

## CHAPITRE 11

### ANNEXE I. FLEXION STATIQUE DE POUTRES ORTHOTROPES.

L'objet de cette annexe est de proposer une démarche permettant de prendre en compte, dans des cas d'utilisation très exceptionnels, certaines spécificités du matériau bois, en particulier, et de bon nombre de composites à renforts filamenteux, en général.

Le bois et les composites à renforts filamenteux sont fortement anisotropes. Cet aspect va être pris en compte dans les paragraphes qui suivent. La flexion statique de poutres anisotropes est reconsidérée en tenant compte des effets de cisaillement. Ce sera l'occasion de discuter la nouvelle norme relative à l'essai de flexion circulaire des éprouvettes de bois sans défaut. Des commentaires comparatifs seront faits à propos des évaluations du module d'élasticité longitudinal par l'ancienne et la nouvelle norme.

L'éprouvette considérée est géométriquement semblable à celle définie figure n°A.I.1. Elle est taillée suivant les directions de symétrie matérielle d'un solide orthotrope, notées  $(0, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$

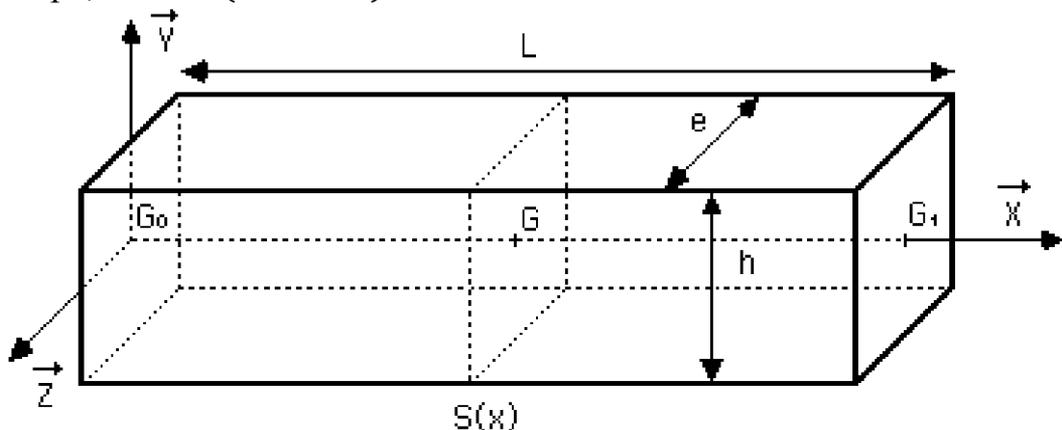


figure n°A.I. 1.: Schéma d'une éprouvette , définitions géométriques.

Soumise à une flexion simple  $M_Z(x)$  une telle éprouvette est le siège d'un effort tranchant  $T_Y(x)$ , lié au moment par l'une des équations d'équilibre statique locale suivante:

$$(A.I.1) \quad \frac{dM_Z}{dx} + T_Y = 0$$

Il est d'usage d'associer à  $M_Z$  la composante  $\sigma_{xx}$  du tenseur des contraintes locales par la relation:

$$(A.I.2) \quad \sigma_{xx} = - \frac{M_z y}{I_z} = - y E_1 \frac{d^2 V(x)}{dx^2}, \quad \text{avec } M_z = \int_s - y \sigma_{xx} ds$$

$E_1$  : module d'Young dans la direction du grand axe de l'éprouvette

$I_z$  : moment d'inertie de la section droite autour de l'axe z.

$V(x)$  : flèche de la ligne moyenne.

Dans les situations, très fréquentes, où le matériau utilisé est isotrope et lorsque la géométrie de l'élément de structures soumis à la flexion est à fort élancement (c'est à dire lorsque la distance minimale entre deux sections droites voisines, où sont appliqués des efforts extérieurs, reste grande par rapport aux dimensions transversales de la poutre, largeur  $b$  et épaisseur  $h$ ), il est classique et licite, au sens de l'ingénieur, de négliger la contribution de l'effort tranchant à la déformée globale de la structure. [§. IV.]

