tel que :

$$\forall n \geqslant n_1,\ \varphi(n) \geqslant n_0$$

3) On en conclut, d'après le point *1)* que : $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$. □

Remarque
Cette proposition permet de démontrer de la divergence de suites.
Considérons une suite (u_n).

1) Si (u_n) admet une sous-suite divergente, alors (u_n) diverge.
2) Si (u_n) admet deux sous-suites tendant vers deux limites distinctes, alors (u_n) diverge.

Exemple
Montrer que la suite $((-1)^n)$ est divergente.

I.5. Opérations sur les suites convergentes

I.5.a) Somme de deux suites convergentes

Théorème 3.

Soit (u_n) *une suite réelle convergeant vers* ℓ_1.
Soit (v_n) *une suite réelle convergeant vers* ℓ_2.
Alors la suite $(u_n + v_n)$ *est convergente, de limite* $\ell_1 + \ell_2$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n+v_n \to \ell_1+\ell_2}$$

Démonstration.

- La convergence de (u_n) permet d'affirmer qu'à partir d'un certain rang n_1, la distance de u_n à ℓ_1 est aussi petite que ce que l'on souhaite.
- Il en est de même de la distance de v_n à ℓ_2 à partir d'un certain rang n_2.
- Or, par l'inégalité triangulaire, on a :

$$|(u_n + v_n) - (\ell_1 + \ell_2)| = |(u_n - \ell_1) + (v_n - \ell_2)| \leqslant |u_n - \ell_1| + |v_n - \ell_2|$$

Ainsi, à partir du rang $n = \max(n_1, n_2)$, la distance de $u_n + v_n$ à $\ell_1 + \ell_2$ est aussi petite que ce que l'on souhaite. □

Remarque

- Ce résultat n'est évidemment pas une équivalence. On peut en effet trouver deux suites (u_n), (v_n) telles que $(u_n + v_n)$ est convergente et (u_n) et (v_n) divergentes. Par exemple :
  × $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -(-1)^n$.
  La suite $(u_n + v_n)$ est alors constante ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_n + v_n = 0$). Elle converge donc vers 0 alors que (u_n) et (v_n) ne possèdent pas de limite.
  × $u_n = n$ et $v_n = -n + \dfrac{1}{n}$.
  On a : $u_n + v_n = \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
  (définition à venir)

I.5.b) Produit d'une suite convergente par un réel λ

Théorème 4.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit (u_n) *une suite réelle convergeant vers* ℓ.

Alors la suite (λu_n) *est convergente, de limite* $\lambda\ell$.

$$\boxed{u_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad \lambda u_n \to \lambda\ell}$$

Démonstration.
Il suffit de remarquer que $|\lambda u_n - \lambda\ell| = |\lambda||u_n - \ell|$. Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme (u_n) converge vers ℓ, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

2) On en déduit que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n - \ell| = |\lambda||\lambda u_n - \lambda\ell| < |\lambda|\dfrac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$.

Ainsi, si la distance de u_n à ℓ est aussi petite que souhaitée, il en est de même de la distance de $\lambda.u_n$ à $\lambda.\ell$. □

I.5.c) Produit d'une suite de limite nulle par une suite bornée

Théorème 5.

Soit (u_n) *une suite réelle de limite* 0.

Soit (v_n) *une suite bornée.*

Alors la suite $(u_n \times v_n)$ *est convergente, de limite* 0.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to 0 \\ (v_n)\ \textit{bornée} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \times v_n \to 0}$$

Démonstration.
Soit $\varepsilon > 0$.

1) Soit $M \in \mathbb{R}$ une borne de (v_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n\ v_n| = |u_n|\ |v_n| \leqslant |u_n|\ M$.

2) Comme (u_n) tend vers 0, il existe un rang n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}$.

On en déduit : $\forall n \geqslant n_0,\ |u_n\ v_n| = |u_n|\ |v_n| \leqslant |u_n|\ M \leqslant \frac{\varepsilon}{M}\ M = \varepsilon$. □

Exemple

Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{1-n}{n+n^2}\right)$?

Il suffit de remarquer que : $\dfrac{1-n}{n+n^2} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-n}{1+n}$.

Or : $\dfrac{1}{n} \to 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leqslant \dfrac{1-n}{1+n} \leqslant 0$.

On en déduit que $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1-n}{1+n} \to 0$.

I.5.d) Produit de deux suites convergentes

Théorème 6.

Soit (u_n) *une suite réelle de limite* ℓ_1.

Soit (v_n) *une suite réelle de limite* ℓ_2.

Alors la suite produit $(u_n \times v_n)$ *converge vers* $\ell_1 \times \ell_2$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ u_n \to \ell_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \times v_n \to \ell_1 \times \ell_2}$$

Démonstration.
On remarque d'abord que : $u_n\ v_n - \ell_1\ \ell_2 = (u_n - \ell_1)v_n + \ell_1(v_n - \ell_2)$.

- $(u_n - \ell_1)$ converge vers 0 et (v_n) est convergente donc bornée.
  Ainsi, $(u_n - \ell_1)v_n \to 0$.
- $(v_n - \ell_2)$ converge vers 0 donc $\ell_1(v_n - \ell_2) \to 0$.

On en conclut que : $u_n\ v_n - \ell_1\ \ell_2 \to 0$ ce qui équivaut à : $u_n\ v_n \to \ell_1\ \ell_2$. □

I.5.e) Quotient de deux suites convergentes

Théorème 7.

Soit (u_n) une suite réelle de limite $\ell \neq 0$.

Alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$
- *est définie à partir d'un certain rang,*
- *converge vers la limite $\dfrac{1}{\ell}$.*

$$\boxed{u_n \to \ell \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{u_n} \to \frac{1}{\ell}}$$

Démonstration.
Supposons $\ell > 0$ (le cas $\ell < 0$ se traite de manière similaire).
À partir d'un certain rang, on a : $\dfrac{\ell}{2} < u_n < \dfrac{3\ell}{2}$. *(pourquoi ?)*

À partir de ce rang, on a : $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{\ell |u_n|} \leqslant \dfrac{|u_n - \ell|}{\ell \frac{\ell}{2}}$

et comme on peut contrôler la distance $|u_n - \ell|$,
il en est de même de la distance $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right|$. □

Théorème 8.

Soit (u_n) une suite réelle de limite ℓ_1.
Soit (v_n) une suite réelle de limite $\ell_2 \neq 0$.

Alors la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$
- *est définie à partir d'un certain rang,*
- *converge vers la limite $\dfrac{\ell_1}{\ell_2}$.*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{u_n}{v_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}}$$

Démonstration.
- D'après le théorème précédent, la suite $\left(\dfrac{1}{v_n}\right)$ est définie (au moins à partir d'un certain rang) et converge vers $\dfrac{1}{\ell_2}$. On en déduit que $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie.
- De plus, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

Ainsi, par produit de suites convergentes, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est convergente de limite $\ell_1 \times \dfrac{1}{\ell_2} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$. □

Exercice
Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = \dfrac{2n^2 + n + 1}{n^2 + 3}$.

$$u_n = \frac{2n^2 + n + 1}{n^2 + 3} = \frac{2n^2}{n^2} \times \frac{1 + \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{2n^2}}{1 + \frac{3}{2n^2}} = 2 \times \frac{1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n^2}}{1 + \frac{3}{2n^2}}$$

Or on a $1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n^2} \to 1$, et $1 + \dfrac{3}{2n^2} \to 1$.
On en déduit que (u_n) est convergente, de limite 2.

I.5.f) Compatibilité avec la valeur absolue

Théorème 9.

Soit (u_n) une suite réelle de limite ℓ.
Alors la suite $(|u_n|)$ est convergente de limite $|\ell|$.

$$\boxed{u_n \to \ell \quad \Rightarrow \quad |u_n| \to |\ell|}$$

Démonstration.
Par inégalité triangulaire, on a : $||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$.
On peut contrôler la distance $|u_n - \ell|$, il en est donc de même de $||u_n| - |\ell||$. □

Remarque

- En général, il n'y a pas équivalence : une suite convergeant en valeur absolue n'est pas nécessairement convergente.
- Par exemple, la suite $(|(-1)^n|)$ est convergente $(\forall n \in \mathbb{N},\ |(-1)^n| = 1)$ mais la suite $((-1)^n)$ est divergente.
- Par contre, l'équivalence est réalisée lorsque $\ell = 0$.
  En effet, on a :

$$\begin{array}{rl} & (|u_n|) \text{ converge vers } 0 \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n| - 0| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||u_n|| = |u_n| < \varepsilon \\ \Leftrightarrow & (u_n) \text{ converge vers } 0 \end{array}$$

Exemple

La suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$ converge vers 0 car : $\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right| = \dfrac{1}{n} \to 0$.

Le théorème ci-dessous généralise le résultat précédent.

Théorème 10. *(Théorème de composition des limites)*

Soit (u_n) une suite réelle de limite $a \in \mathbb{R}$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en a une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors la suite $(f(u_n))$ est convergente de limite ℓ.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to a \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \lim_{x \to a} f(x) = \ell}$$

Démonstration.
Hum, on s'emballe un peu : la démo nécessite la notion de limite d'une fonction en un point (*cf* chapitre limites / continuité d'une fonction). ☐

I.6. Compatibilité avec la relation d'ordre

I.6.a) Démontrer des inégalités pour les suites convergentes

Proposition 3. *(« Passage à la limite » dans les inégalités)*

Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

a) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \geqslant a$ alors on a : $\ell \geqslant a$.*
On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n \geqslant a \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell \geqslant a}$$

b) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $u_n \leqslant b$ alors on a : $\ell \leqslant b$.*
On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell \leqslant b}$$

c) *S'il existe un rang n_0 à partir duquel $a \leqslant u_n \leqslant b$ alors on a : $a \leqslant \ell \leqslant b$.*
On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ a \leqslant u_n \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \ a \leqslant \ell \leqslant b}$$

Démonstration.
Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Démontrons par l'absurde que : $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a) \ \Rightarrow\ \ell \geqslant a$.

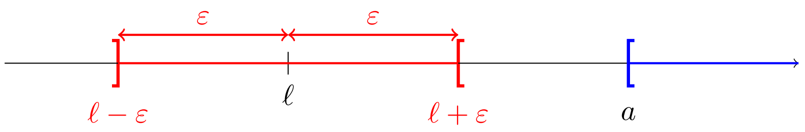
On suppose donc l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant a$ ainsi que la propriété $\texttt{NON}(\ell \geqslant a)$ (*i.e.* $\ell < a$).

On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{a-\ell}{2}$.

1) Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

2) Or on sait que : $u_n \geqslant a$ à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-dessous.



- Ainsi, à partir du rang $N = \max(n_0, n_1)$, les termes de la suite (u_n) se trouvent toutes dans l'intervalle rouge (d'après le point ***1)***).
- Or, à partir du rang $N = \max(n_0, n_1)$, les termes de la suite (u_n) se trouvent toutes dans l'intervalle bleu (d'après le point ***2)***).
- Le choix de ε assure que l'intervalle rouge et l'intervalle bleu ne se rencontrent pas. Les deux points précédents se contredisent donc. □

Remarque

- On parle parfois de « passage à la limite » dans les inégalités. Il faut faire attention avec ce terme. En effet, ce passage n'est possible que si on a prouvé au préalable que la suite (u_n) est convergente.
- En particulier, il ne faut pas confondre ce résultat avec le théorème d'encadrement présenté plus loin.

