Ch.8 : Produit scalaire

1 PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS

1.1 Deux définitions géométriques équivalentes

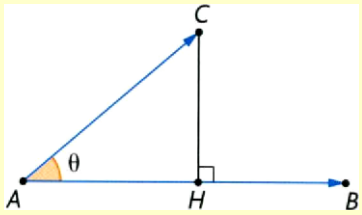
DÉFINITION 1

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, leur produit scalaire est le nombre réel, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

  1) $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

  2) $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \widehat{BAH} = 0 \\ -AB \times AH & \text{si } \widehat{BAH} = \pi \end{cases}$, où H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).

- Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, on définit : $\vec{u}.\vec{v} = 0$.



Remarques :

- L'équivalence entre les deux définitions résulte du fait que $AC \times \cos\widehat{BAC}$ vaut soit AH soit –AH suivant que l'angle $\widehat{BAC}$ a une mesure comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ ou entre $\frac{\pi}{2}$ et π.
- Avec la deuxième définition, le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ se ramène par projection orthogonale au produit scalaire des deux vecteurs colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ puisque $\cos\widehat{BAH}$ vaut alors 1 ou –1 :
  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.

Le carré scalaire :

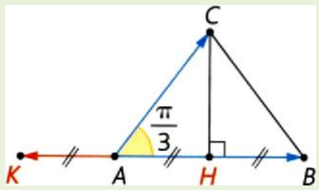
Le produit scalaire du vecteur $\vec{u}$ par lui-même est appelé **carré scalaire de $\vec{u}$**, noté $\vec{u}^2$.
On a $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ puisque $\cos(\vec{u}, \vec{u}) = 1$, ou encore $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2$.

Exemple :

Dans le triangle équilatéral ABC, en posant $AB = a$, on a :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = a \times a \times \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a^2}{2}$;

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AH} = -AK \times AH = -\frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{-a^2}{4}$.



1.2 Produit scalaire et normes

PROPRIÉTÉ 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$.

Démonstration :

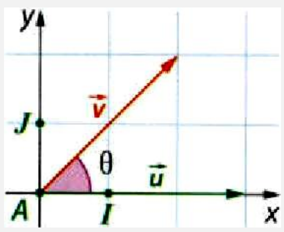
Si $\vec{u} = \vec{0}$, les trois expressions sont nulles ; l'égalité est donc vraie.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, dans le repère orthonormé (A ; I, J) tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$,

on a : $\vec{u}\begin{pmatrix}\|\vec{u}\| \\ 0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\|\vec{v}\|\cos\theta \\ \|\vec{v}\|\sin\theta\end{pmatrix}$ et d'après l'activité 2, on sait que :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos\theta + 0 \times \|\vec{v}\|\sin\theta\right)$;

d'où : $\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|\cos\theta = \vec{u}.\vec{v}$.



1.3 Produit scalaire en repère orthonormé

PROPRIÉTÉ 2

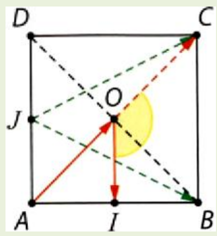
Dans un repère orthonormé, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x' \\ y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, alors : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.

Piste de démonstration :

Utiliser la propriété 1 et l'activité 2 : dans tout repère orthonormé : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 2\,(xx' + yy')$.

Exercice corrigé : *Calculer un produit scalaire*

ABCD est un carré de centre O, de côté 2.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [AD]
Calculer les produits scalaires suivants :



a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$; **b)** $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI}$; **c)** $\overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JB}$; **d)** $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BC}$.

On pourra dans certains cas utiliser le repère orthonormé (A ; I, J).

Solution :

a) $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = AI \times AC \times \cos\widehat{IAC} = 1 \times 2\sqrt{2} \times \cos\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2.$
On peut aussi utiliser le projeté orthogonal du point C sur la droite (AI) qui est le point B. De plus, comme l'angle $\widehat{IAB} = 0$, on obtient : $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = AI \times AB = 1 \times 2 = 2.$

b) $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, donc $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OI}$ et comme $\widehat{COI} = \frac{3\pi}{4}$, $OI = 1$ et $OC = \sqrt{2}$, on obtient :
$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI} = \sqrt{2} \times 1 \times \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} \times \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$; soit $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OI} = -1$.

