Fonctions exponentielle, logarithme et racine n-ième

On va voir les propriétés de deux fonctions fondamentales : l'exponentielle et le logarithme. Les deux premières parties donnent des formules à connaître pour l'examen. Les croissances comparées mettent en évidence des propriétés propres à l'exponentielle et au logarithme. Enfin on rappelle la notion de racine n-ième.

1. La fonction exponentielle

Propriétés

Pour tous réels x, y et tout entier relatif n,

$e^0 = 1$ $\quad e^x > 0$ $\quad \exp'(x) = e^x$ $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

$e^{x+y} = e^x . e^y$ $\quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ $\quad \left(e^x\right)^n = e^{xn}$

Limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

Dérivée de la fonction e^u

u est une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction f définie par: $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

2. La fonction logarithme népérien

Pour tout réel $x > 0$ $e^{\ln(x)} = x$. Pour tout réel x $\ln(e^x) = x$.

Propriétés

Pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Pour tout réels a, b strictement positifs et tout entier relatif n,

$\ln(1) = 0$ $\quad \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\quad \ln(a^n) = n\ln(a)$ $\quad \ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

Limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

Dérivée de la fonction $\ln u$

u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. La fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$.

3. Croissances comparées

Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0$

4. Fonction racine n-ième où n est un entier naturel et $n \geq 2$

a est un réel positif. L'unique réel positif tel que $x^n = a$ est appelé racine n-ième de a et noté $\sqrt[n]{a}$. On a $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

On appelle fonction racine n-ième, la fonction f_n définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.