- Il est facile d'écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes.
En effet, comme : $u_n > a \ \Rightarrow\ u_n \geqslant a$ (inégalité stricte implique large) :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n > a \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ell \geqslant a} \qquad \boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ell \leqslant b}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell \\ a < u_n < b \end{array}\right\} \Rightarrow\ a \leqslant \ell \leqslant b}$$

Exemple

- Considérons une suite (u_n) tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
Si (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$, on obtient, par passage à la limite dans l'inégalité que : $\ell \geqslant 0$ et non pas $\ell > 0$.
- C'est par exemple le cas de la suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Théorème 11. *(Théorème de comparaison des limites)*
Soit (u_n) une suite convergente, de limite $\ell_1 \in \mathbb{R}$.
Soit (v_n) une suite convergente, de limite $\ell_2 \in \mathbb{R}$.
Supposons de plus que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$.
On a alors : $\ell_1 \ \leqslant\ \ell_2$.
On peut résumer cette proposition comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \\ u_n \leqslant v_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ \ell_1 \leqslant \ell_2}$$

Démonstration.
Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant réciproquement vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$ et $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Comme précédemment, on raisonne par l'absurde pour montrer que : $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n) \ \Rightarrow\ \ell_1 \leqslant \ell_2$.

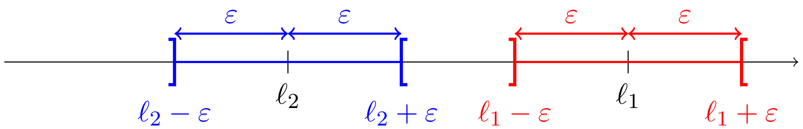
On suppose donc l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$ ainsi que la propriété `NON`$(\ell_1 \leqslant \ell_2)$ (*i.e.* $\ell_1 > \ell_2$).

On choisit alors $\varepsilon = \dfrac{\ell_1 - \ell_2}{3}$.

1) Comme $u_n \to \ell_1$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|u_n - \ell_1| < \varepsilon$.

2) Comme $v_n \to \ell_2$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $|v_n - \ell_2| < \varepsilon$.

Cette situation est résumée par la représentation graphique ci-après.



Notons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$.

× À partir du rang N, les termes de (u_n) se trouvent dans l'intervalle rouge.

× À partir du rang N, les termes de (v_n) se trouvent dans l'intervalle bleu.

× Ainsi, à partir du rang N, $u_n > v_n$, ce qui contredit la définition de n_0. □

Remarque

- Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on peut encore parler de « passage à la limite » dans les inégalités.
- On peut écrire un énoncé similaire avec des inégalités strictes. En effet, comme : $u_n > v_n \ \Rightarrow\ u_n \geqslant v_n$ (inégalité stricte implique large), on a :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to \ell_1 \\ v_n \to \ell_2 \\ u_n > v_n \end{array}\right\} \Rightarrow \ \ell_1 \geqslant \ell_2}$$

I.6.b) Démontrer de la convergence

Théorème 12. *(Théorème d'encadrement)*

Soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites réelles telles que :

- *(u_n) est convergente, de limite ℓ.*
- *(w_n) est convergente, de même limite ℓ.*
- *Il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.*

Alors la suite (v_n) est convergente de limite ℓ.

On peut résumer ce théorème comme suit.

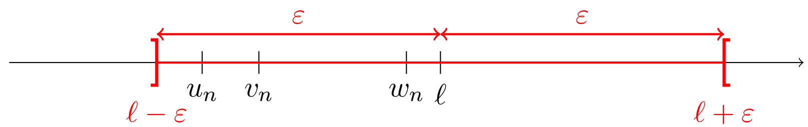
$$\boxed{\begin{array}{ccccc} u_n & \leqslant & v_n & \leqslant & w_n \\ \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} & & \Big\downarrow {\scriptstyle n \to +\infty} \\ \ell & \leqslant & \ell & \leqslant & \ell \end{array}}$$

Démonstration.
Considérons un intervalle ouvert contenant ℓ.

- Tous les termes de (u_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Tous les termes de (w_n) (sauf un nombre fini) sont dans cet intervalle.
- Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

On en conclut que tous les termes de (v_n) sont dans cet intervalle.

On peut rédiger cette démonstration « avec les ε » en s'appuyant sur la représentation graphique ci-dessous :



Il s'agit de démontrer que $v_n \to \ell$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N,\ |v_n - \ell| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

1) Comme $u_n \to \ell$, il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_1,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$.
Autrement dit : $\forall n \geqslant n_1,\ -\varepsilon < u_n - \ell < \varepsilon$.

2) Comme $w_n \to \ell$, il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant n_2,\ |w_n - \ell| < \varepsilon$.
Autrement dit : $\forall n \geqslant n_2,\ -\varepsilon < w_n - \ell < \varepsilon$.

3) Par hypothèse, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. On en déduit que :
$\forall n \geqslant n_0,\ u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell$

Combinons ces informations. Notons $N = \max(n_0, n_1, n_2)$.
Pour tout $n \geqslant N$, on a : $-\varepsilon < u_n - \ell \leqslant v_n - \ell \leqslant w_n - \ell < \varepsilon$.
Autrement dit : $\forall n \geqslant N,\ |v_n - \ell| < \varepsilon$. □

Remarque

- Dans cet énoncé, on ne suppose pas (v_n) convergente mais on le **démontre**.
- Ainsi, rédiger en argumentant par « un passage à la limite » serait une erreur logique (et donc sanctionnée comme telle). On ne peut « passer à la limite » que si l'on sait que la suite est convergente.
- Ce théorème est aussi appelé « théorème des gendarmes ».
L'idée est la suivante : deux gendarmes viennent d'attraper un voleur et l'encadrent en lui saisissant chacun un bras. Les gendarmes convergent (*i.e.* se dirigent) vers le poste de police. Ainsi encadré, le voleur n'a d'autre choix que se diriger lui aussi vers le poste de police.