c) L'angle $\widehat{CJB}$ n'est pas connu. Dans le repère orthonormé (A ; I, J), les points J, C et B ont pour coordonnées (0 ; 1), (2 ; 2) et (2 ; 0). Donc $\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$.
Par suite $\overrightarrow{JC}.\overrightarrow{JB} = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3.$

d) Les droites (DJ) et (BC) sont parallèles, donc les vecteurs $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. De plus, comme $(\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{AD}) = \pi\ (2\pi)$, on a : $\overrightarrow{DJ}.\overrightarrow{BC} = DJ \times BC \times \cos\pi = 1 \times 2 \times (-1) = -2.$

Méthode :

On utilise au choix l'une des deux définitions géométriques.

Le produit scalaire est indépendant des représentants des vecteurs : on peut les choisir de même origine pour bien visualiser l'angle.

Lorsque l'angle n'est pas connu on peut se placer dans un repère orthonormé et utiliser l'égalité : $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$.
→ Voir la fiche **Algobox**, page 387.

2 PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DU PRODUIT SCALAIRE

PROPRIÉTÉS 6

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan et pour tout réel k, on a :

Symétrie :

1) $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

Linéarité :

2) $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

3) $\vec{u}.(k\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$

Identités remarquables :

4) $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

5) $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$

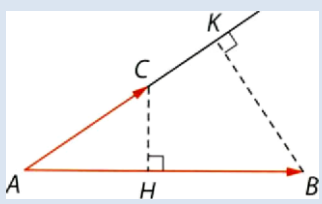
6) $(\vec{u}-\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$.

Démonstration partielle :

On peut utiliser l'expression du produit scalaire en repère orthonormé.
Pour la relation **2)** si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}$ alors $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\end{pmatrix}$,
et par suite : $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = x(x'+x'') + y(y'+y'') = (xx'+yy') + (xx''+yy'') = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$.
Les identités **4)** et **5)** s'obtiennent à partir de la propriété 1 de la page 258.
→ Voir la **démonstration** de ces propriétés aux exercices 58 et 59, page 275.

Illustration de la propriété 1)

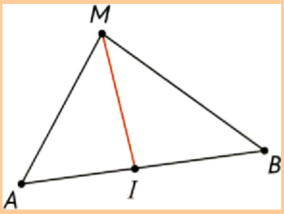
Dans la configuration ci-contre (avec $\widehat{BAH} = 0$) :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH.$
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC \times AK.$
Et donc par symétrie : $AB \times AH = AC \times AK.$



3 APPLICATION AU CALCUL DE LONGUEURS ET D'ANGLES

THÉORÈME DE LA MÉDIANE

Soit A, B, M trois points du plan, et I le milieu du segment [AB].
Alors : $\mathbf{MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 2\,IA^2}$.

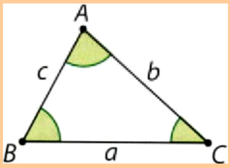


Démonstration :

$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$,
puis en développant à l'aide de l'identité remarquable **4)**, on obtient :
$MA^2 + MB^2 = \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + IA^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 = 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$.
Or $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$, car I est le milieu du segment [AB],
et $\overrightarrow{IA}^2 = IA^2 = IB^2 = \overrightarrow{IB}^2$; donc enfin : $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + 2\,IA^2$.
Ce théorème permet de calculer les longueurs des médianes d'un triangle quand on connaît les longueurs des trois côtés.

THÉORÈME D'AL-KASHI OU DE PYTHAGORE GÉNÉRALISÉ

Soit ABC un triangle. On pose $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, alors :
$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}}$;
$\boldsymbol{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}}$;
$\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}}$.



Remarques :

- Ce théorème permet de calculer les angles dans un triangle quand on connaît les trois côtés.
- Lorsque $\widehat{A} = 90°$, la relation s'écrit $a^2 = b^2 + c^2$: on retrouve le théorème de Pythagore.
- La preuve s'obtient aisément en écrivant : $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$,
  puis en développant comme dans la preuve du théorème de la médiane.

Exemple :

Avec $BC = 7$, $CA = 5$ et $AB = 8$, on peut calculer l'angle $\widehat{A}$ grâce à : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$.
On obtient : $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \dfrac{40}{80} = \dfrac{1}{2}$; d'où $\widehat{A} = 60°$.