### A.I.1 Prise en compte du cisaillement.

L'objet de ce paragraphe est de discuter l'influence de la forte anisotropie du matériau sur cette hypothèse. Dans le cas général, l'équation d'équilibre (A.I.1) implique que l'effort tranchant est non nul, sauf dans le cas particulier de la flexion circulaire pour laquelle  $M_z = \text{cste}$ . En conséquence:

$$(A.I.3) \quad T_y = \int_s \sigma_{yx} ds = - E_1 I_z \frac{d^3 V(x)}{dx^3}$$

**Problème:** Trouver une expression exacte ou approchée de la composante  $\sigma_{yx}$  de la forme suivante:

$$(A.I.4) \quad \sigma_{yx} = \varphi(y,z) G_{66} \frac{d^3 V(x)}{dx^3}$$

où  $G_{66}$  est le module de cisaillement dans le plan  $(x,y)$

et  $\varphi(y,z)$  une fonction qui, pour vérifier (A.I.3), est telle que:

$$(A.I.5) \quad \int_s \varphi(y,z) ds = - \frac{EI_z}{G_{66}}$$

#### A.I.1.1 conditions d'admissibilité statique.

Les conditions pour qu'un champ de contraintes soit statiquement admissible, avec  $\sigma_{xx}$  défini par (A.I.2),  $\sigma_{yx}$  défini par (A.I.4) et toutes les autres composantes nulles, sont les suivantes:

$$(A.I.6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \text{ implique: } - y E_1 \frac{d^3 V(x)}{dx^3} + \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} G_{66} \frac{d^3 V(x)}{dx^3} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \text{ implique: } \varphi(y,z) G_{66} \frac{d^4 V(x)}{dx^4} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \text{ est identiquement vérifiée.} \end{aligned}$$

On en conclut que *la solution est statiquement admissible* dans les deux cas suivants:

a) en *flexion pure*,  $M_z(x)$  est une constante,  $\frac{d^3V(x)}{dx^3} = 0$ , on peut choisir  $\varphi(y,z) = 0$ . Le cisaillement est effectivement nul.

b) en *flexion simple*,  $M_z(x) = ax + b$ , alors  $\frac{d^3V(x)}{dx^3} = \text{cste}$  et  $\frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} = \frac{E_1}{G_{66}} y$  donc  $\varphi(y,z)$  est du second degré en  $y$ .

### A.I.1.2 Conditions d'admissibilité cinématique.

Le champ de déformation élastique correspondant au champ de contrainte défini ci-dessus est:

$$(A.I.7) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -y \frac{d^2V(x)}{dx^2}, & \varepsilon_{yy} &= \nu_{12} y \frac{d^2V(x)}{dx^2}, & \varepsilon_{zz} &= \nu_{13} y \frac{d^2V(x)}{dx^2} \\ \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} \varphi(y,z) \frac{d^3V(x)}{dx^3}, & \varepsilon_{zy} &= 0, & \varepsilon_{xz} &= 0 \end{aligned}$$

Pour que ce champ de déformation soit cinématiquement admissible il doit vérifier les six équations de compatibilité.

- 1)  $\varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} = 2 \varepsilon_{xy,xy}$ , implique:  $\nu_{12} y \frac{d^4V(x)}{dx^4} = \frac{\partial \varphi(y,z)}{\partial y} \frac{d^4V(x)}{dx^4}$
- 2)  $\varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} = 2 \varepsilon_{yz,yz}$ . Cette équation est automatiquement satisfaite.
- 3)  $\varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} = 2 \varepsilon_{xz,xz}$ , implique:  $\nu_{13} y \frac{d^4V(x)}{dx^4} = 0$
- 4)  $\varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zz,xy} = \varepsilon_{xz,yz} + \varepsilon_{yz,xz}$ , implique:  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \frac{d^3V(x)}{dx^3} + \nu_{13} \frac{d^3V(x)}{dx^3} = 0$
- 5)  $\varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xx,yz} = \varepsilon_{yx,zx} + \varepsilon_{zx,yz}$ , implique:  $\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{d^4V(x)}{dx^4} = 0$
- 6)  $\varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yy,zx} = \varepsilon_{zy,xy} + \varepsilon_{xy,zy}$ , implique:  $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} \frac{d^3V(x)}{dx^3} = 0$

