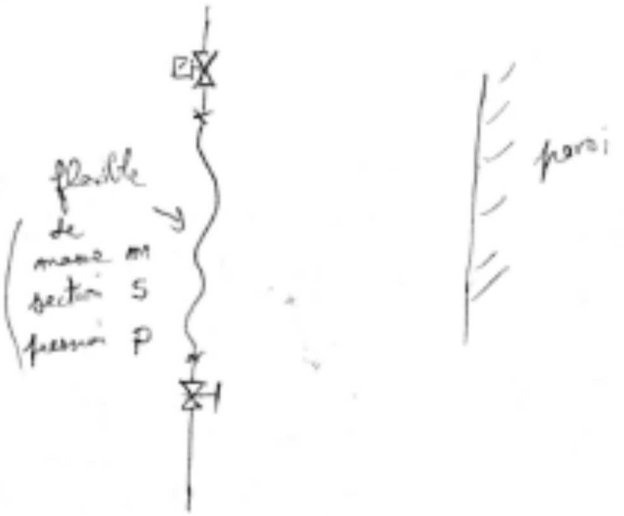
Calcul ~~de la vitesse~~ de fouettement d'un tuyau flexible sur une paroi (rupture guillotine) ①

(Conditions enveloppes
configurations



Lors de la rupture franche du tuyau flexible, il va se produire une réaction de propulsion d'une certaine masse du flexible à une vitesse v.

Soit m^* la portion de masse qui va subir la propulsion. On suppose que tous les points de cette portion ont la même vitesse v.

La force de propulsion d'après le (théorème méca flu) d'Euler est $\underline{F} = Q_m(\underline{V_2} - \cancel{\underline{V_1}})$ (tuyère $V_2 \leftarrow$ $\leftarrow V_1$

dans le problème $v = V_2$, v est inhérent à la pression cinétique de propulsion : $\frac{1}{2}\rho v^2$

Soit la pression statique P se transforme en pression cinétique $\rightarrow P = \frac{1}{2}\rho v^2$, ρ masse volumique (H_e par exemple)

② 1/ Calcul de la vitesse d'éjection fluide v et force propulsion F

on a la force de propulsion $F = Q_m v$

or $Q_m = \frac{dm}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho \frac{dV}{dt} = \rho Q_v = \rho S v$

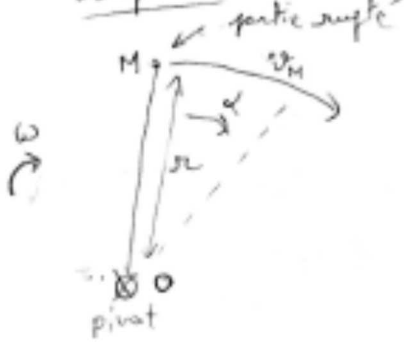
avec S la section sortie fluide. (2)

d'où $F = \rho S v^2$. (par ailleurs $P = \frac{1}{2} \rho v^2$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2P}{\rho}}$)

in fine $\boxed{F = 2SP}$

2/ Calcul de l'énergie cinétique de rotation du flexible et de la vitesse d'un point M en bout de section de rupture.



le moment $\boxed{M = F . r}$

d'après le théorème du moment cinétique

$M = \frac{d\sigma}{dt}$, σ //

$\rightarrow M = \frac{d}{dt}(\underline{OM} \wedge m \underline{v_M}) = m \frac{d}{dt}(r\, v_M)$

or $\Rightarrow \frac{dv_M}{dt} = \frac{M}{mr} \Rightarrow v_M = \overbrace{\frac{M}{mr}}^{\gamma \text{ accélérat°}} t + K$