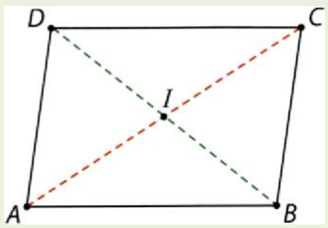
Exercice corrigé : ***Calculer des longueurs et déterminer des angles***

ABCD est un parallélogramme de centre I.
On sait que AB = 7, AD = 5 et BD = 8.

1) **Déterminer la longueur de la diagonale AC.**

2) **Déterminer les angles du parallélogramme ABCD à 1° près.**

3) **En déduire l'aire de ABCD.**



Solution :

1) Comme les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu I, on a $AC = 2\,AI$ et il suffit de calculer AI.
En appliquant le théorème de la médiane dans le triangle ABD, on a : $AB^2 + AD^2 = 2\,AI^2 + 2\,IB^2$; soit $7^2 + 5^2 = 2\,AI^2 + 2 \times 4^2$.
On obtient $AI^2 = 21$, soit $AI = \sqrt{21}$; donc $AC = 2\sqrt{21}$.

Méthode :

Pour calculer des longueurs et des angles on dispose de formules pratiques : théorème de la médiane, théorème d'AlKashi.
D'autres méthodes sont exposées dans l'exercice résolu 18, page 266.

2)
- Le théorème d'Al-Kashi dans le triangle BDA donne : $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \times AB \times AD \times \cos\widehat{BAD}$;
  soit $64 = 49 + 25 - 70\cos\widehat{BAD}$; d'où $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{74 - 64}{70} = \dfrac{1}{7}$.

Avec la calculatrice mise en mode degré, on obtient :
$\widehat{BAD} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) \approx 81{,}8°$; d'où $\hat{A} = \hat{C} \approx 81{,}8°$.

Si le cosinus n'est pas une valeur remarquable, c'est la calculatrice qui donne une valeur approchée de l'angle.

- $\widehat{ADC}$ est un angle supplémentaire de $\widehat{BAD}$, donc : $\widehat{ADC} \approx 180° - 81{,}8° \approx 98{,}2°$; d'où $\hat{D} = \hat{B} \approx 98{,}2°$.

3) En appelant H le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB), l'aire S de ABCD s'écrit : $S = AB \times DH = AB \times AD \times \sin\hat{A}$.
Comme $\hat{A} < 90°$, $\sin\hat{A} = \sqrt{1-\cos^2\hat{A}} = \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.
D'où l'aire cherchée $S = 7 \times 5 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 20\sqrt{3}$ unités d'aire.

Ne pas oublier la trigonométrie du triangle rectangle, ni d'examiner le signe du sinus lorsqu'on le calcule à partir de la formule :
$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$.

4 Orthogonalité

4.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 2

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont orthogonaux** lorsque $\vec{u}.\vec{v} = 0$, c'est-à-dire lorsque l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est droit (de mesure $\frac{+\pi}{2}$ ou $\frac{-\pi}{2}$ modulo 2π) ou bien lorsque $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$.

Exemple :

En repère orthonormé (O ; I, J), les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$ sont orthogonaux.
Il en est de même des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ puisque : $\vec{u}.\vec{v} = 2(-1) + 1 \times 2 = 0$.

4.2 Vecteur normal à une droite

Propriété et Définition

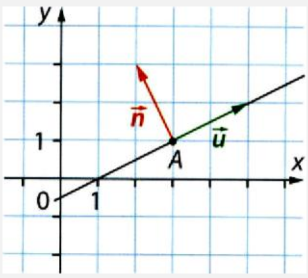
Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point du plan.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ **est une droite** $\mathfrak{D}$, passant par A, et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{n}$.
On dit que $\vec{n}$ **est un vecteur normal** à la droite $\mathfrak{D}$.

Démonstration :

- $\overrightarrow{AA}.\vec{n} = \vec{0}.\vec{n} = 0$, donc A est un point de l'ensemble recherché.
- Considérons un repère orthonormé (O ; I, J) dans lequel on a :

$A(x_A ; y_A)$, $M(x ; y)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ équivaut à :
$a(x-x_A) + b(y-y_A) = 0$
$ax + by + c = 0$ avec $c = -ax_A - by_A$.

On reconnaît l'équation d'une droite $\mathfrak{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.
Or $\vec{u}.\vec{n} = -ba + ab = 0$, donc $\vec{u}$ est bien orthogonal au vecteur $\vec{n}$.



