TS Les coordonnées dans l'espace

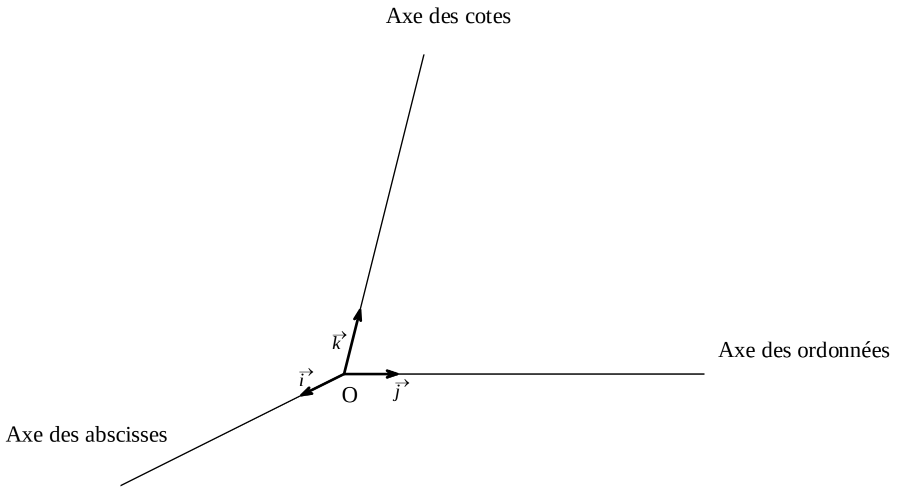
Introduction

Comme dans le plan, on peut repérer les points de l'espace par leurs coordonnées dans un repère.
Il y aura une coordonnée de plus par rapport au plan ; un point aura donc 3 coordonnées : la première s'appellera l'abscisse, la deuxième s'appellera l'ordonnée et la troisième s'appellera **la cote**.
On aura les mêmes règles de calcul que dans le dans le plan sauf qu'il y aura une troisième coordonnée.

I. Repères et bases de l'espace

1°) Définition

On appelle **repère (cartésien) de l'espace** tout quadruplet $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ où O est un point fixé de l'espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ trois vecteurs **non coplanaires** de l'espace.



Repère oblique

2°) Vocabulaire

- On dit que O est l'**origine** du repère.
- On dit que le triplet $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une **base** de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3°) Repères particuliers

- Un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ dont les axes sont perpendiculaires deux à deux est dit **orthogonal**.

- Un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (1 pour l'unité de longueur choisie) est dit **orthonormé.**

II. Cordonnées d'un point

1°) Théorème

$\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

2°) Définition

On dit que *x*, *y*, *z* sont les **coordonnées** de M dans le repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

x : **abscisse** de M
y : **ordonnée** de M
z : **cote** de M

Notations :

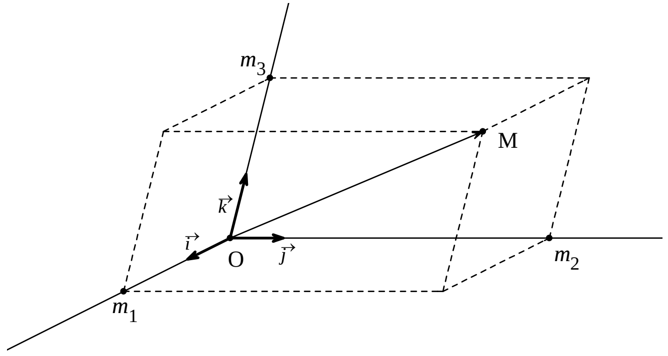
$\mathrm{M}(x\,;y\,;z)$ ou $\mathrm{M}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\mathrm{M}\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$

La droite sur laquelle on lit les abscisses des points est appelée axe des abscisses, celle sur laquelle on lit les ordonnées des points est appelée axe des ordonnées et celle sur laquelle on lit les cotes est appelée axe des cotes.

3°) Démonstration

Considérons le parallélépipède construit sur les axes du repère tel que (OM) soit une grande diagonale (voir figure).

