Correction des exercices sur les suites arithmétiques

1) Vérifier si une suite est arithmétique

Exercice 1

a) Calculons les 1[er] termes de (U_n)
$U_0 = 4$
$U_1 = 7$
$U_2 = 10$
on remarque que $U_1 - U_0 = U_2 - U_1 = 3$
La suite est peut-être arithmétique, mais il faut le démontrer pour tout n
$U_n = 3n + 4$
$U_{n+1} = 3(n + 1) + 4 = 3n + 7$
$U_{n+1} - U_n = 3n + 7 - 3n - 4 = 3$
Donc pour tout *n* on a
$U_{n+1} = U_n + 3$
(U_n) est donc une suite arithmétique de raison 3

b) Calculons les 1[er] termes de (V_n)
on doit avoir $n \neq 0$ donc le 1[er] terme ne peut être que U_1
$V_1 = 1+ 12 = 13$
$V_2 = 2 + \frac{12}{2} = 8$
$V_3 = 3 + \frac{12}{3} = 7$
on a donc : $V_2 - V_1 \neq V_3 - V_2$
La suite (V_n) n'est donc pas arithmétique

Exercice 2

On a :
$U_n = an + b$
$U_{n+1} = a(n + 1) + b = an + a + b$
Alors :
$U_{n+1} - U_n = an + a + b - an - b = a$
Donc :
$U_{n+1} = U_n + a$
La suite (U_n) est donc arithmétique de raison *a*

2) On vous donne la raison et un terme

Exercice 3

La suite est arithmétique de 1[er] terme U_0 et de raison –7. elle s'écrit en fonction de *n* :
$U_n = 100 - 7n$
$U_{15} = 100 - 7\times15 = -5$
Le 1[er] terme étant U_0 alors le 20[ème] terme est $U_{19} = 100 - 7\times19 = -33$
L'inéquation $U_n \leq 0$ s'écrit $100 - 7n \leq 0$
$-7n \leq -100 \Leftrightarrow 7n \geq 100 \Leftrightarrow n \geq \frac{100}{7} \approx 14,3$
Donc $U_n < 0$ dès que $n \geq 15$

Exercice 4

La suite s'écrit en fonction de *n* :
$U_n = U_0 + 2,5n$
On sait que $U_7 = 25$
Donc $U_0 + 2,5\times7 = 25 \Leftrightarrow U_0 = 25 - 2,5\times7 = 7,5$

Le 1[er] terme de cette suite est $U_0 = 10$
On peut donc écrire $U_n = 7,5 + 2,5n$
Le 30[ème] terme est $U_{29} = 7,5 + 2,5\times29 = 80$

Exercice 5

On peut poser $U_1 = 15$
La suite s'écrit en fonction de *n* :
$U_n = 15 + 7(n - 1)$
le 100[ème] terme est alors
$U_{100} = 15 + 7(100 - 1) = 15 + 7\times99 = 708$

Si on avait choisit de poser $U_0 = 1,5$
La suite s'écrit en fonction de *n* :
$U_n = 15 + 7\times n$
Mais le le 100[ème] terme est ici $U_{99} = 1,5 + 7\times99=708$
et on retrouve bien le même résultat

3) On vous donne deux termes

Exercice 6

On sait que $U_1 = U_0 + R$
Donc $R = U_1 - U_0 = 22 - 17 = 5$

La suite s'écrit en fonction de *n* :

$U_n = 17 + 5\times n$
le 11ème terme est $U_{10} = 17 + 5\times 10 = 67$

Exercice 7

La suite s'écrit en fonction de *n* :
$U_n = 8 + (n-1)R$
or $U_{11} = 13$

$8 + (11-1)R = 13 \quad \Leftrightarrow \quad 10R = 13 - 8 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

On a donc :

$U_n = 8 + \frac{n-1}{2}$

Le 21ème terme de cette suite est $U_{21} = 8 + \frac{21-1}{2} = 18$

Exercice 8

On a $U_n = U_1 + R(n-1)$ Il y a donc deux inconnues *R* et U_1, ce qui implique de trouver deux équations avec ces deux inconnues.

or $U_{13} = 50 \quad \Leftrightarrow \quad U_1 + R(13-1) = 50$
Et $U_{21} = 62 \quad \Leftrightarrow \quad U_1 + R(21-1) = 62$

On a donc le système d'équations $\begin{cases} U_1 + 12R = 50 \\ U_1 + 20R = 62 \end{cases}$

On obtient $20R - 12R = 62 - 50 \Leftrightarrow 8R = 12$ soit $R = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ puis $U_1 = 50 - 12\times\frac{3}{2} = 32$

La suite s'écrit donc $U_n = 32 + \frac{3}{2}(n-1)$

4) Problèmes

Exercice 9

les premiers nombres finissants par 7 sont : 7 ; 17 ; 27
On reconnaît une suite arithmétique de 1er terme $U_1 = 7$ et de raison $R = 10$

La suite s'écrit en fonction de *n* :
$U_n = 7 + 10(n-1) = 10n - 3$

les nombre se terminant par 7 et inférieur à 2000 vérifient :

$U_n < 2000$

$10n - 3 < 2000 \quad \Leftrightarrow 10n < 2003 \quad \Leftrightarrow \quad n < \frac{2003}{10} \quad \Leftrightarrow \quad n < 200{,}3$

Il y a donc 200 nombres se terminant par 7 entre 7 et 2000

Le dernier est $U_{200} = 10*200-3 = 1997$

Exercice 10

La production est une suite arithmétique de raison 6 500 et de 1er terme $U_0 = 240\,000$

La suite s'écrit en fonction de *n* :

$P_n = 240\,000 + 6\,500\times n$

Calculons *n* pour que la production soit supérieur ou égal 300 000 unités

$P_n \geq 300\,000$

$240\,000 + 6\,500\times n \geq 300\,000$

$6500n \geq 60\,000$

$n \geq \frac{60\,000}{6\,500} = 9{,}23$ donc *n* doit être supérieur ou égal à 10

La production sera au moins égale à 300 000 unités en 2020 (2010 + 10)