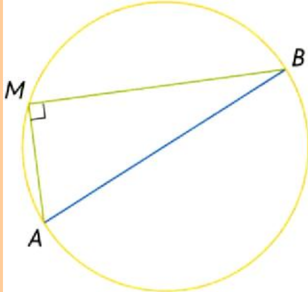
Conséquence

Soit $(a ; b)$ un couple de réels, distinct du couple $(0 ; 0)$.
Dans un repère orthonormé, le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ est normal à une droite $\mathfrak{D}$ si, et seulement si, $\mathfrak{D}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un réel quelconque.

4.3 Équation d'un cercle de diamètre [AB]

PROPRIÉTÉ 7

Soit A et B deux points distincts du plan et (O ; I, J) un repère orthonormé.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ est le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].
Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ dans le repère (O ; I, J) est :
$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$



Démonstration :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$ équivaut à :
$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ou $AM \times BM \times \cos \widehat{AMB} = 0$
$\overrightarrow{AM} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{BM} = \vec{0}$ ou $\widehat{AMB} = 90°$
M = A ou M = B ou le triangle AMB est rectangle en M
M appartient au cercle de diamètre [AB].
Dans le repère orthonormé (O ; I, J), on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - x_B \\ y - y_B \end{pmatrix}$ et :
$M \in \mathscr{C}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$, soit à : $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

Exercice corrigé : ***Déterminer une équation de droite ou de cercle***

Dans un repère orthonormé (O ; I, J) on donne les points A(3 ; 0) et B(0 ; 2).

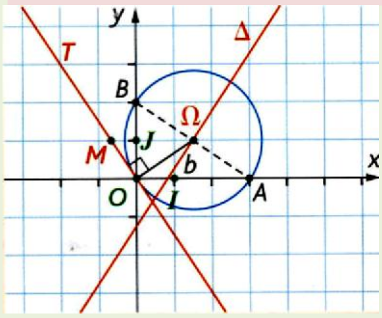
1) Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]. Justifier que $\mathscr{C}$ passe par le point O.

2) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en O.

3) Déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].

Solution :

Méthode :
S'assurer que le repère utilisé est orthonormé ; c'est indispensable pour exprimer un produit scalaire par la formule : $xx' + yy'$.



Poser M(x ; y) le point courant de l'ensemble cherché.

Caractériser l'ensemble cherché par la nullité d'un produit scalaire. En particulier, un cercle connu par un diamètre, une tangente, une médiatrice ou une hauteur sont définis par une relation d'orthogonalité. Cette relation se traduit par un produit scalaire nul.

1) Soit (x ; y) les coordonnées d'un point M.

$M \in \mathscr{C}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0$.

On a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 2 \end{pmatrix}$;

par suite : $M \in \mathscr{C}$ équivaut à :
$(x - 3)(x) + (y)(y - 2) = 0$.
Le cercle $\mathscr{C}$ a pour équation :
$x^2 + y^2 - 3x - 2y = 0$.
Les coordonnées (0 ; 0) du point O vérifient l'équation du cercle, donc O appartient au cercle de diamètre [AB].

2) On appelle T la tangente à $\mathscr{C}$ en O et Ω le milieu du segment [AB], centre du cercle $\mathscr{C}$, dont les coordonnées sont $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$.

$\overrightarrow{O\Omega}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à T et par suite :

$M \in T$ équivaut à : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{O\Omega} = 0$, soit à : $3x + y = 0$, ou encore à : $4y = \frac{-3}{2}x$.

3) Soit Δ la médiatrice du segment [AB]. La droite Δ a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$; elle a donc une équation de la forme : $-3x + 2y + c = 0$.

D'autre part le point Ω appartient à Δ, ce qui se traduit par :

$-3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 + c = 0$ équivalent à : $c = \frac{5}{2}$.

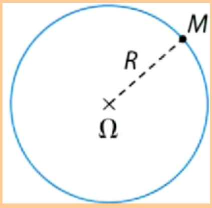
Une équation de Δ est donc : $-3x + 2y + \frac{5}{2} = 0$.

En repère orthonormé, dès qu'on tonnait un vecteur normal à une droite, on peut en déduire les coefficients de x et de y dans une équation cartésienne de cette droite.

