Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

Note liminaire

Programme selon les sections :
- notion de suite, représentation graphique, suites arithmétiques, suites géométriques : toutes sections
- somme de termes, limite de suites arithmétique et géométrique : STI2D, STL, ES/L, S
- suites arithmético-géométriques : ES/L, S
- opérations sur les limites, comparaisons, raisonnement par récurrence : S

Prérequis

Fonctions – notion de limite – calcul de puissances

Plan du cours

1. Etude de suites

Définition :

Une suite numérique est **une fonction définie sur** $\mathbb{N}$ (l'ensemble des entiers naturels), ou sur un intervalle *I* de $\mathbb{N}$.

On peut noter une suite $(u_n)_{n\in I}$ (I étant l'ensemble de définition de la suite), (u_n) ou *u*. Le n^{ème} de la suite *u* est noté u_n, le n+1ème u_{n+1}, etc.

Il y a deux manières de définir une suite : par une **relation de récurrence** (relations entre les termes entre eux) ou par une **formule explicite** (expression des termes en fonction de leur rang *n*).

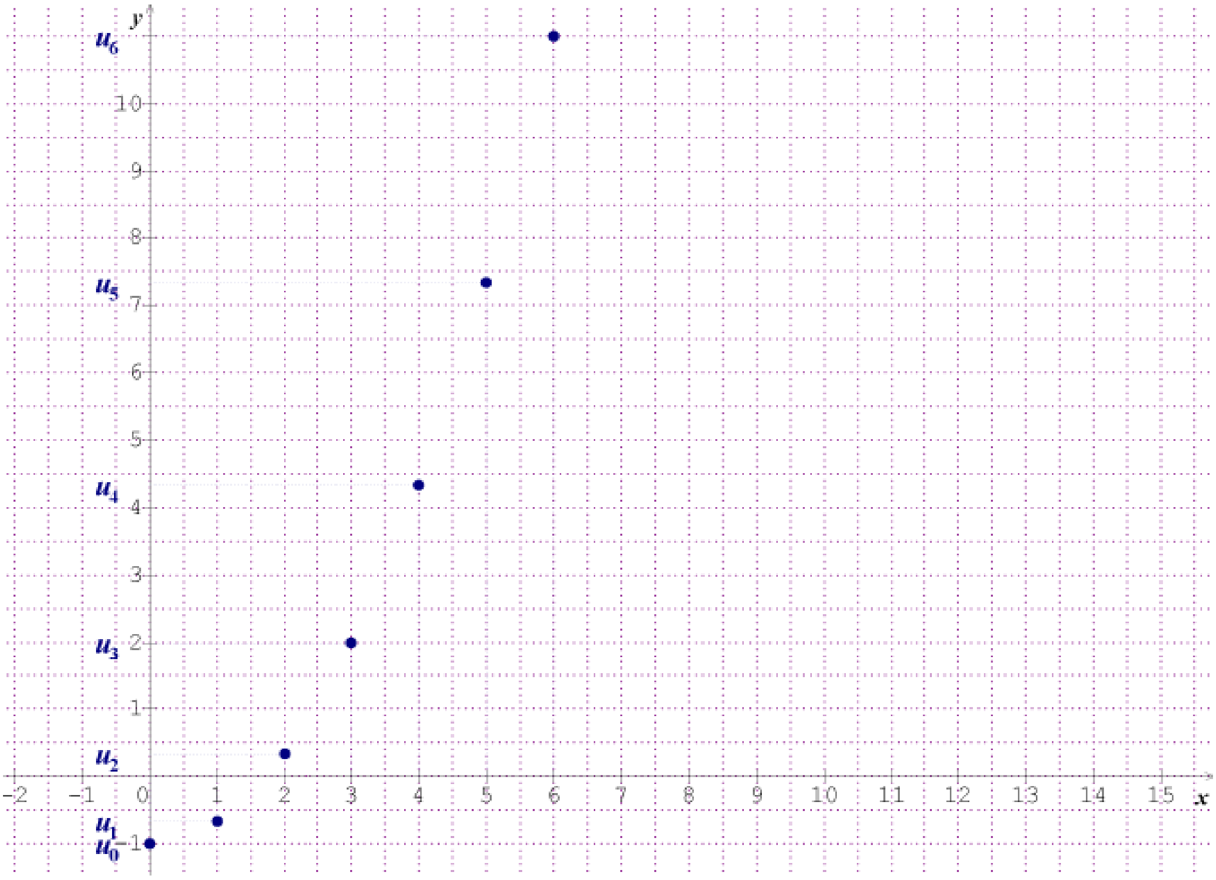
Exemples :

u telle que $u_{n+1} = \frac{4}{u_n+3}$ et $u_0 = 2$ est définie par une relation de récurrence.

v telle que $v_n = \frac{n^2}{3} - 1$ est définie par une formule explicite.

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

Représentation graphique : Ex : $v_n = \frac{n^2}{3} - 7$



La représentation graphique d'une suite numérique est un ensemble de points.

