FORMULAIRE D'ELECTROMAGNETISME

* équat° diff de conservation de la charge $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

* principe de moindre action (Maupertuis - Hamilton)
  lois variationnelles du mv^t

$L \equiv L(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n ; t)$ fonction de Hamilton - Lagrange

$(t_1)\,M_1$ - - - - $M_2\,(t_2)$

$$\boxed{\delta \int_{t_1}^{t_2} L\, dt = 0}$$

* distribution de charges $\rho = q\,\delta(\vec{r})$ et $\int_{vol} \rho\, d\tau = Q$

* <u>équations de Maxwell</u>

$$\boxed{\begin{array}{llll} \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho & & \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} & & \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array}}$$

traduisent la conservat° de la charge électrique — <u>Equations électriques</u>

conservation de la charge magnétique — <u>Equations magnétiques</u>

* équat° constitutives $\boxed{\vec{B} = [\mu]\,\vec{H} \qquad \vec{D} = [\varepsilon]\,\vec{E} \qquad \vec{J} = [\sigma]\,\vec{E}}$

* non linéarité $\vec{B} = \mu(\vec{H}) \cdot \vec{H}$

approximat° linéaire $\mu(\vec{H}) = a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + \ldots$

* potentiels électriques

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\mathrm{grad}}\,V \\ \vec{B} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \end{array}}$$

* conservation potentiels $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$

<u>Condit° de Jauge de Lorentz</u>

* potentiel de HERTZ : $\exists\, \vec{\pi}$ /

$$\boxed{\begin{array}{l} V = \mathrm{div}\,\vec{\pi} \\ \vec{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \vec{\pi}}{\partial t} \end{array}}$$

* $\rho \xrightarrow{\text{cré}} V \qquad \vec{j} \xrightarrow{\text{cré}} \vec{A}$

une source cré son potentiel, mais elle peut créer plusieurs types de champs.

sources indépendantes $\Rightarrow$ problèmes linéaires

* principe d'incertitude d'Heisenberg

$$\boxed{\Delta p \cdot \Delta x \geq h \qquad \text{photon} \quad p = \frac{h\nu}{c}}$$

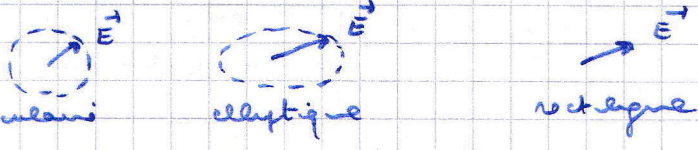
* pression de radiation $\boxed{p = \dfrac{2\mathcal{P}}{c}}$ $\mathcal{P}$: puissance ray / unité surface et temps

* impédance du vide $\underline{Z_0 = 377\ \Omega}$ $\boxed{Z = \sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}}$

onde plane $H = \dfrac{E}{Z}$ $\boxed{\varepsilon \mu v^2 = 1}$

Les ondes électromagnétiques sont transverses loin des sources

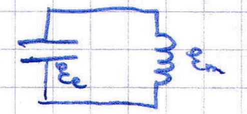
* polarisat° :



* $\boxed{\vec{\mathcal{P}} = \vec{E} \wedge \vec{H}}$ et $\boxed{\langle \vec{\mathcal{P}} \rangle = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{2}\, \vec{E} \wedge \vec{H}^*\right)}$ valeur moyenne du vecteur de Poynting

$P_{ray} = \iint_\Sigma \vec{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S}$ $\boxed{\underline{P_{moyenne}} = \iint_\Sigma \langle \vec{\mathcal{P}} \rangle \cdot d\vec{S}}$ puissance moyenne

$$\boxed{\mathcal{E}_{EM} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2} \qquad \boxed{E = Z H}$$



$\underline{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} C V^2}$; $\underline{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L I^2}$

* $\underline{\underline{\text{Echelles}}}$:

1/ statique $\to \lambda \equiv \infty$ (magnét séparé électrostatique)

2) électrodyn $\to$ objet $\ll \lambda$ $\cancel{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$, $\frac{\partial}{\partial t}$ oui pas de propagat°