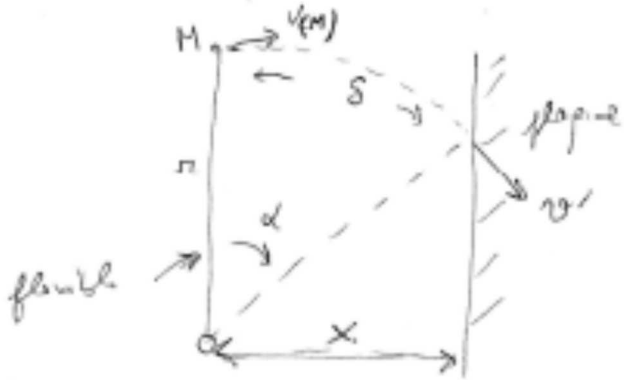
or $t = 0$, $v_M = 0 \Rightarrow K = 0$ d'où $\boxed{v_M = \frac{M}{mr} t}$

par ailleurs $v_M = \omega r \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{v_M(t)}{r}}$

l'énergie cinétique de rotat° $\boxed{E_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2}$

avec $J = \frac{m}{2}(R^2 + r^2)$ pour un cylindre creux de masse m

3/ Calcul de la vitesse d'impact du point M sur une plaque située à côté



on a $x = r \sin\alpha$

$\delta = r\alpha$

$\Rightarrow \boxed{\delta = x \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}}$

PFD $\Rightarrow$ $\delta = \dfrac{1}{2}\gamma t^2$ (et $t = \dfrac{v}{\gamma}$) $\left(\gamma = \dfrac{M}{m r}\right)$

$\Rightarrow$ $\delta_{impact} = \dfrac{v'^2}{2\gamma}$ d'où $\boxed{v' = \sqrt{2\gamma\, \delta_{impact}}}$

distance parcourue avant impact

~~ou~~ $\cancel{v' = \sqrt{2\gamma\, x\, \alpha}}$

En outre, $\left.\begin{array}{l} X = r \sin \alpha \\ \delta = r\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\delta = r \arcsin\left(\frac{X}{r}\right)}$ 3

Enfin, $v' = \sqrt{\frac{2M}{m \cancel{x}} \cancel{x} \arcsin\left(\frac{X}{r}\right)}$

$$\boxed{v' = \sqrt{\frac{2M}{m} \arcsin\left(\frac{X}{r}\right)}}$$

Rappel
$\left\{\begin{array}{l} M = F.r \\ F = 2SP \end{array}\right.$
$\rightarrow \underline{M = 2SPr}$

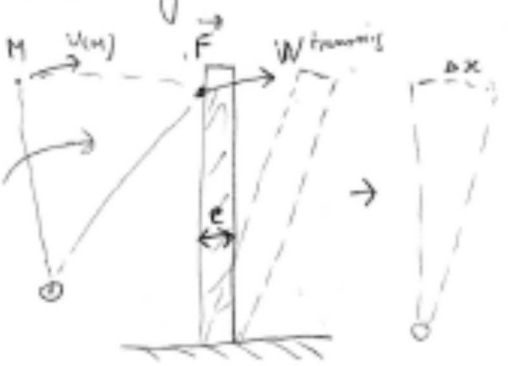
Supposons de manière conservatoire que le point M embarque toute la masse m du flexible / pivot

$\Rightarrow \boxed{E_{\text{cinétique d'impact}} = \frac{1}{2} m v'^2}$

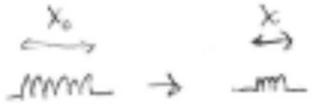
On va considérer de manière conservatoire que toute l'énergie cinétique est transmise à la plaque.

4/ Essai calcul de la force d'impact sur la plaque

L'énergie cinétique va être convertie en travail sur la plaque qui va subir une flexion avec une flèche de déformation Δx.



$\Leftrightarrow$



$\Delta x = X_0 - X$

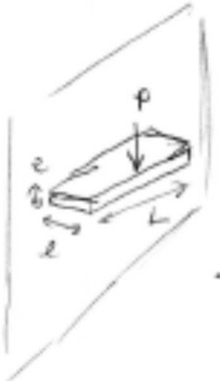
et $F_{impact} = K \, \Delta x$

or le travail $W = F_{imp} \, \Delta x$

$\Rightarrow \boxed{F_{imp} = \sqrt{W K}}$

K : raideur de la plaque (L, l, e, matériau) en flexion (cf. théorie des plaques).

les tracés des courbes d'exp pour les raideurs K des plaques en flexion



* quelle est la raideur d'une plaque d'épaisseur e de largeur l et longueur L selon le matériau ?