Remarque :

Pour définir complètement une suite (c'est-à-dire être en mesure de calculer chacun de ses termes), il faut soit la formule explicite, soit la relation de récurrence **et** la valeur d'un terme.

Sens de variation :

Une suite est **croissante** si et seulement si pour tout $n \in I$ $\boldsymbol{u_n \leq u_{n+1}}$

Une suite est **décroissante** si et seulement si pour tout $n \in I$ $\boldsymbol{u_n \geq u_{n+1}}$

Ex : La suite *v* définie précédemment est croissante. C*orollaire : si une suite u est croissante, et* $p \in I$*, alors pour tout* $n \in I$ *tel que* $n \geq p$ *on a* $u_n \geq u_p$ *(si la suite est décroissante, on a* $u_n \leq u_p$*).*

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

2. Suites arithmétiques

Définition :

Une suite *u* est dite **arithmétique** s'il existe $r \in R$ tel que pour tout $n \in I$ $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$
Le réel ***r*** est la **raison** de la suite.

- relation de récurrence : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$
- formule explicite : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$

Remarques :

- La formule explicite se généralise : $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$

- La représentation graphique d'une suite arithmétique est un ensemble de points alignés, car une suite arithmétique est une fonction affine définie sur $\mathbb{N}$ (on rappelle que la représentation graphique d'une fonction affine est une droite).

Sens de variation :

Une suite arithmétique est **constante si $\boldsymbol{r = 0}$, strictement croissante si $\boldsymbol{r} > 0$, strictement décroissante si $\boldsymbol{r} < 0$.**

Exemples :

$u_{n+1} = u_n + 4$ (suite arithmétique de raison 4)

$v_n = 5 - 3n$ (suite arithmétique de raison -3 et de premier terme 5)

Somme de termes :

Somme de tous les termes :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Somme à partir d'un rang *p* :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

3. Suites géométriques

Définition :

Une suite *u* est dite **géométrique** s'il existe $q \in R$ tel que pour tout $n \in I$ $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$
Le réel ***q*** est la **raison** de la suite.

- relation de récurrence : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n \times q}$
- formule explicite : $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$

Remarque :

- La formule explicite se généralise : $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

Sens de variation :

- Si $\boldsymbol{u_0} > 0$:
u est **strictement croissante si** $\boldsymbol{q} > 1$, **strictement décroissante si** $\boldsymbol{0} < q < 1$, constante si $q = 0$ (tous les termes sont nuls) ou si $q = 1$.

- Si $\boldsymbol{u_0} < 0$:
u est **strictement décroissante si** $\boldsymbol{q} > 1$, **strictement croissante si** $\boldsymbol{0} < q < 1$, constante si $q = 0$ (tous les termes sont nuls) ou si $q = 1$.

- Si $q < 0$, la suite est dite **alternée** (ses termes sont alternativement positifs et négatifs).

Exemples :

$u_{n+1} = -2u_n$ (suite géométrique de raison -2)

$v_n = 5 \times (\frac{1}{3})^n$(suite arithmétique de raison 1/3 et de premier terme 5)

Somme de termes :

Pour $q \neq 1$, somme de tous les termes :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Pour $q \neq 1$, somme à partir d'un rang *p* :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

4. Suites arithmético-géométriques

Définition :

Une suite *u* est dite **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in R$ et $b \in R$ tel que pour tout $n \in I$ $\boldsymbol{u_{n+1} = au_n + b}$

Remarques :

- Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique pour laquelle $a = 1$.
- Une suite arithmétique est une suite arithmético-géométrique pour laquelle $b = 0$.

Recherche de la formule explicite d'une suite arithmético-géométrique u :
1) On construit une suite géométrique v telle que $v_n = u_n - \alpha \quad (\alpha \in R)$
2) On exprime v_n *en fonction de n (formule explicite).*
3) On en déduit l'expression de u_n

Exemple :

$u_{n+1} = 3u_n - 1$ et $u_0 = 2$

1) On pose $v_n = u_n - \alpha$
$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha = 3u_n - 1 - \alpha$

$u_n = v_n + \alpha$
d'où $v_{n+1} = 3(v_n + \alpha) - 1 - \alpha = 3v_n + 3\alpha - 1 - \alpha$
$v_{n+1} = 3v_n + 2\alpha - 1$

Pour que *v* soit une suite géométrique, il faut qu'il existe *q* tel que $v_{n+1} = v_n \times q$
On a donc : $q = 3$ et $2\alpha - 1 = 0$
$2\alpha = 1$
$\alpha = \frac{1}{2}$

$v_{n+1} = 3v_n$
$v_n = v_0 \times 3^n$
$v_0 = u_0 - \alpha = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
$v_n = \frac{3}{2} \times 3^n$
$u_n = v_n + \alpha$
d'où $u_n = \frac{3}{2} \times 3^n + \frac{1}{2}$ *(formule explicite de la suite u)*

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

5. Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer certaines propriétés de suites à partir de leur relation de récurrence.
Par ailleurs, ce raisonnement n'est pas uniquement valable pour les suites.