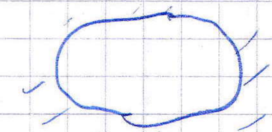
3) résonant $\to$ objet $\sim \lambda$ $\to$ résoudre équat° de Maxwell

4) optique physique $\to$ objet $\gg \lambda$ $\to$ ondes planes approximat° scalaire $\vec{E} \propto \vec{H}$

5) — géométrique $\to \lambda = 0$

* conditions aux limites :

$$\boxed{\begin{array}{l} E_{1T} - E_{2T} = 0 \\ B_{1n} - B_{2n} = 0 \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \\ \vec{H_{2T}} - \vec{H_{1T}} = \vec{n_{21}} \wedge \vec{j_s} \end{array}}$$



conduct° mur électrique $E_T = 0$

— magnétique $H_T = 0$

* Identité de Poynting $\boxed{\mathrm{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E}\, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$

$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{E}\, \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \to W = \mathcal{E}_{EM}$

$\vec{\mathcal{P}}$ est le courant de $\mathcal{E}_{EM}$

$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ $(\vec{J} \cdot \vec{E} = \sigma E^2)$ perte Joules

$\vec{J} = \rho \vec{V}$ $(\vec{J} \cdot \vec{E} = \rho \vec{V} \cdot \vec{E})$ énergie cinétique

$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial W}{\partial t} = - \underbrace{P_{ray}}_{\vec{\mathcal{P}}} - \underbrace{P_{matière}}_{\vec{J} \cdot \vec{E}}}$ $\to$ traduit que l'énergie EM contenue ds un volume varie : - par propagat° - par échange avec la matière

* équat° de propagat° : on a $\vec{J} = \underbrace{\sigma \vec{E}}_{\text{courant de conduct°}} + \vec{J}'$ ← courant vraies (pertes Joules)

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial \vec{J}'}{\partial t} + \frac{\vec{\text{grad}}\, \rho}{\varepsilon}}$$

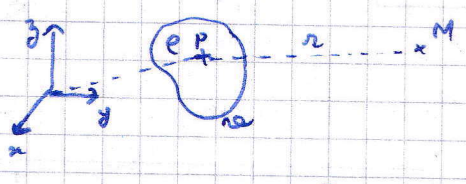
$$\boxed{\Delta \vec{H} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \vec{\text{rot}}\, \vec{J}'}$$

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}}$$

$$\boxed{\Delta V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}}$$

* Statique : $V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{r}\, d\tau$

$\vec{A}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(P)}{r}\, d\tau$



* dynamique : $V_{(M)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P, t - \frac{r}{c})}{r}\, d\tau$ $\quad \vec{A}_{(M)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}(P, t - \frac{r}{c})}{r}\, d\tau$

* ondes harmoniques équat° de Maxwell → linéaires $\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$

$\vec{E} = \vec{E_0}\, e^{i\omega t}$ et $\boxed{\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \frac{i\sigma}{\omega}} = \varepsilon' - i\varepsilon''$

milieu dispersif → $\varepsilon(\omega)$ $\quad n = \frac{c}{v}$ $\quad \boxed{\tilde{n} = \sqrt{\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0} \frac{\tilde{\mu}}{\mu_0}}}$

* matériau sans pertes $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ et $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$

* milieu à perte $\mu_r = 1 \Rightarrow n = \sqrt{\varepsilon'_r}\left(1 - \frac{i\sigma}{\omega\varepsilon_0\varepsilon'_r}\right)^{1/2}$

on a $e^{-ink_0 z} = e^{-\alpha z}\, e^{-ikz}$ avec $\boxed{\alpha = \frac{\sigma Z_0}{2\sqrt{\varepsilon'_r}}}$ coefficient d'absorption

on a $k = n k_0$ $\quad \boxed{\tilde{n} = n - i\kappa}$ $\quad \boxed{\kappa = \frac{\alpha}{k_0}}$ indice d'absorption

$$\boxed{\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\mu_0\sigma f}}}$$

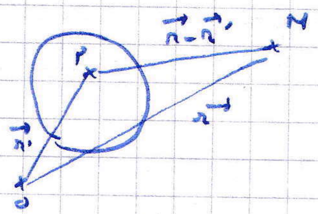
épaisseur de peau tel que le champ est divisé par e
l'énergie — e^2

