Décomposition en éléments simples.

Remarques générales.

Décomposition en éléments simples :

- les décompositions en éléments simples que vous pouvez être amenés à faire concernent des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- toute autre décomposition (notamment sur un autre corps comme $\mathbb{Q}$) est hors programme.

- ces décompositions sont des décompositions formelles et ne se préoccupent pas de domaine de définition.

- la décomposition d'une fraction rationnelle suppose toujours que la fraction proposée a été mise **sous forme de fraction irréductible**, autrement dit dans l'écriture : $F = \frac{A}{B}$, les polynômes A et B sont supposés premiers entre eux, c'est-à-dire sans racine commune (**complexe dans tous les cas**).

- enfin, on admet que toute fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$(X) ou $\mathbb{C}$(X) admet une unique décomposition en éléments simples.

Dans toute la suite, on se donne une fraction rationnelle : $F = \frac{A}{B}$, mise sous forme irréductible.

Eléments techniques communs à $\mathbb{C}$(X) et $\mathbb{R}$(X).

1. Partie entière (à connaître) :

- Une fraction rationnelle a toujours une partie entière, obtenue comme quotient du numérateur par le dénominateur.
  Autrement dit, si : $A = B.Q + R$, avec : $\deg(R) < \deg(B)$, on a :
  $F = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$, avec : $Q \in$ **K**[X], et : $\deg(R) < \deg(B)$.
  En particulier, si : $\deg(A) < \deg(B)$, alors : $Q = 0$.

Remarque : il n'est pas nécessaire de calculer explicitement le polynôme R.

exemple : la partie entière de la fraction $\frac{X+1}{X^2+2}$, est nulle.

exemple : la partie entière de la fraction $\frac{X^3+X+1}{X^2+1}$, est X, quotient de la division du numérateur par le dénominateur.

2. Factorisation du dénominateur :

- qu'on soit dans $\mathbb{R}$(X) ou $\mathbb{C}$(X), on décompose ensuite B en produit de facteurs irréductibles.

Dans ℂ(X), cela revient à trouver les pôles de la fraction, mais dans ℝ(X) peuvent apparaître des polynômes du second degré.

exemple dans ℂ(X) : $\dfrac{X}{X^3+X}$ a une partie entière nulle, et trois pôles simples qui sont $0, i, -i$.

exemple dans ℝ(X) : $\dfrac{X+1}{X^5+2.X^3+X}$ a une partie entière nulle, et son dénominateur B se factorise en : $X^5+2.X^3+X = X.(X^2+1)^2$.

3. Termes correspondant aux pôles simples de la fraction (à connaître) : éléments simples de première espèce

- si la fraction F admet un pôle simple α (soit une racine simple de son dénominateur B), alors la contribution de ce pôle à la décomposition est du type $\dfrac{a}{X-\alpha}$, où a est une constante.

  La valeur de a, avec les notations précédentes, peut se calculer selon en particulier les différentes méthodes suivantes :

  $a = \dfrac{A(\alpha)}{B'(\alpha)} = \dfrac{R(\alpha)}{B'(\alpha)}$, avec : $F = \dfrac{A}{B}$, et : $A = B.Q + R$.

  $a = \dfrac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}$, où on a posé : $B = B_1.(X-\alpha)$.

exemple : La fraction (irréductible) $\dfrac{X^2}{X^3-1}$ admet trois pôles simples qui sont $1, j, j^2$.

Sa partie entière est nulle.

On peut donc la décomposer sous la forme : $\dfrac{X^2}{X^3-1} = 0 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-j} + \dfrac{c}{X-j^2}$.

Chacune des trois valeurs a, b ou c peut se calculer avec une des méthodes précédentes.

Par exemple : $a = \dfrac{X^2}{3.X^2}\Big|_{X=1} = \dfrac{1^2}{3.1^2} = \dfrac{1}{3}$, et c'est aussi la valeur de b et de c.

Finalement : $\dfrac{X^2}{X^3-1} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{X-1} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{X-j} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{X-j^2}$.

4. Pôles multiples de la fraction : éléments simples de première espèce

- si la fraction F admet un pôle multiple α (double, triple, etc…), soit une racine multiple du dénominateur B, la contribution de ce pôle d'ordre k à la décomposition de la fraction est du type :

  $\dfrac{a_1}{(X-\alpha)} + \dfrac{a_2}{(X-\alpha)^2} + \ldots + \dfrac{a_k}{(X-\alpha)^k}$, où les $a_1, \ldots, a_k$ sont des constantes.

  Seule la valeur a_k se calcule facilement, par exemple avec :

  $a_k = \dfrac{A(\alpha)}{B_k(\alpha)}$, où on a posé : $B = B_k.(X-\alpha)^k$.

  Il existe des techniques pour déterminer d'un coup tous les coefficients a_i qui ne sont pas au programme (par exemple la division dite « suivant les puissances croissantes de l'indéterminée »).

On indiquera plus loin quelques techniques pour les déterminer en pratique (et on voit un cas dans l'exemple qui suit).

exemple : la fraction $\dfrac{X^3}{(X-1)^2}$, admet une partie entière non nulle, égale à $X+2$, et un pôle double qui est 1.