On en conclut que la forme de solution n'est cinématiquement admissible que dans les deux cas suivants:

a) si  $\frac{d^3V(x)}{dx^3} = 0$ , ce qui ramène au cas a) du paragraphe précédent,

b) si  $V(x) = \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$

, ce qui ramène au cas a) du paragraphe précédent, où  $a, b, c, d$  sont des constantes, avec:

$$(A.I.8) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -2 \nu_{13} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial z} = 0; \quad \text{soit} \quad \varphi(y,z) = f(y) - \nu_{13} z$$

### A.I.2 Déformée du 3<sup>ème</sup> degré

Considérons dans ce paragraphe le cas d'une déformée au plus du troisième degré en x. Cette situation se rencontre fréquemment au cours des essais de flexion.

$$(A.I.9) \quad V(x) = \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d$$

Le champ de déplacement associé:

Dans ces conditions le champ de déformation (A.I.7) est intégrable et l'on obtient en tenant compte de (A.I.8):

$$(A.I.10) \quad \begin{aligned} U_x(x,y,z) &= -y \frac{dV}{dx} - \frac{y}{2} \left( v_{13} z^2 + v_{12} \frac{y^2}{3} \right) \frac{d^3V}{dx^3} + \left( \int f(y) dy \right) \frac{d^3V}{dx^3} - pz \\ U_y(x,y,z) &= V(x) + \frac{1}{2} (v_{12}y^2 - v_{13}z^2) \frac{d^2V}{dx^2} - qz \\ U_z(x,y,z) &= v_{13} y z \frac{d^2V}{dx^2} + px + qy + r \end{aligned}$$

Dans les expressions (A.I.9) et (A.I.10), les inconnues sont a,b,c,d,p,q,r, constantes arbitraires et  $\int f(y) dy$ , fonction de la seule variable d'espace y qui n'est pas déterminée.

Le champ de déformation associé:

le champ de départ (A.I.7) est particularisé avec (A.I.9) en:

$$(A.I.11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -y \frac{d^2V(x)}{dx^2}, \quad \varepsilon_{yy} = v_{12} y \frac{d^2V(x)}{dx^2}, \quad \varepsilon_{zz} = v_{13} y \frac{d^2V(x)}{dx^2} \\ \varepsilon_{yx} &= \frac{1}{2} (f(y) - v_{13} z^2) \frac{d^3V(x)}{dx^3}, \quad \varepsilon_{zy} = 0, \quad \varepsilon_{xz} = 0 \end{aligned}$$

Par rapport à (A.I.7) on note que seule la forme de  $\varphi(y,z)$  a été modifiée.

Les composantes non nulles du champ de contrainte sont alors:

$$(A.I.12) \quad \begin{aligned} \sigma_{xx} &= -y (C_{11} - v_{12}C_{22} - v_{13}C_{33}) \frac{d^2V(x)}{dx^2} = -y E_1 \frac{d^2V(x)}{dx^2} \\ \sigma_{yx} &= G_{66} (f(y) - v_{13} z^2) \frac{d^3V(x)}{dx^3} = G_{66} \varphi(y,z) \frac{d^3V(x)}{dx^3} \end{aligned}$$

Plaçons-nous dans le **cas particulier d'une section droite rectangulaire** de hauteur h, et d'épaisseur e, libre de tout effort au contour.