Longueur d'onde de transit° diélect ⟷ conducteur $\boxed{\lambda_0 = \frac{2\pi\varepsilon_r}{Z_0\sigma}}$

* $\boxed{v_\varphi v_g = c^2}$

* il y a rayonnement si $E \propto \frac{1}{r}$

* dynamique → $\vec{A}_{(r)} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\vec{J}(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}\, d\Omega$



rayonnement antenne

$\frac{1}{\omega\varepsilon_0} = \frac{Z_0}{k}$ (à g^de distance) → • $H_\varphi = \frac{Id}{4\pi}\left[\underbrace{\frac{ik}{r}}_{\text{champ lointain}} + \frac{1}{r^2}\right] \sin\theta\, e^{-ikr}\, e^{i\omega t}$ Biot & Savart (proche de la source dipolaire)

• $E_\theta = \frac{Z_0 I d k^2}{4\pi}\left[\underbrace{\frac{i}{kr}}_{\text{propagat°}} + \underbrace{\frac{1}{k^2r^2}}_{\text{dipolaire}} - \underbrace{\frac{i}{k^3r^3}}_{\text{électrostatique}}\right] \sin\theta\, e^{-ikr}\, e^{i\omega t}$ $\quad \boxed{E_\theta = Z_0 H_\varphi}$

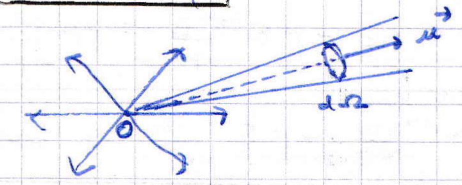
champ lointain → potentiels retardés
perte de mémoire de la source

champ proche → champ existant si source il y a

$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{3} Z_0 I^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (d \ll \lambda)$

$\boxed{Z_{\theta\varphi} = \frac{E_\theta}{H_\varphi}}$

gain en dB → $\boxed{g = 10 \log \left[4\pi \frac{P(\vec{u})}{P_0} \right]}$



plus l'objet est petit, moins il est directif, moins le gain est important

* $\boxed{\text{guides}}$:

$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z} \to -i\gamma$

$\gamma \in \mathbb{R} \to$ onde progressive

$\gamma \in i\mathbb{R} \to$ onde évanescente

métal réel $\leftarrow \gamma \in \mathbb{C} \to$ onde progressive amortie

E_z	H_z	nom	sigle
0	0	..	TEM (onde plane)
0	≠ 0		TE
≠ 0	0		TM
≠ 0	≠ 0	hybride	EH, HE

Seules les TEM n'ont pas de λ_c

$TE_{m,n}$ ← nbre quantiques caractéris modes (m → ox, n → oy)

$\underline{\vec{\mathcal{E}} = \vec{E}(x,y)\, e^{-i\gamma z}\, (e^{i\omega t})}$; $\underline{\vec{\mathcal{H}} = \vec{H}(x,y)\, e^{-i\gamma z}\, (e^{i\omega t})}$

équat° d'Helmholtz $\boxed{\vec{\Delta}\vec{\mathcal{E}} + n^2 k_0^2 \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad \vec{\Delta}\vec{\mathcal{H}} + n^2 k_0^2 \vec{\mathcal{H}} = 0}$

$\Rightarrow \quad \underline{\vec{\Delta}\vec{E} + (n^2k_0^2 - \gamma^2)\vec{E} = 0}$ et $\underline{\vec{\Delta}\vec{H} + (n^2k_0^2 - \gamma^2)\vec{H} = 0}$

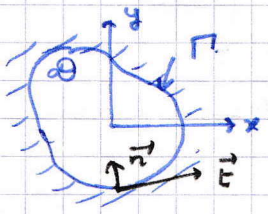
on a
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{H_T}(n^2k_0^2 - \gamma^2) &= -i\gamma\, \overrightarrow{\text{grad}}\, H_z - i\omega\varepsilon\, \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, E_z \\ \vec{E_T}(n^2k_0^2 - \gamma^2) &= -i\gamma\, \overrightarrow{\text{grad}}\, E_z + i\omega\mu\, \vec{e_z} \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, H_z \end{aligned}}$$