Exercice *(appliquer le théorème d'encadrement)*

a) Quelle est la limite de la suite $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

On remarque que : $\dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{1}{n}}$. Or, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$.

b) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n^2} \leqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2n}$.

Pour $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a : $a \leqslant b \ \Leftrightarrow\ a^2 \leqslant b^2$.

- Tout d'abord, remarquons que :
$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \leqslant 1 + \frac{1}{2n} \ \Leftrightarrow\ 1 + \frac{1}{n} \ \leqslant\ 1 + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n} + \frac{1}{4n^2} \ \Leftrightarrow\ 0 \ \leqslant\ \frac{1}{4n^2}$$
Ainsi, l'inégalité de droite est vérifiée.
- De même, on a :
$$1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \ \leqslant\ \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^2 - \frac{2}{n^2}\left(1 + \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{n^4} \ \leqslant\ 1 + \frac{1}{n}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{1}{n} - \frac{7}{4n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} \ \leqslant\ 1 + \frac{1}{n} \ \Leftrightarrow\ \frac{1}{n^4} \ \leqslant\ \frac{7}{4n^2} + \frac{1}{n^3}$$
Enfin, on a : $\dfrac{1}{n^4} \leqslant \dfrac{7}{4n^2} + \dfrac{1}{n^3} \ \Leftrightarrow\ 1 \leqslant \dfrac{7}{4}n^2 + n$.
Cette dernière égalité est vérifiée car $n \geqslant 1$.
Ainsi, l'inégalité initiale est aussi vérifiée.

c) En déduire la limite de la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - n\right)$.

En multipliant l'inégalité précédente par n (> 0), on obtient :
$$n + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \leqslant n + \frac{1}{2}$$
D'où, en retirant n de chaque côté :
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant \sqrt{n^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n \leqslant \frac{1}{2}$$
On remarque alors que : $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

On en conclut que la suite $\left(\sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - n\right)$ est convergente, et que sa limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

II. Généralisation au cas des limites infinies

II.1. Définition

Définition *Suite divergeant vers l'infini*

Soit (u_n) une suite de réels.

- On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A)}$$

Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A}$$

- Ceci signifie que les termes de la suite deviennent, à partir d'un certain rang, aussi grands que souhaités.
- On dit que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$ si :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n < -A)}$$

Ce que l'on peut écrire, avec l'abus de notation habituel :

$$\boxed{\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n < -A}$$

Remarque

- Une suite (u_n) qui tend vers $+\infty$ est une suite **divergente**. La notion de convergence est réservée aux suites admettant une limite **finie**. Cependant, par abus, on parlera de suite « tendant vers l'infini » et on utilisera quand même la notation :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \to +\infty$$

- Il est à noter que l'unicité de la limite s'étend au cas des limites infinies. Ainsi, une suite ne peut à la fois diverger vers $+\infty$ et vers $-\infty$.
- Il n'est pas nécessaire, dans la définition de suite divergente, de supposer $A > 0$. Plus précisément, on a :

$$\boxed{u_n \to +\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n > A}$$

$$\boxed{u_n \to -\infty \ \Leftrightarrow\ \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n < A}$$

Propriété *immédiates*

Soit (u_n) une suite réelle.

1) Si (u_n) diverge vers $+\infty$ (réciproquement $-\infty$) alors elle est positive (réciproquement négative) à partir d'un certain rang.

$$\boxed{u_n \to +\infty \ \Rightarrow\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant 0}$$

$$\boxed{u_n \to -\infty \ \Rightarrow\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant 0}$$

2) Si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
(réciproque fausse ! Considérer $((-1)^n n)$)

3) $\boxed{(u_n \to -\infty) \ \Leftrightarrow\ (-u_n \to +\infty)}$

Démonstration.

1) Notons $A = 0$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n > A = 0$.

2) Supposons par l'absurde que $u_n \to +\infty$ et (u_n) majorée.
- Notons M l'un de ses majorants.
- On note $A = M$. Comme $u_n \to +\infty$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel : $u_n > A = M$.

Impossible !

3) La démonstration tient dans le fait que :

$$u_n < -A \ \Leftrightarrow\ -u_n > A$$

□

II.2. Opérations - formes indéterminées

Dans la suite, on parle de *forme indéterminée* (et on note F.I.) quand on ne peut déterminer, de manière générale, la limite d'une opération sur les suites. Dans ce cas, il faudra faire une étude au cas par cas.

II.2.a) Somme de deux suites

Somme $u_n + v_n$			
v_n \ u_n	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Le cas de la somme de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{\infty - \infty}$

II.2.b) Produit de deux suites

Produit $u_n \times v_n$					
v_n \ u_n	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Le cas du produit de deux suites apporte une F.I. : $\boxed{0 \times \infty}$

II.2.c) Passage à l'inverse

On suppose ici que l'on peut former le quotient $\frac{1}{u_n}$, ce qui revient à dire que $u_n \neq 0$, au moins à partir d'un certain rang.

Inverse $\frac{1}{u_n}$				
u_n	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$	$+\infty$	$-\infty$
Si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	0	
Si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	$\frac{1}{\ell}$	$-\infty$		0

II.2.d) Quotient

Quotient $\frac{u_n}{v_n}$						
v_n \ u_n		$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 > 0$		$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$		$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	$v_n>0$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
	$v_n<0$	$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.
$-\infty$		0	0	0	F.I.	F.I.

