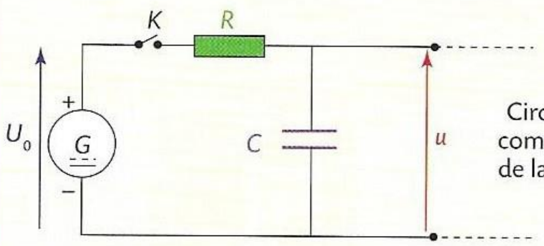
Fiche de problèmes style bac pro sur la fonction exponentielle

Problème 1 :

Construire et aménager une maison

Le circuit de commande d'une alarme de maison peut être schématisé par le circuit ci-dessous.



À la fermeture de l'interrupteur K, l'alarme est mise sous tension. Un laps de temps est nécessaire pour sortir de la maison sans déclencher l'alarme. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. La différence de potentiel u, en volt, aux bornes du condensateur, est alors donnée, en fonction du temps t, en seconde, par la relation :

$$u(t) = 9\left(1 - e^{-\frac{t}{50}}\right).$$

Première partie. Fonction et équation

On considère la fonction u définie sur l'intervalle $[0 ; 300]$ par $u(t) = 9\left(1 - e^{-\frac{t}{50}}\right)$.

1. Déterminer $u'(t)$ où u' désigne la fonction dérivée de la fonction u.

2. a) Donner le signe de $u'(t)$ sur $[0 ; 300]$. Justifier la réponse.

b) Établir le tableau de variation de la fonction u.

3. À la calculatrice, résoudre l'équation $u(t) = 7{,}5$.
Fenêtre : $X_{min} = 0$; $X_{max} = 300$; pas $= 50$;
$Y_{min} = 0$; $Y_{max} = 10$; pas $= 1$.

4. a) Montrer que l'équation $9\left(1 - e^{-\frac{t}{50}}\right) = 7{,}5$ équivaut à l'équation $e^{-\frac{t}{50}} = \frac{0{,}5}{3}$.

b) Résoudre par le calcul l'équation $e^{-\frac{t}{50}} = \frac{0{,}5}{3}$.

Deuxième partie. Application

La sirène de l'alarme se déclenche dès que la tension aux bornes du condensateur atteint 7,5 V. Donner le temps dont dispose une personne pour quitter la maison avant le déclenchement de la sirène.

Problème 2 :

Dans un montage audiovisuel, un système photoélectrique est équipé d'une photorésistance.
La résistance R (en ohm) de la photorésistance s'exprime en fonction de l'éclairement E (en lux) suivant la relation :

$$R = 1\,220\,e^{-0{,}003E}.$$

Première partie. Calculs numériques

Calculer la résistance de la photorésistance dans le cas où son éclairement est :

1. $E = 150$ lux ; arrondir à l'unité.

2. $E = 1\,000$ lux ; arrondir à l'unité.

Deuxième partie. Fonction et équation

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[150 ; 1\,000]$ par $f(x) = 1\,220\,e^{-0{,}003x}$.

1. Déterminer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.

2. Donner le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[150 ; 1\,000]$. Justifier la réponse.

3. Établir le tableau de variation de f sur l'intervalle $[150 ; 1\,000]$.

4. a) À l'écran de la calculatrice, tracer :
– la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f ;
– la droite d'équation $y = 200$.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 200$.
Fenêtre : $X_{min} = 150$; $X_{max} = 1\,000$; pas $= 50$;
$Y_{min} = 0$; $Y_{max} = 800$; pas $= 100$.

5. Résoudre par le calcul l'équation $1\,220\,e^{-0{,}003x} = 200$. Arrondir à l'unité.

6. En utilisant les résultats obtenus précédemment, indiquer pour quelle valeur de l'éclairement, en lux, la résistance de la photorésistance est égale à 200 ohms.