• $\boxed{\text{TEM}}$ ⇒ $E_z = H_z = 0 \Rightarrow n^2k^2 - \gamma^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\gamma = nk}$ $\quad \gamma$: c^{te} de propagat°

la propagat° d'une TEM est un cas quasi-statique

ex : a) propagat° bifilaire (50 Hz) circuits électriques ; b) ⊙ coaxial

c) 



sur la surface intérieure (bord du domaine) :

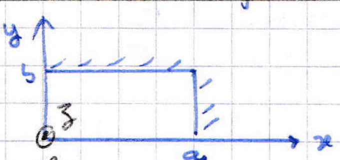
TM	dirichlet	$\vec{E_z} = \vec{0}$
TE	Neumann	$\frac{dH_z}{dn} = 0$

* guides métalliques

$E_z = 0$ sur Γ et $\frac{dH_z}{dn} = 0$ sur Γ $\quad \boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\, H_z = 0}$

TE, TM lin indep mais pour guide métallique ∞ conducteurs

* guide rectangulaire → guide de puissance (faible puissance coaxial, ruban, ...)



on cherche E_z pour $x \in [0,a]$, $y \in [0,b]$

* toute fonction bornée peut être rendue périodique et décomposable sur la base de fourier ($a_1 \sin x, \ldots, a_n \sin nx, b_1 \cos x, \ldots, b_n \cos nx$)

$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \underbrace{(k^2 - \gamma^2)}_{\chi^2} E_z = 0$

on cherche $\boxed{E_z \;/\; E_z = E_0 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}\, e^{i(\omega t - \gamma z)}}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \to -m^2\pi^2/a$ et $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \to -n^2\pi^2/b^2$

f^n nul aux bornes → solut° de Fourier → terme en sinus

équat° de propagat° : $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\, e^{i(\omega t-\gamma z)} = E_z$

⇒ ds l'équat° de propagat° $\sum\sum(\dots)=0\ \forall x,y \Rightarrow (\dots)=0$

$\Rightarrow E_z = E_0 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \Rightarrow \boxed{k^2 = \gamma^2 + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b}}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}}$ avec $\boxed{\frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2}}$ $\quad k(\gamma)=0$ équat° transcendante

λ_c, de coupure pour le mode $TM_{m,n}$ ou $TE_{m,n}$

- $\lambda_c > \lambda$ mode propagatif (onde progressive) ; • $\lambda_c < \lambda$ mode évanescent $\lambda_g \in \mathbb{C}$
- mode fondamental → $\boxed{TM \to TM_{11}}$ et $\boxed{TE \to TE_{10}}$

$TM \to E_z \neq 0$ $\quad E_z$ solut° de $\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (k^2-\gamma^2)E_z = 0$

$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$, $\boxed{\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_g}}$ ⟶ idem pour TE car $H_z \neq 0$ et $\left(\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)_{x=0,a;\ y=0,b}$ C. limite

(λ_g : longueur d'onde guidée) ⇒ $TE_{m,n}$ $H_z = H_0 \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$ $\quad$ m ou $n\neq 0$

- **guide métallique cylindrique** $(\vec\psi = \vec E$ ou $\vec H)$ $\qquad E_z(x,y) \longrightarrow E_z(r,\varphi)$

$\Delta\vec\psi + \omega\mu\varepsilon\vec\psi = \vec 0$ avec $k^2 = \omega\mu\varepsilon$

on cherche la project° sur ψ_z → $\Delta\psi_z + (k^2-\gamma^2)\psi_z = 0$ $\quad \chi^2 = k^2-\gamma^2$

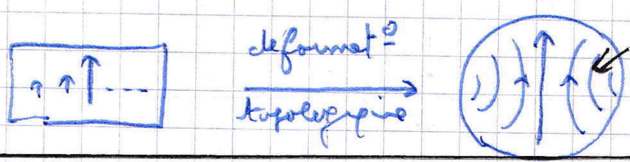
$\psi \propto e^{i(\omega t-\gamma z)}$ → on résout → équat° de Bessel

→ CL → $\boxed{TM\ J_m(\chi a)=0\ ;\ TE\ J'_n(\chi a)=0 \text{ pour } r=a}$ $\quad \boxed{x=\chi r}$