Le cas du quotient de deux suites apporte deux F.I. : $\boxed{\frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}}$

Remarque

- Dans le cas où $u_n \to 0$, on traite deux cas pour l'inverse $\dfrac{1}{u_n}$:
  - × soit $u_n > 0$ (au moins à partir d'un certain rang),
  - × soit $u_n < 0$ (au moins à partir d'un certain rang).

  Autrement dit, on suppose (u_n) de signe constant (au moins à partir d'un certain rang). Si ce n'est pas le cas, on peut démontrer que $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est divergente. En effet :
  - × si (w_n) est la suite extraite de (u_n) contenant les termes de (u_n) de signe strictement positif, alors (w_n) diverge vers $+\infty$,
  - × si (z_n) est la suite extraite de (u_n) contenant les termes de (u_n) de signe strictement négatif, alors (z_n) diverge vers $-\infty$.

  En vertu du théorème sur les suites extraites (*qui s'étend au cas des suites divegeant vers l'infini*), $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite.

- Considérons par exemple $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

  Alors $u_n \to 0$ et $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{n}{(-1)^n} = (-1)^n\ n$.

  Ainsi, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite.

II.2.e) Comment déterminer la limite d'une F.I.

Tout d'abord résumons les F.I. rencontrées lors de l'étude des différentes opérations algébriques :

$$\boxed{\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty}}$$

Afin de lever une F.I., on pourra penser à utiliser les méthodes suivantes.

1) Factoriser par le terme dominant (*i.e.* celui ayant la plus forte croissance).

2) Penser à la quantité conjuguée.

Le point ***1)*** sera revu en fin de chapitre dans la section « Croissances comparées ».

Exercice
Déterminer les limites, lorsqu'elles existent, des suites suivantes.

a) $\left(\sqrt{n^2(n+1)} - n\right)$

b) $\left(\dfrac{n\ (\ln n)^5 - 2n^2 + 7}{-n^2 + \mathrm{e}^n}\right)$

c) $\left(\dfrac{n^3 - 2n^2 + 7}{7n^3 + n}\right)$

d) $\left(\sqrt{n^2\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} - n\right)$

Démonstration.

b) $u_n = \dfrac{n\ (\ln n)^5 - 2n^2 + 7}{-n^2 + \mathrm{e}^n} = \dfrac{-2n^2}{\mathrm{e}^n}\ \dfrac{\frac{n\ (\ln n)^5}{-2n^2} + 1 + \frac{7}{-2n^2}}{\frac{-n^2}{\mathrm{e}^n} + 1}$

Or on a :

× $\dfrac{n\ (\ln n)^5}{-2n^2} = -\dfrac{(\ln n)^5}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.
(*cf* fin de chapitre)

× $\dfrac{7}{-2n^2} = -\dfrac{7}{2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que : $\dfrac{n\ (\ln n)^5}{-2n^2} + 1 + \dfrac{7}{-2n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

De même, $\dfrac{-n^2}{\mathrm{e}^n} + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car $\dfrac{-n^2}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées.

Enfin, comme $\dfrac{-2n^2}{\mathrm{e}^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que $u_n \to 0$. □

II.3. Compatibilité avec la relation d'ordre

Proposition 4.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :

$$\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant v_n$$

a) *Si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.*
On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ u_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad v_n \to +\infty}$$

b) *Si $v_n \to -\infty$, alors $u_n \to -\infty$.*
On peut résumer cette propriété comme suit.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \leqslant v_n \\ v_n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u_n \to -\infty}$$

Démonstration.

a) L'idée de la démonstration est la suivante. Si u_n devient aussi grand que souhaité, comme $v_n \geqslant u_n$, v_n devient aussi que souhaité aussi.
Démontrons-le rigoureusement.
Soit $A > 0$.
- Comme $u_n \to +\infty$, il existe un rang n_1 à partir duquel : $u_n \geqslant A$.
- Notons $N = \max(n_0, n_1)$.
  À partir de ce rang N, on a : $v_n \geqslant u_n \geqslant A$.

Ceci démontre : $v_n \to +\infty$.

b) La démonstration est similaire. Si v_n devient aussi petit que souhaité, comme $u_n \leqslant v_n$, il en est de même pour u_n.
On peut aussi appliquer le résultat précédent à la suite $(-u_n)$ qui est telle que $-u_n \geqslant -v_n$ avec $-v_n \to +\infty$. □

II.4. Compatibilité avec la valeur absolue

Théorème 13.
Soit (u_n) une suite réelle divergente de limite ∞ ($+\infty$ ou $-\infty$).
Alors la suite $(|u_n|)$ est divergente de limite $+\infty$.

$$\boxed{u_n \to \infty \quad \Rightarrow \quad |u_n| \to +\infty}$$

Démonstration.
Supposons que (u_n) tend vers $+\infty$.
- À partir d'un certain rang n_0, les termes de la suite u_n sont positifs.
- Ainsi : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n = |u_n|$.

On en déduit que $|u_n| \to +\infty$.
Le cas où (u_n) tend vers $-\infty$ se traite de manière similaire. □

En fait, le théorème de composition des limites peut s'écrire avec des limites infinies. On notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble formé des réels et de $+\infty$ et $-\infty$.

