Fonctions exponentielles de base a (a>0)

I. Fonctions exponentielles de base a ($a>0$)

1. Définition de la fonction exponentielle de base a ($a>0$)

Définition : Soit a un réel strictement positif.
On appelle fonction exponentielle de base a, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x\ln a}$. On la note généralement $\exp_a$.

Cas particuliers :

- Lorsque $a=1$ alors $\ln a=\ln 1=0$ donc $f(x)=e^0=1$, f est la fonction constante égale à 1.
- Lorsque $a=e$ alors $\ln a=\ln e=1$ donc $f(x)=e^x$, f est la fonction exponentielle.

Notation :

On peut remarquer que pour tout $p\in\mathbb{Z}$, on a $f(p)=e^{p\ln a}=e^{\ln a^p}=a^p$
On étend donc cette notation à l'ensemble des réels :

Pour tout réel x, $e^{x\ln a}$ est noté a^x et on lit "a puissance x" ou "a exposant x".

On retiendra que : $\forall\, a>0$ et $\forall\, b\in\mathbb{R}$ on a $a^b=e^{b\ln a}$

Conséquences : $(a>0)$

- $\forall x\in\mathbb{R},\ a^x>0$.
- La propriété " $\forall p\in\mathbb{Z},\ \ln(a^p)=p\ln a$" se généralise à tout exposant réel :" $\forall x\in\mathbb{R},\ \ln(a^x)=x\ln a$".

2. Propriétés

Les règles de calculs connues sur les puissances d'exposant entiers relatifs s'étendent au cas d'exposants réels.

Propriétés :
Pour tous réels a et b strictement positifs et pour tous réels x et y :

$a^{x+y}=a^xa^y$ $\qquad a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$ $\qquad a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ $\qquad (a^x)^y=a^{xy}$ $\qquad a^xb^x=(ab)^x$ $\qquad \dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Démonstration :

- $a^{x+y}=e^{(x+y)\ln a}=e^{x\ln a}e^{y\ln a}=a^xa^y$
- $a^{x-y}=e^{(x-y)\ln a}=e^{x\ln a}e^{-y\ln a}=\dfrac{e^{x\ln a}}{e^{y\ln a}}=\dfrac{a^x}{a^y}$
- $a^{-x}=e^{-x\ln a}=\dfrac{1}{e^{x\ln a}}=\dfrac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y=e^{y\ln(a^x)}=e^{y\ln(e^{x\ln a})}=e^{yx\ln a}=a^{xy}$
- $a^xb^x=e^{x\ln a}\times e^{x\ln b}=e^{x\ln a+x\ln b}=e^{x(\ln a+\ln b)}=e^{x\ln(ab)}$ $=(ab)^x$
- $\dfrac{a^x}{b^x}=\dfrac{e^{x\ln a}}{e^{x\ln b}}=e^{x\ln a-x\ln b}=e^{x(\ln a-\ln b)}=e^{x\ln\left(\frac{a}{b}\right)}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x$

Attention : Les propriétés ci-dessus ne sont vraies que pour $a>0$ et $b>0$

II. Etude des fonctions exponentielles de base a : $x\mapsto a^x$ ($a>0$)

1. Dérivabilité

Soit $f:x\mapsto a^x$ alors $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=a^x=e^{x\ln a}=e^{u(x)}$ avec $u(x)=x\ln a$
u et exp sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\ln a\times e^{x\ln a}=\ln a\times a^x$

Propriété :
La fonction $x\mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est la fonction $x\mapsto a^x\ln a$

2. Sens de variation

$\forall x\in\mathbb{R}$, $a^x>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $\ln a$

Propriété :
Si $a>1$, la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $0<a<1$, la fonction $x\mapsto a^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a=1$, la fonction $x\mapsto 1^x$ est la fonction constante égale à 1.

3. Comportement asymptotique

- Si $a > 1$ alors $\ln a > 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln a = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln a} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln a = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln a} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

- Si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x\ln a = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln a} = \lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$

  $\lim\limits_{x \to -\infty} x\ln a = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln a} = \lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

Propriété :

Si $a > 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

Si $0 < a < 1$ alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

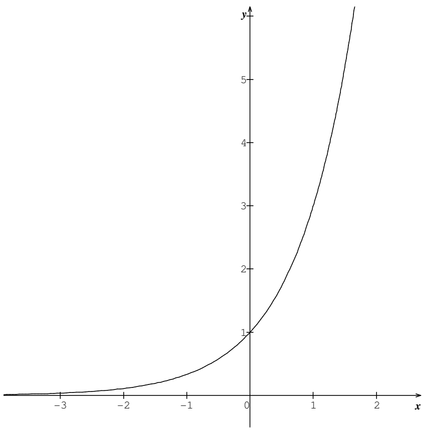
4. Tableau de variations et courbe représentative

Cas où $a > 1$

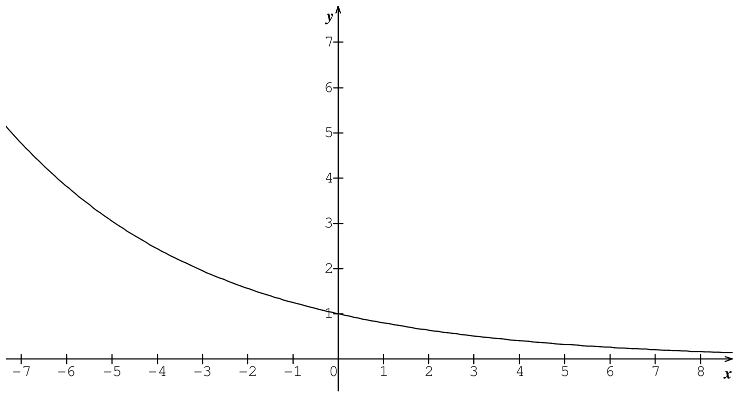
x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		+		+	
f	0	↗	1	↗	$+\infty$

Cas où $0 < a < 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		−		−	
f	$+\infty$	↘	1	↘	0



Représentation graphique de $x \mapsto 3^x$



Représentation graphique de $x \mapsto (0{,}8)^x$

III. Exercices

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes : (a) $3^x = 12$ (b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geqslant \frac{3}{2}$

Exercice 2

Etudier les fonctions définies par $f(x) = 1{,}7^x$ et $g(x) = 0{,}6^x$ puis tracer leurs courbes représentatives dans un repère.

Exercice 3

Etudier et représenter la fonction f définie par $f(x) = x2^x$.

Exercice 4

Soit (E) l'équation $3^x + 4^x = 7^x$. Le but est de déterminer l'ensemble des solutions de (E).

1. Donner une solution évidente de (E).
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente à $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$
3. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E).