TE → $\chi a = \xi_{m,n}$ or $\gamma^2 = k^2 - \chi^2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_c = \frac{2\pi a}{\xi_{m,n}}}$ idem pour TM $\boxed{\lambda_c = \frac{2\pi a}{\eta_{m,n}}}$

Le mode fondamental est celui qui a la plus petite λ_c

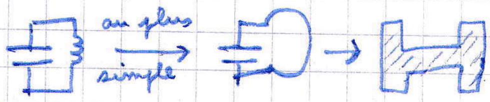


$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec V$ en cylindrique (r,φ,z) $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \text{ (facultatif)} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial\varphi}\end{array}\right.$

$$\boxed{\begin{cases} TM : E_z = \underbrace{E_0 J_m(\chi r)}_{f(r)}\ \underbrace{\sin/\cos\ m\varphi}_{g(\varphi)}\ e^{i(\omega t-\gamma z)} \\ TE : H_z = H_0 \quad - \quad - \quad - \end{cases}}$$

* cavité métallique $\begin{cases}\text{domaine borné compact et fermé} \\ \text{parois } \infty \text{ conductrices}\end{cases}$

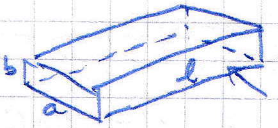
c'est la généralisat° de circuits r, L, C



→ modes TE_{mnp} TM_{mnp}

(r,φ,z) Δf coordonnées cylindriques : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$; $\vec\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\phi}, \frac{\partial f}{\partial z}$ *

Cavité ▭



il faut que $\boxed{l = \frac{p\lambda_g}{2}}$

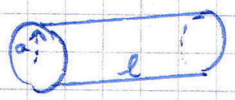
il y a des ondes stationnaires $\qquad \chi^2 = k^2 - \gamma^2$

on a $\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} = \frac{p^2\pi^2}{l^2} + \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2}$ modes

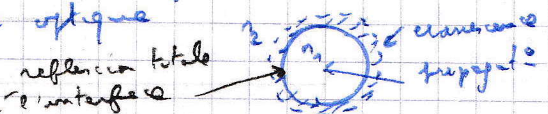
Cavités ○ les cavités sont en général cyl

$\frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{p^2\pi^2}{l^2} + \frac{\xi_{mn}}{a^2} \leftarrow TE_{mnp} \qquad \frac{4\pi^2}{\lambda^2} = \frac{p^2\pi^2}{l^2} + \frac{\eta_{mn}}{a^2} \leftarrow TM_{mnp}$

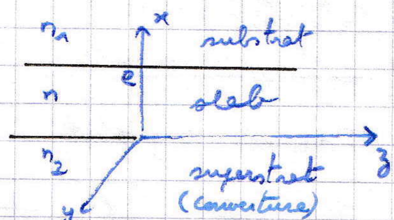
les cavités sont utilisées comme onde-mètre (on donne $l \rightarrow$ détermine λ)



* guide diélectriques on a de forte chance de ne pas avoir de TEM
→ fibre optique



guide planaires
stratificat°



$\frac{\partial}{\partial z} \to -i\gamma \qquad \frac{\partial}{\partial y} \to 0 \qquad \frac{\partial}{\partial t} \to i\omega$

condit° de propagat° $\boxed{n > \frac{\gamma}{k} > Max(n_1, n_2)}$ sinon on a un mode à fuite

on doit avoir évanescence des champs des milieux n_1 et n_2

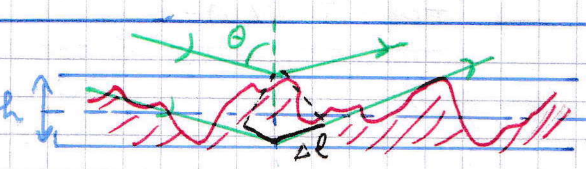
Les équat° aux dispersions sont des équat° transcendantes (∞ de solut°)
chaque solut° → modes

ΣΠ C.L (mode TE) → $\tan kre = \frac{r(r_1 + r_2)}{r^2 - r_1 r_2}$ $\qquad r = \sqrt{n^2 - \frac{\gamma^2}{k^2}} \in R$

$r_{1,2} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{k^2} - n_{1,2}^2} \in (iR)$