4.4 Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

PROPRIÉTÉ 8

Soit Ω un point du plan, R un réel strictement positif et (O ; I, J) un repère orthonormé.
Le cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que **$\Omega M = R$**, ou encore $\Omega M^2 = R^2$.
Une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ dans (O ; I, J) est : $\mathbf{(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2}$.



Exemple :

Dans un repère orthonormé, le cercle de centre $\Omega(-2 ; 5)$ et de rayon 3 a pour équation cartésienne :
$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 3^2$ qui équivaut à :
$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 9$
$x^2 + y^2 + 4x - 10y + 20 = 0$.

5 APPLICATION AUX FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE

5.1 Formules d'addition du cosinus et du sinus

PROPRIÉTÉS 9

Pour tous réels a et b on a les formules :

1) $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

2) $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

3) $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

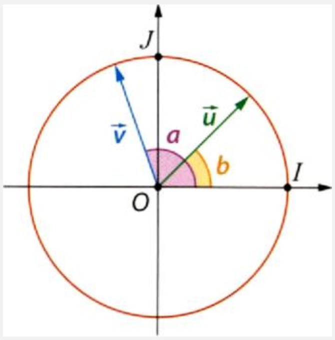
4) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Démonstration de la formule 1) :

On considère un repère orthonormé direct (O ; I, J) et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de norme 1, tels que : $(\overrightarrow{OI}, \vec{u}) = b\ (2\pi)$ et $(\overrightarrow{OI}, \vec{v}) = a\ (2\pi)$.

- On a $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = \cos b \cos a + \sin b \sin a$.
- Par la relation de Chasles on sait que :
  $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OI}, \vec{v}) - (\overrightarrow{OI}, \vec{u}) = a - b\ (2\pi)$
  d'où $\vec{u}.\vec{v} = 1 \times 1 \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(a - b)$.

On obtient l'égalité : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.



Exemple :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}.$$

5.2 Formules de duplication du cosinus et du sinus

PROPRIÉTÉS 10

Pour tout réel a on a les formules :

1) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

2) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

3) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

4) $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

Piste de démonstration :

Écrire $\cos 2a = \cos(a + a)$, puis utiliser : $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ pour **2)** et **3)**.

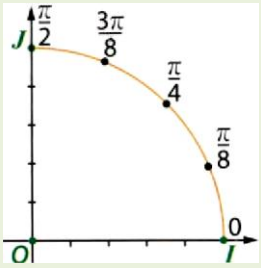
Remarque :

Il peut être utile dans certains cas, de savoir inverser les formules avec $\cos 2a$:
$\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$.

Exercice corrigé : *Utiliser les formules de duplication et d'addition*

1) En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ déterminer : a) $\cos\frac{\pi}{8}$; b) $\sin\frac{\pi}{8}$.

2) En déduire les valeurs de : a) $\cos\frac{3\pi}{8}$ b) $\sin\frac{3\pi}{8}$.



Solution :

1) a) En utilisant la formule de duplication du cosinus,

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et en posant $a = \frac{\pi}{8}$, on obtient :

$\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$;

soit : $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$. Donc : $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

Comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, on a $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ et donc : $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Méthode :

$\cos 2a$ s'exprime au choix en fonction de $\sin a$ ou $\cos a$.
C'est utile lorsqu'on veut écrire une expression en fonction d'une seule ligne trigonométrique.

b) Pour obtenir $\sin\frac{\pi}{8}$ on utilise : $\sin\frac{\pi}{4} = 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$.

d'où : $\sin\frac{\pi}{8} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{2\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Attention ! Deux résultats peuvent se présenter sous des formes très différentes, mais être identiques :
Ainsi, en multipliant « haut et bas » par $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ on obtient : $\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

2) a) $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$. En utilisant les formules d'addition, on obtient :

$\cos\frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\frac{\pi}{2} \times \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{2} \times \sin\frac{\pi}{8}$.

soit : $\cos\frac{3\pi}{8} = 0 \times \cos\frac{\pi}{8} + 1 \times \sin\frac{\pi}{8}$; d'où $\cos\frac{3\pi}{8} = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

Remarque : On retrouve la formule déjà vue pour les angles associés : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$.

b) De la même façon, on écrit : $\sin\frac{3\pi}{8} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{2} \times \cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} \times \cos\frac{\pi}{2}$;

et on obtient : $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.