On a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{O}m_1} + \overrightarrow{\mathrm{O}m_2} + \overrightarrow{\mathrm{O}m_3}$ (règle du parallélépipède).

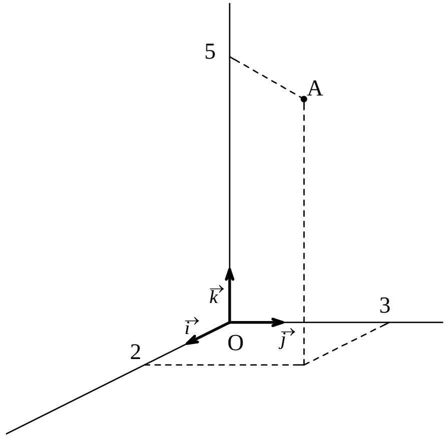


$\overrightarrow{\mathrm{O}m_1}$ est colinéaire à $\vec{i}$ donc
$\exists! x \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_1} = x\vec{i}$.
$\overrightarrow{\mathrm{O}m_2}$ est colinéaire à $\vec{j}$ donc
$\exists! y \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_2} = y\vec{j}$.
$\overrightarrow{\mathrm{O}m_3}$ est colinéaire à $\vec{k}$ donc
$\exists! z \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}m_3} = z\vec{k}$.
On obtient : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

4°) Exemple

$$A\left|\begin{array}{l}2\\3\\5\end{array}\right.$$

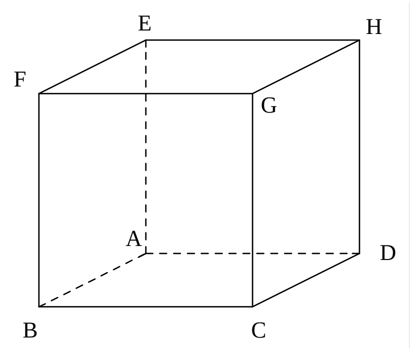
$\overrightarrow{OA}=2\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$ (décomposition du vecteur $\overrightarrow{OA}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$)



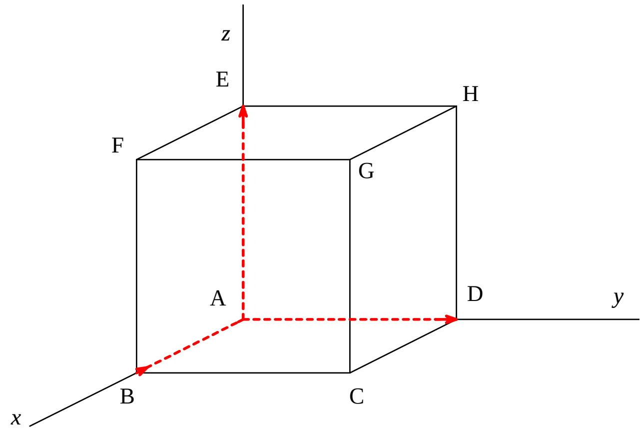
Où sont situés les négatifs sur les axes ?

5°) Repère dans un cube

ABCDEFGH est un cube de l'espace.



On se place dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ de l'espace.



$A\left|\begin{array}{l}0\\0\\0\end{array}\right.$ $B\left|\begin{array}{l}1\\0\\0\end{array}\right.$ $C\left|\begin{array}{l}1\\1\\0\end{array}\right.$ $D\left|\begin{array}{l}0\\1\\0\end{array}\right.$ $E\left|\begin{array}{l}0\\0\\1\end{array}\right.$ $F\left|\begin{array}{l}1\\0\\1\end{array}\right.$ $G\left|\begin{array}{l}1\\1\\1\end{array}\right.$ $H\left|\begin{array}{l}0\\1\\1\end{array}\right.$

Il s'agit d'un exemple fondamental.
On peut généraliser la situation à un parallélépipède rectangle (solide dont toutes les faces sont des rectangles) ou même pour à un parallélépipède quelconque (solide dont toutes les faces sont des parallélogrammes).