Autrement dit : $\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}}$

Théorème 14. *(Théorème de composition des limites)*
Soit (u_n) une suite réelle de limite $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui admet en a une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Alors la suite $(f(u_n))$ admet la limite ℓ.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \to a \\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \lim_{n \to +\infty} f(u_n) \ = \ \lim_{x \to a} f(x) \ = \ \ell}$$

Démonstration.
Encore une fois, c'est un résultat du chapitre limites / continuité d'une fonction (à venir !). □

III. Les théorèmes de monotonie

III.1. Théorème de convergence monotone

Théorème 15. *(Croissance et majoration)*
Soit (u_n) une suite de réels. Alors on a :

1)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ (u_n) \text{ majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R}}$$

- *Plus précisément, on démontre que :* $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- *Ce qui permet d'assurer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$.

2)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ (u_n) \text{ non majorée}\end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to +\infty}$$

Démonstration.

1) Technique. Il s'agit de démontrer que : $u_n \to \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
Non fait ici (hors programme).
Il reste à démontrer que : $\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ u_n \to \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell$

- C'est immédiat si l'on sait que $\ell = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
(attention : cette notion est hors programme !)
- Si l'on ignore ce résultat, on suppose par l'absurde que la suite (u_n) croissante, convergente vers ℓ et que $\texttt{NON}(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell)$.
Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > \ell$.
Comme (u_n) est croissante, on a : $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant u_{n_0}$.
Par passage à la limite dans cette inégalité, on obtient : $\ell \geqslant u_{n_0}$.
En combinant avec la première inégalité, on a alors : $\ell \geqslant u_{n_0} > \ell$.

2) Soit (u_n) une suite croissante.
On démontre par l'absurde que : (u_n) non majorée $\Rightarrow$ $u_n \to +\infty$. □

Théorème 16. *(Décroissance et minoration)*
Soit (u_n) une suite de réels. Alors on a :

1)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ décroissante}\\ (u_n) \text{ minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow (u_n) \text{ converge vers une limite } \ell \in \mathbb{R}}$$

- *Plus précisément, on démontre que :* $\ell = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
- *Ce qui permet d'assurer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \ell$.

2)
$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ décroissante}\\ (u_n) \text{ non minorée}\end{array}\right\} \Rightarrow u_n \to -\infty}$$

Démonstration.
Il suffit d'appliquer le résultat précédent à la suite (v_n) de terme général $v_n = -u_n$. En effet :
× (u_n) décroissante $\Leftrightarrow$ $(-u_n)$ croissante,
× (u_n) minorée $\Leftrightarrow$ $(-u_n)$ minorée. □

Remarque

- La notion de borne supérieure / inférieure n'est pas au programme de la section ECE et son utilisation pourra donc être sanctionnée aux concours.
- On peut donc, dans un exercice, avoir à démontrer que :

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}(u_n) \text{ croissante}\\ u_n \to \ell\end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell}$$

Il faudra alors procéder par l'absurde.

Exercice

On considère la suite (u_n) définie par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)\end{array}\right.$

a. Montrer que (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
b. Étudier le sens de variation de (u_n).
c. En déduire que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ telle que : $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.

III.2. Suites adjacentes

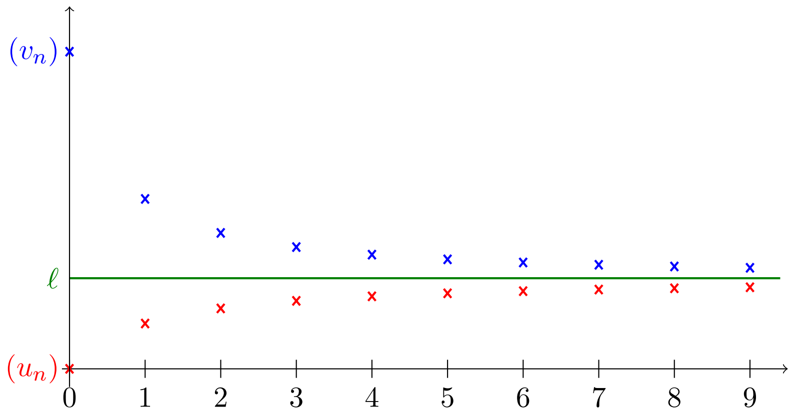
Définition
Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si :

1) (u_n) est croissante,

2) (v_n) est décroissante,

3) $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Représentation graphique



Théorème 17.
Si deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.

$$\left.\begin{array}{l} \textit{1) } (u_n) \text{ est croissante,} \\ \textit{2) } (v_n) \text{ est décroissante,} \\ \textit{3) } u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont convergentes} \\ \text{et admettent la même limite} \end{array}$$

Démonstration.
Il s'agit essentiellement de démontrer que la représentation graphique précédente est correcte.

a) La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante
Soit $n \in \mathbb{N}$. $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{\leqslant 0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{\leqslant 0} \leqslant 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$
Par hypothèse, $(v_n - u_n)$ est convergente.
Par théorème, elle est donc bornée.
Cette suite étant décroissante et minorée, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n - u_n \ \geqslant \ \inf_{n \in \mathbb{N}} (v_n - u_n) = 0$$

(comme précisé dans la remarque suivant le théorème de convergence monotone, il faudrait faire cette démonstration par l'absurde)

c) La suite (u_n) est majorée et la suite (v_n) est minorée
On peut maintenant démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant v_0$.

- En effet, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ v_n \leqslant v_0$ puisque (v_n) est décroissante.
- Ainsi, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$.

De manière analogue, on démontre que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ u_0 \leqslant v_n$.

d) Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite

- (u_n) est croissante et majorée (par v_0) donc convergente vers $\ell_1 \in \mathbb{R}$.
- (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc convergente vers $\ell_2 \in \mathbb{R}$.

