Correction

1) Calcul de dérivées

Exercice 1

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

$f'(x) = 2\times 3x^2 - 3\times 2x + 4 + 0 = 6x^2 - 6x + 4$

$g(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{2}$

$g'(x) = \dfrac{3x^2 + 2x}{2}$

$h(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x}{2} + \dfrac{4}{5}$

$h'(x) = \dfrac{3x^2}{3} - \dfrac{1}{2} + 0 = x^2 - \dfrac{1}{2}$

$I(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$

$I'(x) = \dfrac{1}{2} + 2\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2}$

$j(x) = 2x^2 + 4 - \dfrac{1}{x^2}$

$j'(x) = 2\times 2x + 0 - \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 4x + \dfrac{1}{x^2}$

2) Calcul d'équations de tangentes

Exercice 2

$f(x) = x^3 - 2x^2$

La dérivée f' est définie par : $f'(x) = 3x^2 - 4x$

Calcul de l'équation de la tangente :

$x = -1$
$y = f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 = -3$
$a = f'(-1) = 3(-1)^2 - 4((-1) = 7$
$y = ax + b$

$y = 7x + b$
$-3 = 7\times(-1) + b$
$-3 = -7 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 4$

L'équation de la tangente est finalement
$y = 7x + 4$

Exercice 3

La dérivée f' est définie par : $f'(x) = 2x + 2$

Calcul de l'équation de la tangente au point *A* d'abscisse 0

$x = 0$
$y = f(0) = -5$
$a = f'(0) = 2$
$y = ax + b$

$y = 2x + b$
$-5 = 2\times 0 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -5$

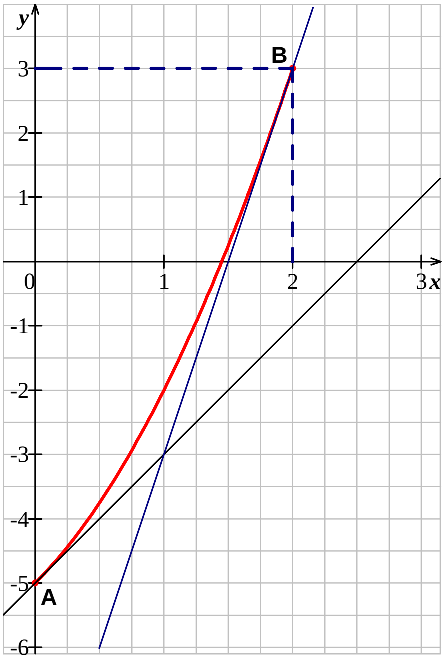
L'équation de la tangente est finalement : $y = 2x - 5$

Calcul de l'équation de la tangente au point *B* d'abscisse 2

$x = 2$
$y = f(2) = -5$
$a = f'(0) = 2$
$y = ax + b$

$y = 2x + b$
$-5 = 2\times 0 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = -5$

L'équation de la tangente est finalement : $y = 2x - 5$



Exercice 4

La dérivée f' est définie par : $f'(x) = 3 + 9\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 3 - \dfrac{9}{x^2}$

Calcul de l'équation de la tangente au point *A* d'abscisse 3

$x = 3$
$y = f(3) = 3\times 3 + \dfrac{9}{3} = 12$
$a = f'(3) = 3 - \dfrac{9}{3^2} = 2$
$y = ax + b$

$y = 2x + b$
$12 = 2\times 3 + b \quad \Leftrightarrow \quad b = 6$

L'équation de la tangente est finalement $y = 2x + 6$

3) Recherche de tangentes horizontales

Exercice 5

$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$
$f'(x) = 4x - 3$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}$

$f(\frac{4}{3}) = 2\times\frac{4^2}{3^2} - 3\times\frac{4}{3} + 4 = \frac{32}{9}$

La courbe admet une tangente horizontale au point $M(\frac{4}{3} ; \frac{32}{9})$

$g(x) = x^3 + 4x$
$g'(x) = 3x^2 + 4$
$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 4 = 0$
or $3x^2 + 4 > 0$ pour tout x, donc la courbe n'admet aucune tangente horizontale

$h(x) = \frac{x^3}{3} - 9x + 1$

$h'(x) = \frac{3x^2}{3} - 9 = x^2 - 9$

$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 3)(x + 3) = 0$
$h'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$ ou $x = -3$

$h(3) = \frac{3^3}{3} - 9\times3 + 1 = 9 - 27 + 1 = -17$

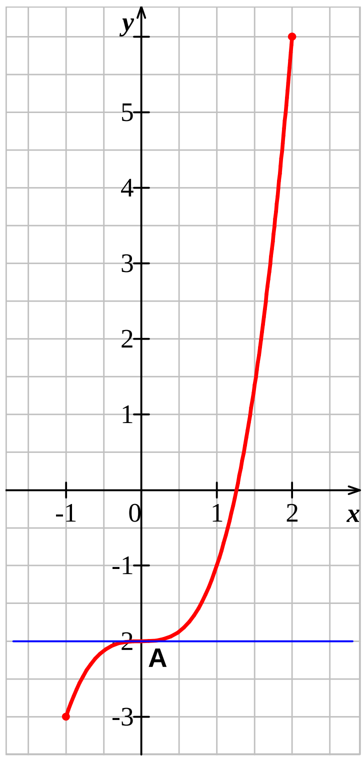
$h(-3) = \frac{(-3)^3}{3} - 9\times(-3) + 1 = -9 + 27 + 1 = 19$