Cisaillement nul en :  $y = \pm h/2$

Dans l'expression de la composante  $\sigma_{yx}$ , (A.I.12), la fonction f(y) reste indéterminée.

Cette composante de cisaillement doit être nulle en  $y = \pm \frac{h}{2}$

$$(A.I.13) \quad \sigma_{yx} \left( \pm \frac{h}{2} \right) = 0$$

Cette condition ne peut être satisfaite en tout  $z \in (-e/2, +e/2)$ . On va accepter de prendre cette valeur nulle, en moyenne dans cet intervalle. Ceci impose:

$$\int_{-e/2}^{+e/2} \varphi\left(\pm \frac{h}{2}, z\right) dz = f\left(\pm \frac{h}{2}\right) e - \nu_{13} \frac{e^3}{12} = 0$$

(A.I.14) soit:  $f\left(\pm \frac{h}{2}\right) = \nu_{13} \frac{I_y}{S}$  avec  $I_y = \frac{he^3}{12}$  et  $S = eh$

**Choix d'une distribution parabolique du cisaillement**

La forme de  $\varphi(y,z)$ , est choisie pour satisfaire à la condition (A.I.3) de départ.

$$(A.I.3) \quad T_y = \int_s \sigma_{yx} ds = - E_1 I_z \frac{d^3V(x)}{dx^3}$$

Compte tenu de (A.I.14), cette condition est satisfaite par la forme parabolique suivante:

$$(A.I.15) \quad \varphi(y,z) = - \frac{E_1}{2G_{66}} \left( \frac{3I_z}{S} - y^2 \right) + \nu_{13} \left( \frac{I_y}{S} - z^2 \right)$$

L'état mécanique est déterminé au mieux, puisqu'il satisfait de plus à la condition d'admissibilité statique du §.A.I.1.1.

**Le champ de déplacement** prend alors la forme suivante:

$$U_x(x,y,z) = - y \left( \frac{ax^2}{2} + bx \right) - \frac{ay}{2} \left( \frac{E_1}{G_{66}} \left( \frac{3I_z}{S} - \frac{y^2}{3} \right) + \nu_{12} \frac{y^2}{3} - \nu_{13} \left( \frac{2I_y}{S} - z^2 \right) \right) - cy - pz + t$$

$$(A.I.16) \quad U_y(x,y,z) = \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + \frac{ax+b}{2} (\nu_{12}y^2 - \nu_{13}z^2) + cx - qz + d$$

$$U_z(x,y,z) = \nu_{13} (ax+b) y z + px + qy + r$$

Les huit constantes à identifier dans un problème particulier sont: a,b liées au chargement imposé et à la longueur du tronçon de poutre considéré; c,d,p,q,r,t qui correspondent aux six degrés de liberté du déplacement de corps solide.

**Le champ de déformation** associé:

$$(A.I.17) \quad \varepsilon_{xx} = - y (ax+b) , \quad \varepsilon_{yy} = \nu_{12}y (ax+b) , \quad \varepsilon_{zz} = \nu_{13}y(ax+b)$$

$$\varepsilon_{yx} = - a \left( \frac{E_1}{2G_{66}} \left( \frac{3I_z}{S} - y^2 \right) + \nu_{13} \left( \frac{I_y}{S} - z^2 \right) \right) , \quad \varepsilon_{zy} = 0 , \quad \varepsilon_{xz} = 0$$

**Le champ de contrainte** associé:

$$(A.I.18) \quad \sigma_{xx} = - E_1y (ax+b) , \quad \sigma_{yy} = 0 , \quad \sigma_{zz} = 0$$

$$\sigma_{yx} = - a G_{66} \left( \frac{E_1}{2G_{66}} \left( \frac{3I_z}{S} - y^2 \right) + \nu_{13} \left( \frac{I_y}{S} - z^2 \right) \right) , \quad \sigma_{zy} = 0 , \quad \sigma_{xz} = 0$$