III. Cordonnées d'un vecteur

1°) Théorème

$\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est un repère de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

On parle de **décomposition** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

2°) Définition

On dit que x, y, z sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'ensemble des vecteurs de l'espace.

3°) Démonstration

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
On a vu qu'il existait un unique triplet (x, y, z) de réels tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
Donc $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.
$\vec{u}$ est exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

IV. Propriétés

1°) Propriété 1 (égalité de deux vecteurs)

• Énoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.

$\vec{u} = \vec{v}$ si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

• Démonstration

Découle de l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base.

2°) Propriété 2 (coordonnées de la somme de deux vecteurs)

• Énoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ sont deux vecteurs quelconques de l'espace.

Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x', y + y', z + z')$.

• Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$

$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$

3°) Propriété 3 (coordonnées du produit d'un vecteur par un réel)

• Énoncé

$\vec{u}(x, y, z)$ est un vecteur quelconque de l'espace.

λ est un réel quelconque.

Le vecteur $\lambda\vec{u}$ a pour coordonnées $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$.

• Démonstration

$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\lambda\vec{u} = \lambda x\vec{i} + \lambda y\vec{j} + \lambda z\vec{k}$

4°) Propriété 4 (coordonnées d'un vecteur défini par deux points)

• Énoncé

$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ sont deux points quelconques de l'espace.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour coordonnées $(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}, y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}, z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})$.

• Démonstration

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x_\mathrm{A}\vec{i} + y_\mathrm{A}\vec{j} + z_\mathrm{A}\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = x_\mathrm{B}\vec{i} + y_\mathrm{B}\vec{j} + z_\mathrm{B}\vec{k}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$ (relation de Chasles sous forme soustractive)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})\vec{i} + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})\vec{j} + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})\vec{k}$

5°) Propriété 5 (coordonnées du milieu d'un segment)

• Énoncé

$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ sont deux points quelconques de l'espace.

Le milieu I de [AB] a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_\mathrm{A} + x_\mathrm{B}}{2}, \dfrac{y_\mathrm{A} + y_\mathrm{B}}{2}, \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2}\right)$.

• Démonstration

I milieu de $[\mathrm{AB}]$ signifie que $\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \overrightarrow{\mathrm{IB}}$.

Donc $\begin{cases} x_\mathrm{I} - x_\mathrm{A} = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{I} \\ y_\mathrm{I} - y_\mathrm{A} = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{I} \\ z_\mathrm{I} - z_\mathrm{A} = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{I} \end{cases}$

D'où

$$\begin{cases} x_\mathrm{I} = \dfrac{x_\mathrm{A} + x_\mathrm{B}}{2} \\ y_\mathrm{I} = \dfrac{y_\mathrm{A} + y_\mathrm{B}}{2} \\ z_\mathrm{I} = \dfrac{z_\mathrm{A} + z_\mathrm{B}}{2} \end{cases}$$

6°) Propriété 6 (coordonnées d'un barycentre)

• Énoncé

$A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ sont deux points quelconques de l'espace.
a et b sont deux réels tels que $a+b \neq 0$.
Le barycentre G des points pondérés (A, a) et (B, b) a pour coordonnées $\left(\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b}, \dfrac{ay_A+by_B}{a+b}, \dfrac{az_A+bz_B}{a+b}\right)$.

• Démonstration

D'après la relation fondamentale, pour tout point M de l'espace on a :
$a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$.
Donc pour $M=O$, on a : $a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(a+b)\overrightarrow{OG}$.