$\Rightarrow \frac{2\pi e}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - \tilde{\gamma}^2}}\left[\arctan\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}^2 - n_1^2}{n^2 - \tilde{\gamma}^2}} + \arctan\sqrt{\frac{\tilde{\gamma}^2 - n_2^2}{n^2 - \tilde{\gamma}^2}} + m\pi\right]$

Propagat° Terrestre

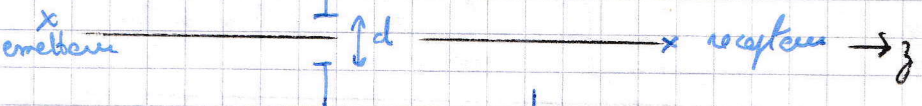


$\delta = 2\Delta l = 2h\cos\theta$

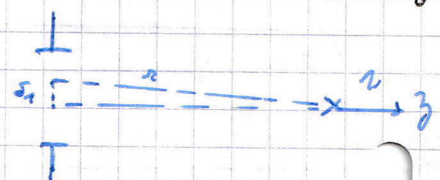
$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta = \frac{4\pi}{\lambda}h\cos\theta \qquad \Delta\varphi < \frac{\pi}{2} \to$ rugosité négligeable

$\Rightarrow \boxed{h \leq \frac{\lambda}{8}\cos\theta}$ soit si $h \leq \frac{\lambda}{10} \to$ on ne voit pas l'irrégularité

diffract° par un écran

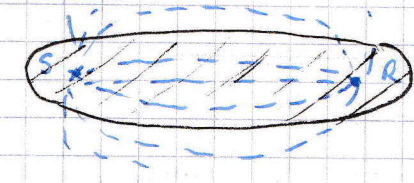


$\Delta\varphi = n\pi \Rightarrow \Delta r = n\frac{\lambda}{2}$ soit $r_n = (z + \frac{n\lambda}{2})$



$r_n^2 = \delta_n^2 + z^2 \Rightarrow \delta_n = \sqrt{(z + \frac{n\lambda}{2})^2 - z^2} \sim \sqrt{n\lambda z}$

$z \gg \lambda \to \boxed{d = \sqrt{n\lambda z}}$



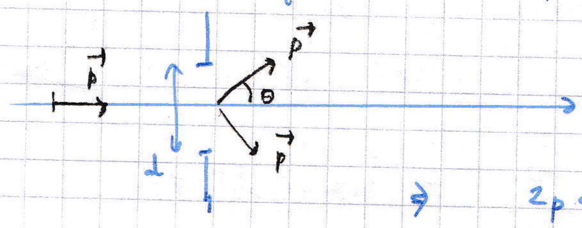
zones de fresnel
ellipse de foyer (S, R)

les trajets aux ~ de la ligne droite sont cohérents et constituent les zones de fresnel [les autres se détruisent en R]

Aspect quantique

$\Delta p \, \Delta x \geq h$ $\qquad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$h = 6{,}631.10^{-34}$ J.s



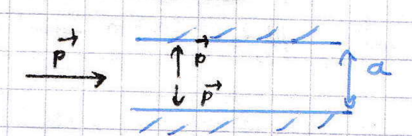
$\Delta p = 2p \sin\theta$ $\qquad \Delta x = d$

$\Rightarrow$ $2p\, d \sin\theta \geq h$ soit $2\frac{h}{\lambda}\sin\theta\, d \geq h$

$\Rightarrow$ $2d\sin\theta \geq \lambda$ formule de bragg $\quad \theta$ petit $\Rightarrow$ $\theta \geq \frac{\lambda}{2d}$

ouverture du faisceau $\psi = 2\theta$ $\Rightarrow$ $\boxed{\psi \gtrsim \frac{\lambda}{d}}$ il faut une antenne d'au moins d (m) pour avoir une directivité de (ψ °)

guide :

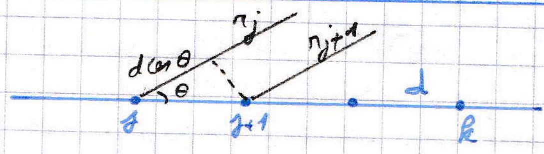


si $\Delta p > 2p$ l'onde ne peut se propager il y a coupure

soit $\Delta p \Delta x > 2p\, \Delta x \geq h$ $\Leftrightarrow$ $2\frac{h}{\lambda} a \geq h$