Principe de récurrence :

Soit une proposition P_n dépendant d'un entier n (son rang).
Pour démontrer que P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, il suffit de démontrer que :
1) la proposition P_{n0} est vraie.
2) si P_p est vraie (avec $p > n_0$) alors P_{p+1} est vraie.

L'étape 1) est **l'initialisation** du raisonnement par récurrence. L'étape 2) est la démonstration de **l'hérédité** de la propriété.

Exemple :

$S_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$
Démontrer que pour tout entier $n > 0$ la proposition « $S_n = 2^{n+1} - 1$ » est vraie.

Initialisation :
$S_1 = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3$ et $2^{1+1} - 1 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$
donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

Hérédité :
Soit un entier $p > 0$. Supposons que $S_p = 2^{p+1} - 1$
Alors $S_{p+1} = \sum_{k=0}^{p+1} 2^k = S_p + 2^{p+1} = 2^{p+1} - 1 + 2^{p+1}$
$S_{p+1} = 2 \times 2^{p+1} - 1 = 2^{p+2} - 1$
$S_{p+1} = 2^{(p+1)+1} - 1$
Donc si la proposition est vraie pour $p > 0$ alors elle est vraie pour $p + 1$.
La proposition est héréditaire.

Conclusion :
La proposition « $S_n = 2^{n+1} - 1$ » est vraie pour $n = 1$, et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier $n > 0$.

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

6. Limites de suites

Convergence :

Si une suite a une **limite finie** ($\lim_{n\to+\infty} u_n = l$), on dit qu'elle est **convergente**.
Dans le cas contraire (limite infinie ou absence de limite), on dit qu'elle est **divergente**.

Unicité de la limite :

- Si une suite est **convergente** alors elle admet une **unique limite**.

Limite d'une suite arithmétique :

- Si $\boldsymbol{r} > 0$ alors la suite **tend vers** $+\infty$.
- Si $\boldsymbol{r} < 0$ alors la suite **tend vers** $-\infty$.

Limite d'une suite géométrique :

- Si $\boldsymbol{q} > 1$ et si $\boldsymbol{u_0} > 0$, la suite **tend vers** $+\infty$ (elle est **divergente**).
- Si $\boldsymbol{q} > 1$ et si $\boldsymbol{u_0} < 0$, la suite **tend vers** $-\infty$ (elle est **divergente**).
- Si $\boldsymbol{0} < q < 1$, la suite **tend vers 0** (elle est **convergente**).
- Si $\boldsymbol{q} < 0$, la suite **n'a pas de limite** (elle est **divergente**).

Limites de suites usuelles :

$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty$ $\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$ $(p > 0)$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$ $(p > 0)$
$\lim_{n\to+\infty} k = k$

Théorèmes de comparaison de limites :

- Soient deux suites *u* et *v* de limites respectives *l* et *l'*.
Si à partir d'un certain rang $\boldsymbol{u_n \geq v_n}$ alors $\boldsymbol{l \geq l'}$.

- Soient deux suites *u* et *v* telles que $\boldsymbol{u_n \geq v_n}$ à partir d'un certain rang.
Si $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} v_n} = +\infty$ alors $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n} = +\infty$
Si $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n} = -\infty$ alors $\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} v_n} = -\infty$

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite *u* est **croissante et majorée** (à partir d'un certain rang $u_n \leq M$) alors elle est **convergente.**
(avec $l \leq M$)

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

- Si une suite *u* est **décroissante et minorée** (à partir d'un certain rang $u_n \geq m$) alors elle est **convergente.**
(avec $l \geq m$)

Propriété pour les suites monotones non bornées :

- Si une suite *u* est **croissante et non majorée** alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si une suite *u* est **décroissante et non minorée** alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème des gendarmes :

Soient un réel l et trois suites *u*, *v* et *w* telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

Opérations sur les limites :

- Limite de $u + v$

$\lim_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} u_n$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	X
$-\infty$	$-\infty$	X	$-\infty$

- Limite de $u \times v$

$\lim_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} u_n$	l $l > 0$	l $l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l' > 0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l' < 0$	$l \times l'$	$l \times l'$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	X	X
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	X	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	X	$-\infty$	$+\infty$

- Limite de $\frac{1}{u}$

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$
l $(l \neq 0)$	$\frac{1}{l}$
$+\infty$	0
$-\infty$	0
0_+	$+\infty$
0_-	$-\infty$

- Limite de $\frac{u}{v}$

$\lim_{n\to+\infty} v_n$ \ $\lim_{n\to+\infty} u_n$	l $l > 0$	l $l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l' > 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$
l' $l' < 0$	$\frac{l}{l'}$	$\frac{l}{l'}$	0	$-\infty$	$+\infty$
0_+	$+\infty$	$-\infty$	X	$+\infty$	$-\infty$
0_-	$-\infty$	$+\infty$	X	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	0	X	X
$-\infty$	0	0	0	X	X

Mathématiques – Toutes séries
Suites numériques