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{a+b}\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}\right)$$

$$\overrightarrow{OA}=x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OB}=x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k}$$

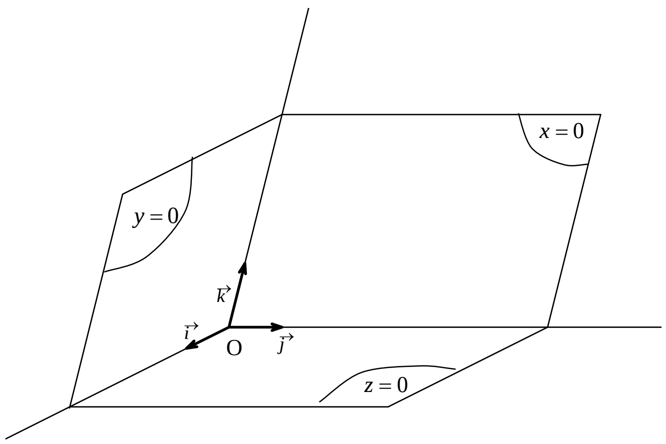
$$\overrightarrow{OG}=\frac{ax_A+bx_B}{a+b}\vec{i}+\frac{ay_A+by_B}{a+b}\vec{j}+\frac{az_A+bz_B}{a+b}\vec{k}$$

V. Équations de plans parallèles aux plans de coordonnées

1°) Définition

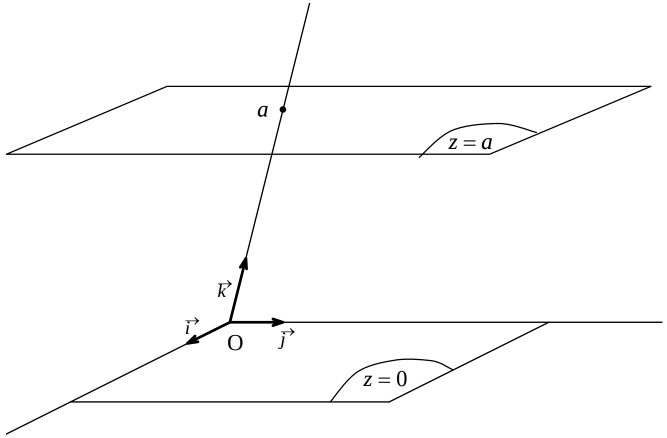
On appelle **plan de coordonnées** les plans de repères $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{j}, \vec{k})$ et $(O, \vec{k}, \vec{i})$.

2°) Équations des plans de coordonnées



3°) Équations de plans parallèles aux plans de coordonnées

Un plan parallèle au plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une équation de la forme $z=a$ $(a \in \mathbb{R})$.
Un plan parallèle au plan de repère $(O, \vec{j}, \vec{k})$ admet une équation de la forme $x=b$ $(b \in \mathbb{R})$.
Un plan parallèle au plan de repère $(O, \vec{k}, \vec{i})$ admet une équation de la forme $y=c$ $(c \in \mathbb{R})$.



VI. Norme d'un vecteur et distance de deux points dans un repère orthonormé de l'espace

1°) Définition [repère orthonormé de l'espace]

On reprend la définition donnée dans le **I. 3°)**.

On dit qu'un repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{E}$ est un **repère orthonormé** pour exprimer que

$\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{i} \perp \vec{k}$

$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ (pour l'unité de longueur choisie)

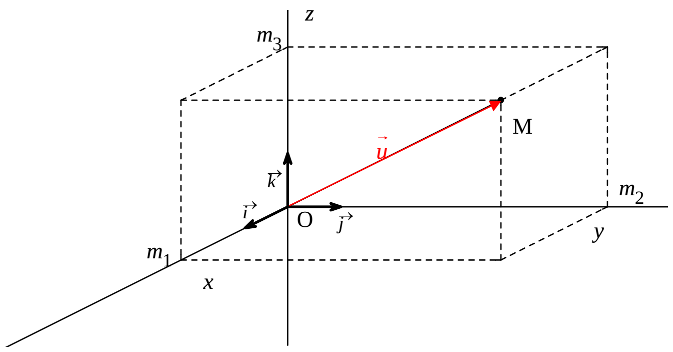
2°) Formule de la norme d'un vecteur

$\vec{u}$ est un vecteur quelconque de $\mathcal{E}$ **dans un repère orthonormé** $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

On note (x, y, z) ses coordonnées.

On note M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{u}$.

On considère le parallélépipède rectangle (ou pavé droit) construit sur les axes.