→ soumise à effort de flexion

K est la matrice de raideur ou de rigidité relative aux effets de flexion (voir théorie des plaques)

on a coefficient raideur linéaire ou angulaire

$$K = \frac{F}{x} \qquad K_\theta = \frac{M}{\theta}$$

Matrice de raideur $F_i = K_{ij}\, x_j$

De manière simplifier, on considère une plaque ~ carré d'épaisseur $e \ll$ dimension du carré (côté)

Dans le Roark's formulas for stress and strain, on a :

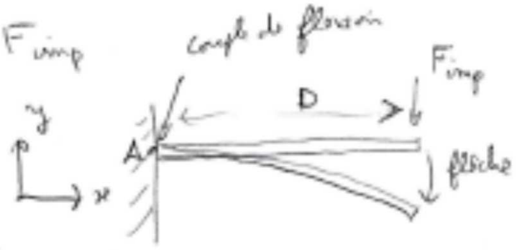
$$K_{global} = \frac{E\, e^3}{12(1-\nu^2)}$$ avec E et ν module d'Young et coeff poisson du matériau

<u>De manière récapitulative on a</u>

$$E_{cinet\ impact} \sim W = \frac{1}{2} m v'^2 \quad \text{avec } v' = \left(\frac{4 S P r}{m} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right)^{1/2}$$

$$\boxed{F_{imp} = \sqrt{W\, K_{global}}}$$

Sachant F_{imp}



⇒ calcul du tenseur des contraintes sur la section au point A

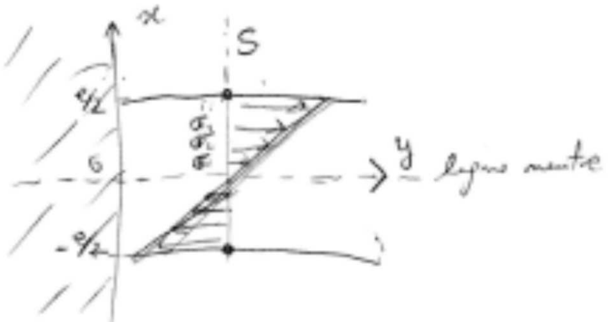
σ_{ij}

$M_{flexion} = F_{imp} \cdot D$

5/ Calcul de la contrainte de traction (flexion pure) (6)

Le ~~moment~~ moment fléchissant est $M_{flex} = F_{imp} \cdot D$

Rappel flexion pure → pas de contrainte de $\left(\begin{array}{l}\text{cisaillement} \\ \text{Torsion}\end{array}\right)$

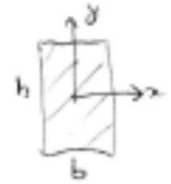


La contrainte de flexion à une distance x de la fibre neutre

est $\sigma_y = \dfrac{M_{flex}\, x}{I}$ avec I moment quadratique (m^4) de la section S

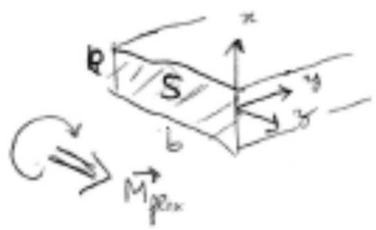
Si S : section rectangulaire

Rappel:



$I_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $I_y = \dfrac{hb^3}{12}$

Dans ce problème, on a la section



$I_z = \dfrac{b e^3}{12}$

ici finie la contrainte dans la section S pour $x > 0$

→ contrainte de traction

$$\boxed{\sigma_y(x) = \frac{F_{imp}\, D}{I_z} \cdot x} \quad \text{pour } x \in]0, e/2]$$