Ainsi, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n - \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell_1 - \ell_2$.
(la première égalité est seulement vérifiée pour des suites convergentes)
Or par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.
On en conclut que : $\ell_1 = \ell_2$. □

Exercice
On considère la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

a) Démontrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ son adjacentes.
b) En déduire que la suite (S_n) converge.

Démonstration.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (S_{2n}) est croissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

- (S_{2n-1}) est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)-1} - S_{2n-1} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} \leqslant 0 \end{aligned}$$

- $S_{2n} - S_{2n-1} = \dfrac{(-1)^{2n}}{2n} = \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n-1}) sont adjacentes.
  Elles sont donc convergentes vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

b) Les termes d'indice pair de (S_n) sont aussi proches que souhaité de ℓ.
C'est aussi le cas des éléments d'indice impair.
Ainsi, tous les éléments de (S_n) sont aussi proches que souhaité de ℓ.
On en conclut que (S_n) est convergente, de limite ℓ. □

IV. Comportement asymptotique des suites usuelles

IV.1. Suites arithmétiques

Théorème 18.
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
1) *Si $r = 0$, alors (u_n) est constante et converge donc vers u_0.*
2) *Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
3) *Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.*

Démonstration.
1) $u_n = u_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_0$.
2) (u_n) est croissante et non majorée.
3) (u_n) est décroissante et non minorée. □

IV.2. Suites géométriques

Théorème 19.
Soit q un réel tel que $q \neq 0$.
1) *Si $q = 1$, alors (q^n) est constante ($= 1$) et converge donc vers 1.*
2) *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
3) *Si $|q| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
4) *Si $q \leqslant -1$, alors (q^n) n'admet pas de limite.*

Démonstration.
1) $q^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
2) $\dfrac{q^{n+1}}{q^n} = q > 0$ donc (q^n) est (strictement) croissante.
Supposons par l'absurde que (q^n) est majorée.

Il existe alors $A > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ q^n \leqslant A$.

Or : $q^n \leqslant A \ \Leftrightarrow\ n \ln q \leqslant \ln A \ \Leftrightarrow\ n \leqslant \dfrac{\ln A}{\ln q}$

Notons alors $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln A}{\ln q} \right\rfloor + 1$.

Ainsi, $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n_0 > \dfrac{\ln A}{\ln q}$. Or cette égalité équivaut à $q^{n_0} > A$.

Ceci contredit l'hypothèse.
(q^n) est croissante non majorée donc diverge vers $+\infty$.

3) $|q^n| = |q|^n$ et $(|q^n|)$ est décroissante et minorée par 0.
Ainsi, $(|q|^n)$ est convergente vers $\ell \geqslant 0$. On peut alors montrer par l'absurde que ℓ ne peut être strictement positive. On en conclut que $\ell = 0$.
Ainsi, $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (cf remarque suivant le théorème 9).

4) Notons $a = -q$. Alors $a \geqslant 1$.
Si $a = 1$: alors $q^n = (-1)^n$ et donc (q^n) n'a pas de limite.
Si $a > 1$: alors $q^n = (-a)^n = (-1)^n\ a^n$.
Ainsi, $q^{2n} = a^{2n} \to +\infty$ et $q^{2n+1} = -a^{2n+1} \to -\infty$.
(q^n) admet deux sous-suites divergeant vers des infinis différents. On en conclut que (q^n) est divergente sans limite infinie. □

Remarque

- Dans ce théorème, nous traitons seulement un cas particulier des suites géométriques : celles dont le premier terme $u_0 = 1$.
- De manière générale, une suite (u_n) admet pour terme général : $u_n = q^n \times u_0$ où $q \neq 0$ est la raison de (u_n). Le théorème précédent s'adapte en prenant en compte la valeur de u_0.
- Par exemple, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$ si $q > 1$ et $u_0 < 0$.
- On déduit de ce théorème que : $e^n \to +\infty$, $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^n \to +\infty$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \to 0$.

V. Croissances comparées

V.1. Négligeabilité

Définition Négligeabilité

Soit (u_n) une suite réelle.
Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).

- On dit que (u_n) est **négligeable** devant (v_n) (ou **dominée** par (v_n)) si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

- Lorsque (u_n) est négligeable devant (v_n), on note $u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$.
- À l'oral, on dit que « u_n est un petit o de v_n ».
(o = 15$^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet)

Remarque

- On s'intéresse ici au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, on cherche ici à les classer suivant leur dominance, ce dont on se sert lors de la « mise en facteur du terme dominant ».
- Lorsque $u_n = o(v_n)$, on pourra utiliser, la notation $u_n << v_n$.
- Cette notation est parfois trompeuse.
Il ne faut surtout pas confondre : $u_n << v_n$ et $u_n \leqslant v_n$.
(d'ailleurs $(u_n << v_n) \not\Rightarrow (u_n \leqslant v_n)$ et $(u_n \leqslant v_n) \not\Rightarrow (u_n << v_n)$)
- On réservera donc cette notation pour l'écriture d'échelles asymptotiques (*cf* théorème 22).

Théorème 20.

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^b}{n^a} = 0}$$

$$\boxed{\forall a > 0, \forall q > 1, \ \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0}$$

Remarque

- Ceci signifie que pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$: $(\ln n)^b << n^a << q^n$.
- On dira que la croissance logarithmique est beaucoup plus faible que la croissance polynomiale qui est elle-même beaucoup plus faible que la croissance exponentielle.
- Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\forall a > 0, \forall b > 0, q > 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{(\ln n)^b} = +\infty} \qquad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty}$$

- On en déduit aussi que : $\boxed{\forall a > 0, |q| < 1, \quad \lim_{n\to+\infty} n^a \ q^n = 0}$

Théorème 21. *(Critère de d'Alembert)*
Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs tel que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) Si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2) Si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

3) Si $\ell = 1$, on ne peut conclure par ce théorème.