$\Rightarrow$ $\boxed{\lambda \leq 2a} \rightarrow$ propagat°

Antenne à réseau



$r_j - r_{j+1} = d\cos\theta$

$E_j = E_0\, e^{-ikr_j}$

$E_{j+1} = E_0\, e^{i\varphi}\, e^{-ikr_{j+1}}$ $\Rightarrow$ $E_{j+1} = E_j\, e^{i(\varphi + kd\cos\theta)}$

lorsque $\varphi + kd\cos\theta = 2n\pi$ les dipôles j, $j+1$ sont en phase

$\Rightarrow$ il faut que $\cos\theta = \left(n - \frac{\varphi}{2\pi}\right)\frac{\lambda}{d}$

équat° de propagat° d'Helmoltz $\rightarrow$ $\mathcal{L}(\vec{\psi}) = \vec{0}$ $\qquad \mathcal{L} = (\Delta + k^2)$

$\Leftrightarrow$ $M\vec{\psi} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $\det M = 0$ on aura $f(k,\gamma) = 0$

équat° aux dispersion. c'est une équat° $f(k,\gamma)$ f° transcendante possède une ∞ de solut° $\rightarrow$ chaque solut° $\rightarrow$ mode

chaque mode est une solut° propre du problème (vp de l'opérateur $\mathcal{L} + id_E$)

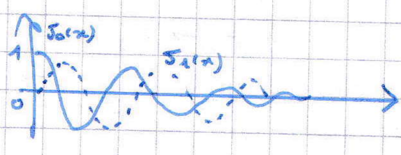
- $\vec{rot}(\lambda\vec{E}) = \lambda\,\vec{rot}\,\vec{E} + \vec{grad}\,\lambda \wedge \vec{E}$
- $div(\vec{E}\wedge\vec{H}) = \vec{H}\cdot\vec{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\cdot\vec{rot}\,\vec{H}$
- $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
- $div(m\vec{E}) = m\, div\,\vec{E} + \vec{E}\cdot\vec{grad}\, m$
- rot rot = grad div $- \Delta$
- div grad = Δ

$div(\vec{rot}) = 0$

$\vec{rot}(grad) = \vec{0}$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0}$$ $\nu \geq 0$ $\qquad$ Bessel

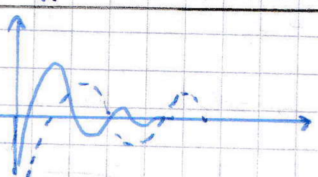
$$\boxed{J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}$$



$J_0(0) = 1$

$J_m(0) = 0 \quad m \neq 0$

$N_n(x)$



$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + i N_\nu(x)$

$H_\nu^{(2)}(x) = \quad " \quad - \quad "$

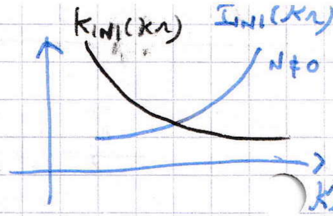
$H_\nu^{(1)(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{-i\phi_\nu}\,[P_\nu(x) \mp i Q_\nu(x)]$

$H_{iN}^{(1)}(ikr) \propto \frac{e^{-kr}}{(ikr)^{1/2}} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$

$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ $\qquad$ fct gamma : $\Gamma(n+1) = n!$ $\quad n \in \mathbb{N}$

équation Bessel modifiée $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$

$H_{|N|}(ix) = \frac{2}{\pi}\, i^{|N|-1} (-1)^{|N|} K_{|N|}(x)$ →



$\lim_{x\to\infty} J_m(x) = 0$, $N_m(x)$

$$\begin{cases} \frac{dJ_m(x)}{dx} = -\frac{m}{x} J_m(x) + J_{m-1}(x) \\ J_{m+1}(x) + J_{m-1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x) \end{cases}$$

$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$

cartésien	cylindrique	
$y = A\cos x + B\sin x$	$y = A J_m(x) + B N_m(x)$	stationnaire
$y = Ae^{ix} + Be^{-ix}$	$y = A H^+_m(x) + B H^-_m(x)$	progressive
$y = A\,\mathrm{ch}\,x + B\,\mathrm{sh}\,x$	$y = A I_m(x) + B K_m(x)$	évanescent