$\mathrm{OM}^2 = \mathrm{O}m_1{}^2 + \mathrm{O}m_2{}^2 + \mathrm{O}m_3{}^2$

$\mathrm{O}m_1 = |x|$

$\mathrm{O}m_2 = |y|$

$\mathrm{O}m_3 = |z|$

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

3°) Distance de deux points

$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A}, z_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}, y_\mathrm{B}, z_\mathrm{B})$ sont deux points quelconques de $\mathcal{E}$ **dans un repère orthonormé**.

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \left| \begin{array}{l} x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A} \\ y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A} \\ z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A} \end{array} \right.$

Donc $\mathrm{AB} = \|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\| = \sqrt{(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A})^2 + (y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})^2 + (z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A})^2}$

VII. Équations de sphères dans un repère orthonormé

1°) Théorème

Une équation de la sphère S de centre $\Omega \left| \begin{array}{l} a \\ b \\ c \end{array} \right.$ et de rayon $R > 0$ s'écrit $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

$\mathrm{M}(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Omega\mathrm{M}^2 = R^2$

2°) Exemple

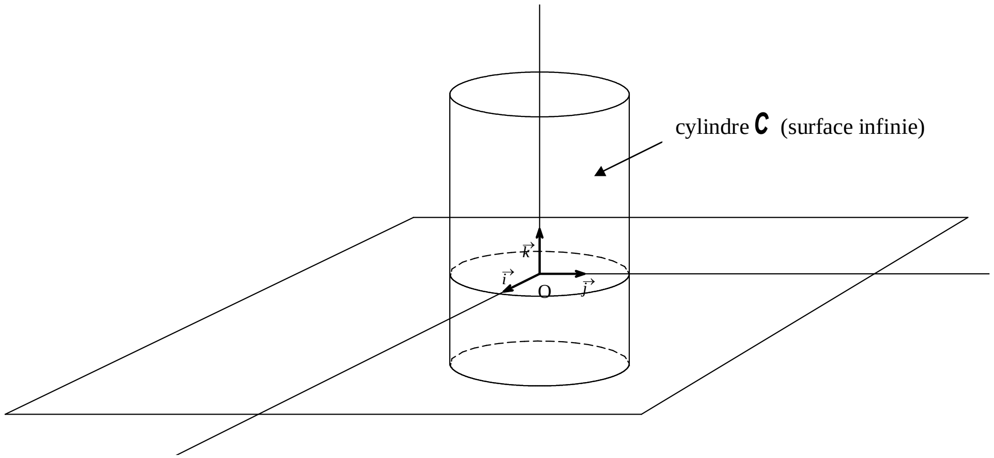
Une équation de la sphère S de centre $\Omega \left| \begin{array}{r} 1 \\ -1 \\ 2 \end{array} \right.$ et de rayon $R = 3$ s'écrit $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

(forme canonique d'une équation de sphère).

VIII. Équations de cylindres de révolution dans un repère orthonormé

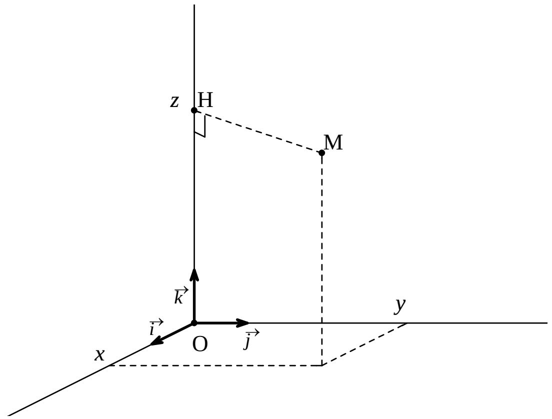
1°) Théorème

Une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left| \begin{array}{l} \text{d'axe } (\mathrm{O}z) \\ \text{de rayon } R > 0 \end{array} \right.$ s'écrit $x^2 + y^2 = R^2$.