Démonstration.
Non faite ici. Se reporter au TD. *(résultat non exigible)* □

Ce théorème permet la comparaison des suites (n^a), (q^n), $(n!)$, (n^n).
Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 22. *(Échelle de comparaison asymptotique)*
Pour tout $a > 0$, $b > 0$, $q > 1$, on a :

$$\boxed{(\ln n)^b \quad << \quad n^a \quad << \quad q^n \quad << \quad n! \quad << \quad n^n}$$

V.2. Équivalence

Définition Équivalence

Soit (u_n) une suite réelle.

Soit (v_n) une suite telle que $v_n \neq 0$ (à partir d'un certain rang).

- On dira que (u_n) est **équivalente** à (v_n) et on notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} \ = \ 1}$$

Remarque

- On s'intéresse encore au comportement asymptotique (à l'infini) des suites. Plus précisément, dire que (u_n) est (v_n) sont équivalentes, c'est dire que ces deux suites ont même comportement asymptotique.
- Trouver un équivalent (v_n) à une suite (u_n) c'est trouver une suite (v_n) possédant le même comportement asymptotique que (v_n) et dont l'expression est plus simple.

  $\hookrightarrow$ c'est la démarche que nous avons suivi lors de la recherche de limite d'une suite (u_n) lorsque l'on a mis en facteur le terme dominant.
  Ce terme dominant est en fait un équivalent de u_n.

Théorème 23.

Soit (u_n), (v_n), (w_n), (z_n) des suites réelles.
(lorsque nécessaire, on ajoutera l'hypothèse que ces suites ne s'annulent pas à partir d'un certain rang)

L'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ vérifie les propriétés suivantes.

1) *Réflexivité :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

2) *Commutativité :*

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n}$$

3) *Transitivité :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n}$$

4) *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \times w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times z_n}$$

5) *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{z_n}}$$

6) *Équivalent et limites :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ v_n \to \ell\ (\in \overline{\mathbb{R}}) \end{array}\right\} \Rightarrow\ u_n \to \ell}$$

Démonstration.

1) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

2) Il suffit d'écrire : $\dfrac{v_n}{u_n} = \dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1} = 1$.

3) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n}{w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{v_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

4) Il suffit d'écrire : $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times z_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \times \dfrac{w_n}{z_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

5) Il suffit d'écrire : $\dfrac{\frac{u_n}{w_n}}{\frac{v_n}{z_n}} = \dfrac{u_n}{w_n} \times \dfrac{z_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times 1 = 1$.

6) Il suffit d'écrire : $u_n = \dfrac{u_n}{v_n}\ v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \times \ell = \ell$. □

Remarque

- La propriété ***6)*** peut s'exprimer comme suit.
  Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui admettent chacune une limite (éventuellement infinie). On a alors :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \ \Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n}$$

- Ce résultat n'est pas une équivalence dans le cas général. En effet :
  × Si $u_n = n$ et $v_n = n^2$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ mais $\cancel{u_n \sim v_n}$.
  × Si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \dfrac{1}{n^2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ mais $\cancel{u_n \sim v_n}$.
- Dans le cas où (u_n) et (v_n) sont convergentes de même limite $\ell \neq 0$, la réciproque est bien vérifiée. En effet :

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Remarque

Le théorème précédent stipule que l'opérateur $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est compatible avec les opérations de produit et quotient.

Il faut faire attention, ce n'est pas le cas de toutes les opérations.

1) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n+\sqrt{n} \\ v_n = n+\ln(n) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

$$\left.\begin{array}{l} w_n = -n \\ z_n = -n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} z_n$$

mais $\sqrt{n} \;=\; \cancel{u_n + w_n \sim v_n + z_n} \;=\; \ln(n).$

On ne peut sommer des équivalents !

2) Considérons l'exemple suivant.

$$\left.\begin{array}{l} u_n = n+1 \\ v_n = n \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

mais $\mathrm{e}^{n+1} \;=\; \cancel{\mathrm{e}^{u_n} \sim \mathrm{e}^{v_n}} \;=\; \mathrm{e}^{n}$ puisque $\dfrac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}} = \mathrm{e} \cancel{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}} 1$

De manière générale, on en peut appliquer de fonction de part et d'autre d'une équivalence !

Ici, on avait en fait le résultat suivant :

$$\boxed{\mathrm{e}^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{v_n} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{v_n}} \to 1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{u_n-v_n} \to 1 \;\Leftrightarrow\; u_n - v_n \to 0}$$

Exercice

Limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \dfrac{(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4})}{9n+10}$?

1) $3n+4 \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n$ car $\dfrac{3n+4}{3n} = 1 + \dfrac{4}{3n} \to 1$

Ainsi : $(3n+4)^3 = (3n+4)(3n+4)(3n+4) \underset{n\to+\infty}{\sim} (3n)(3n)(3n) = 3^3 n^3$.

2) $8n^{-2}+2n^{-4} \underset{n\to+\infty}{\sim} 8n^{-2}$ car $\dfrac{8n^{-2}+2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{2n^{-4}}{8n^{-2}} = 1 + \dfrac{1}{4n^2} \to 1$

On en déduit que : $(3n+4)^3(8n^{-2}+2n^{-4}) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3^3 n^3 \times 8n^{-2} = 3^3\ 8n$

3) $9n+10 \underset{n\to+\infty}{\sim} 9n$ car $\dfrac{9n+10}{9n} = 1 + \dfrac{10}{9n} \to 1$

On en déduit que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3^{\cancel{3}}\ 8\cancel{n}}{\cancel{9}\cancel{n}} = 3 \times 8 = 24.$

Ainsi : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 24.$