Sa décomposition théorique est donc : $\dfrac{X^3}{(X-1)^2} = X+3+\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{(X-1)^2}$.

La valeur de b est : $b=\dfrac{1^3}{1}=1$, et il reste à déterminer a que l'on peut obtenir en évaluant par exemple l'égalité précédente en 0, et : $0=2-a+1$, soit : $a=3$.

Finalement : $\dfrac{X^3}{(X-1)^2} = X+3+\dfrac{3}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}$

Eléments techniques propres à ℝ(X).

Dénominateur comportant un facteur irréductible de degré 2 : éléments simples de seconde espèce

Dans le cas où le dénominateur comporte un facteur du type $(X^2+2.\alpha.X+\beta)^k$ sans racine réelle, la contribution de ce terme dans la décomposition est du type :

$$\frac{a_1.X+b_1}{(X^2+2.\alpha.X+\beta)}+\ldots+\frac{a_k.X+b_k}{(X^2+2.\alpha.X+\beta)^k}.$$

Il n'y a pas de technique générale à connaître pour déterminer les a_i et b_i.

Néanmoins, dans le cas où k vaut 1, on peut utiliser les pôles complexes conjugués correspondant à ce polynôme de degré 2.

exemple : $\dfrac{X+1}{X^3+X}$.

La partie entière de cette fraction est nulle (dans ℂ(X) ou ℝ(X)).
Si on la décompose dans ℂ(X), elle admet trois pôles simples.
Si en revanche on travaille dans ℝ(X), le dénominateur se décompose en $X.(X^2+1)$.
On peut alors utiliser la décomposition correspondant aux pôles i et $-i$ dans ℂ(X) pour obtenir le terme cherché dans ℝ(X) en utilisant :

$\dfrac{X+1}{X^3+X}=0+\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X-i}+\dfrac{c}{X+i}$, et : $a=1$, $b=\dfrac{i+1}{-3+1}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$, et : $c=\dfrac{-i+1}{-3+1}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{2}$.

On peut alors rassembler les deux derniers termes et obtenir :

$$\frac{b}{X-i}+\frac{c}{X+i}=\frac{-X+1}{X^2+1}.$$

Finalement, dans ℝ(X), on obtient : $\dfrac{X+1}{X^3+X}=\dfrac{1}{X}+\dfrac{-X+1}{X^2+1}$.

Plus généralement, utilisation de pôles conjugués pour une fraction réelle :

Si la fraction est réelle et qu'on recherche sa décomposition dans $\mathbb{C}(X)$ pour obtenir celle dans $\mathbb{R}(X)$, on peut aussi utiliser une invariance par conjugaison, comme dans le cas vu au-dessus.

exemple : $\dfrac{X+1}{X^3+X} = 0 + \dfrac{a}{X} + \dfrac{b}{X-i} + \dfrac{c}{X+i}$,

et b et c sont conjugués puisque la fraction est réelle, invariante par conjugaison.

Utilisation d'une propriété de parité.

Si la fraction est une fonction paire (ou impaire) de la variable X, on peut exploiter cette propriété.

exemple : $\dfrac{X^2+3}{X^4-1} = 0 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+1} + \dfrac{c.X+d}{X^2+1}$.

La fraction doit être invariante en changeant X en $-X$ et la décomposition aussi.
L'unicité de la décomposition permet d'en déduire que : $a = -b$, et : $c = 0$.
Puis le coefficient a s'obtient facilement (par multiplication par $X-1$ puis évaluation en 1) : $a = 1$,
et on trouve d en évaluant en 0 : $d = -1$.

Soit finalement : $\dfrac{X^2+3}{X^4-1} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{1}{X+1} + \dfrac{-1}{X^2+1}$.

Utilisation de valeurs particulières (dont l'infini) :

Dans certains cas, une limite en l'infini peut donner des indications suffisantes pour venir à bout des calculs.

exemple : $\dfrac{30.X}{(X-1).(X+2).(X^2+1)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X+2} + \dfrac{c.X+d}{X^2+1}$.

On trouve a et b de façon classique : $a = 5, b = 4$,
et on remarque que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x.F(x) = 0$.
On en déduit que : $a + b + c = 0$, soit : $c = -9$,
et la valeur en 0 donne : $-a + \dfrac{b}{2} + d = 0$, soit : $d = 3$.

Finalement : $\dfrac{30.X}{(X-1).(X+2).(X^2+1)} = \dfrac{5}{X-1} + \dfrac{4}{X+2} + \dfrac{-9.X+3}{X^2+1}$.

Conclusion :

Il n'y a pas de méthode globale pour aborder ce type de décomposition, mais il est important de savoir comment va se présenter la décomposition que l'on cherche.
Souvent, on est amené à conjuguer plusieurs techniques, sachant que ce qui primera dans ce cas, c'est l'efficacité.

exemple : $\dfrac{3.X^5+10.X^4+11.X^3+3.X^2-3}{(X^4-1).(X+1).(X+2)}$, à vous de jouer…