2°) Démonstration

On utilise un point $\mathrm{M}\left|\begin{array}{l}x\\ y\\ z\end{array}\right.$ de l'espace.



On note H son projeté orthogonal sur l'axe (Oz).

$\mathrm{H}\left|\begin{array}{l}0\\ 0\\ z\end{array}\right.$

$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathrm{HM} = R$

$\Leftrightarrow \mathrm{HM}^2 = R^2$

$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = R^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = R^2$

3°) Exemples

• Une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l}\text{d'axe } (\mathrm{O}z)\\ \text{de rayon } R=5\end{array}\right.$ s'écrit $x^2 + y^2 = 25$.

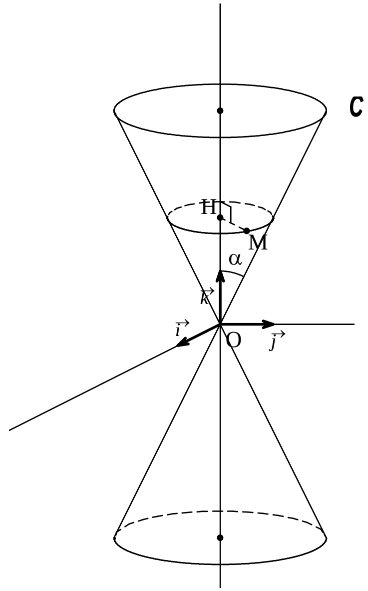
• Une équation du cylindre $\mathcal{C}$ de révolution $\left|\begin{array}{l}\text{d'axe } (\mathrm{O}y)\\ \text{de rayon } R=3\end{array}\right.$ s'écrit $x^2 + z^2 = 9$.

IX. Équations de cônes de révolution dans un repère orthonormé

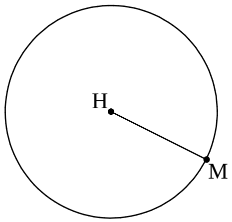
1°) Théorème

Une équation du cône $\mathcal{C}$ de révolution
- d'axe $(\mathrm{O}z)$
- de sommet O
- de demi-angle au sommet α $\left(\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\right)$

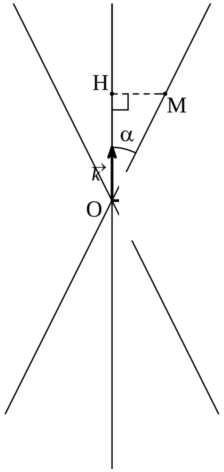
s'écrit $x^2 + y^2 = (\tan\alpha)^2 z^2$.



Coupe horizontale :



Coupe verticale par le plan (M, O*z*) :



2°) Démonstration

On utilise un point M $\left| \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$.

On note H son projeté orthogonal sur l'axe (O*z*).

H $\left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ z \end{array} \right.$

$$
\begin{aligned}
\text{M} \in \mathcal{C} & \Leftrightarrow \text{HM} = \text{OH} \times \tan \alpha \\
& \Leftrightarrow \text{HM}^2 = \text{OH}^2 \times \tan^2 \alpha \\
& \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2 = z^2 \times \tan^2 \alpha \\
& \Leftrightarrow x^2 + y^2 = z^2 \times \tan^2 \alpha
\end{aligned}
$$

3°) Exemple

$\alpha = \frac{\pi}{6}$

$\tan \alpha = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}$

Bilan sur les plans de coordonnées

Plan	Repère	Équation
(xOy)	$\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$	$z=0$
(yOz)	$\left(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k}\right)$	$x=0$
(zOx)	$\left(\mathrm{O}, \vec{k}, \vec{i}\right)$	$y=0$

Un plan parallèle au plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $z=a$ $\left(a \in \mathbb{R}\right)$.
Un plan parallèle au plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $x=b$ $\left(b \in \mathbb{R}\right)$.
Un plan parallèle au plan de repère $\left(\mathrm{O}, \vec{k}, \vec{i}\right)$ admet une équation cartésienne de la forme $y=c$ $\left(c \in \mathbb{R}\right)$.