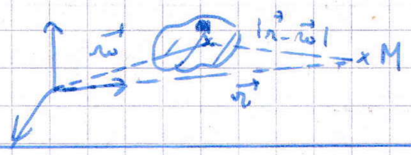
$$\boxed{J_m(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\varphi - m\varphi)\,d\varphi}$$

$$N_m(x) = \frac{\cos \pi m\, J_m(x) - J_{-m}(x)}{\sin(\pi m)}$$

$\Delta\vec{A} + k^2\vec{A} = -\mu\,\delta(\vec{r} - \vec{r_0})\,\vec{j}(\vec{r_0}) \Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \psi * \vec{j}(\vec{r_0})$

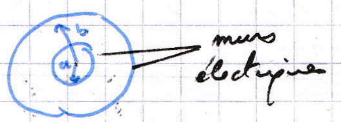
$\Delta V + k^2 V = -\frac{1}{\varepsilon}$ 〃 $\rho(\vec{r_0}) \Rightarrow V(\vec{r}) = \psi * \rho(\vec{r_0})$

$$\left\{ \psi = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r_0}|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r_0}|} \right.$$
sym de révolut° sphérique



$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, g(x-u)\, du$

guide coaxial



le coaxial possède un mode TEM
mode TEM n'a pas de λ_c

$\Rightarrow \vec{H_T}(n^2k_0^2 - \gamma^2) = 0$ et $\vec{E_T}(n^2k_0^2 - \gamma^2) = 0 \Rightarrow$ (car $\vec{E_T} \neq \vec{0}$ et $\vec{H_T} \neq \vec{0}$)

$\Rightarrow \gamma^2 = n^2k_0^2$ en propagat° $\Rightarrow \boxed{\gamma = n k_0}$ $v_\varphi = c$

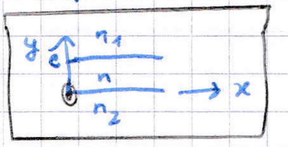
La propagat° d'une onde TEM est un cas quasi-statique

guides diélectriques planaires → $\frac{d^2 f_z}{dy^2} + (n^2k^2 - \gamma^2) f_z = 0$ on cherche f de la forme $e^{\psi y}$

$\Rightarrow \psi^2 = \gamma^2 - n^2k^2$ → on pose $\psi^2 = -k^2r^2 \Rightarrow \propto A e^{\pm i k r y}$

→ $-k^2r^2 = \gamma^2 - n^2k^2 \Rightarrow \left(r^2 = n^2 - \frac{\gamma^2}{k^2}\right)$ $\begin{cases} r^2 > 0 & \text{progressif} \\ r^2 < 0 & \text{évanescent} \end{cases}$

CL: TE E_z, H_x C^0 $\forall x, t$ / TM H_z, E_x C^0 $\forall x, t$



Il faut que $r_1^2 < 0$, $r_2^2 < 0$, $r^2 > 0$

n_1 : $E_z = A_1 e^{-kr_1 y}$
n : $E_z = A\cos kry + B\sin kry$
n_2 : $E_z = A_2 e^{kr_2 y}$

passage de TE → TM | $E_z \to H_z$ $\frac{1}{Z_0} \to -\frac{Z_0}{n}$; $r \to -\frac{r}{n}$

$$\begin{bmatrix} E_z \\ H_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-ikry} & 0 \\ 0 & e^{ikry} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

guide sym : $\forall f \in \mathcal{F}$ $f(y) = f^{\text{paire}}(y) + f^{\text{impaire}}(y)$ → solut° paire ou impaire

$\psi_z = A\cos kry$ (paire)
$A\sin kry$ (impaire)

1	$A e^{-kr_1 y}$
n	$A\cos kry$
1	$A_1 e^{kry}$

$C^0 \Rightarrow$ impair $\tan\frac{kre}{2} = \frac{r_0}{r}$; pair $\tan\frac{kre}{2} = -\frac{r}{r_0}$ (TE)

(TM) → $\tan\frac{kre}{2} = n\frac{r_0}{r}$

$= -\frac{r}{n r_0}$