La courbe admet deux tangentes horizontales aux points *M(-3 ;19)* et *P(3 ; –17)*

Exercice 6

1) tableau de valeur

x	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
	–3	-2,125	–2	–1,875	–1	1,375	6



2) dérivée et tangente
$f(x) = x^3 - 2$
$f'(x) = 3x^2$

Calcul de l'équation de la tangente au point *A* d'abscisse 0
$x = 0$
$y = f(0) = -2$
$a = f'(0) = 0$

La courbe admet une tangente horizontale passant par le point *A(0 ; –2)*
Son équation est donc :
$y = -2$

Conclusion

La courbe admet donc une tangente horizontale mais aucun extremum local
La fonction *f* est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$

Exercice 7

$f(x) = \frac{x^3 - 12x + 8}{4}$

1) La dérivée *f'* est :

$f'(x) = \frac{3x^2 - 12}{4}$

2) le coefficients directeur de la tangente au point d'abscisse – 4 est : $f'(-4) = 9$
Le coefficients directeur de la tangente au point d'abscisse 0 est : $f'(0) = -3$

3) On recherche les solutions de $f'(x) = 0$

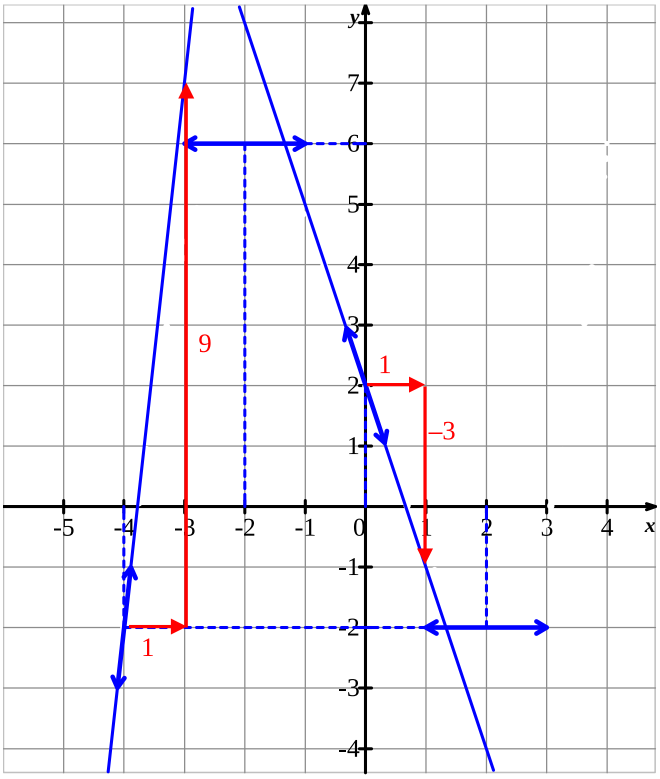
$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x^2 - 12}{4} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x^2 - 4) = 0$

On reconnaît l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
$f'x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x - 2)(x + 2) = 0$
La dérivée est nulle pour $x = -2$ et $x = 2$

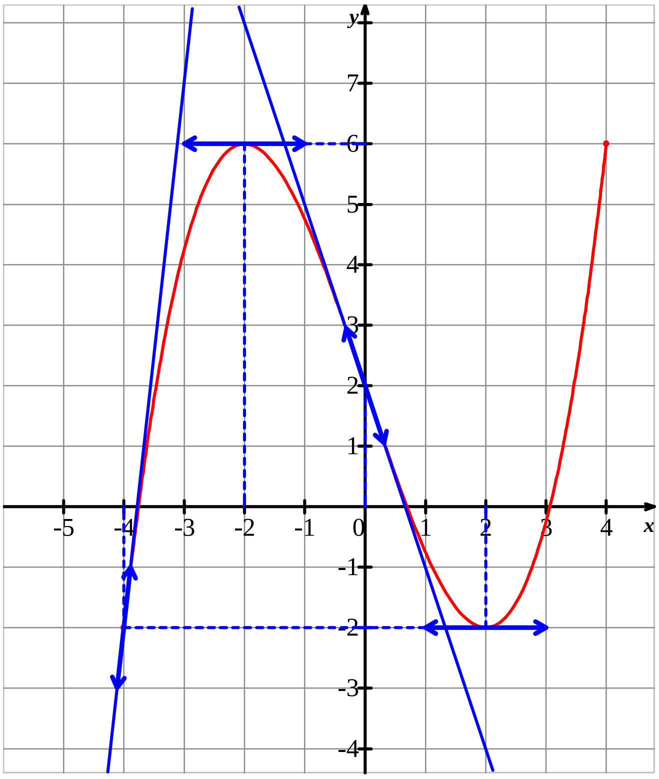
4) Une tangente horizontale en un point d'abscisse x_o à un coefficient directeur nul, donc $f'(x_o) = 0$
La courbe admet donc une tangente horizontale aux points d'abscisse 2 et –2

5) Pour tracer les tangentes à la courbe on peut utiliser le tableau suivant :

x	–4	–2	0	2
y = f(x)	–2	6	3	–2
a = f '(x)	9	0	–3	0



Méthode pour tracer les tangentes



La courbe et ses tangentes

Remarque :

On aurait pu, mais c'est plus long, calculer l'équation des tangentes

Au point d'abscisse –4, l'équation est
y = 9x + 34

Au point d'abscisse 0, l'équation est
y = –3x + 2