### A.I.3 Application à la flexion quatre points

La modélisation ci-dessus va être appliquée au cas concret d'essai normalisé de flexion quatre points, illustrée par le schéma de la figure n°A.I.2

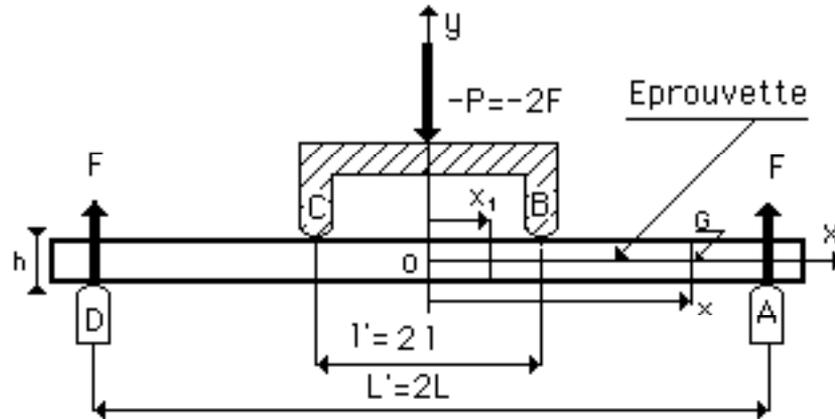


figure n°A.I.2: Essai de flexion quatre points suivant la norme NF B 51-0016

#### A.I.3.1 Etat mécanique correspondant.

Les conditions suivantes sont exploitées:

1) le plan (x,y) est plan de symétrie pour le champ de déplacement. Ceci entraîne  $p = q = r = 0$ .

Le champ de déplacement est identifié en considérant les deux tronçons de poutre, avec leurs conditions frontières, et les conditions de raccordement.

Dans l'intervalle  $x \in (0, l)$ , les conditions suivantes sont exploitées:

2)  $M_z = F(L-l)$ , moment fléchissant constant donne:  $a = 0$ ,  $b = \frac{F(L-l)}{E_1 I_z}$

3)  $\frac{dU_y^{(1)}(0)}{dx} = 0$ , maximum de flèche au centre:  $c = 0$

4)  $U_x^{(1)}(0, y, z) = 0$ , symétrie du plan (y,z) implique:  $t = 0$

La flexion circulaire est définie dans l'intervalle  $x \in (0, l)$  à une constante près, "d" correspondant à une translation suivant y.

$$U_x^{(1)}(x, y, z) = -\frac{F(L-l)}{E_1 I_z} xy$$

$$U_y^{(1)}(x, y, z) = \frac{F(L-l)}{2E_1 I_z} (x^2 + v_{12}y^2 - v_{13}z^2) + d$$

$$U_z^{(1)}(x, y, z) = \frac{v_{13}F(L-l)}{E_1 I_z} yz$$

Dans l'intervalle  $x \in (l, L)$ .

Sur ce deuxième tronçon de poutre, les constantes sont marquées du signe (\*)

4)  $M_z = F(L-x)$ , moment fléchissant qui évolue linéairement, d'où :

$$a^* = -\frac{F}{E_1 I_z} \text{ et } b^* = \frac{FL}{E_1 I_z}$$

5)  $U_y^{(2)}(L, -h/2, \pm e/2) = 0$  , traduit la présence d'un appui simple, en  $x=L$ ,  $y=-h/2$  et  $z = \pm e/2$ . Ces points d'appui sont choisis pour tenir compte de la courbure anticlastique. Ceci implique:  $Lc^* + d^* = -\frac{FL^3}{3E_1I_z}$

Pour le raccordement des deux tronçons, en  $x=l$ , il faut assurer la continuité de flèche

6)  $U_y^{(1)}(l,0,0) = U_y^{(2)}(l,0,0)$  soit:  $lc^* + d^* = d - \frac{Fl^3}{3E_1I_z}$

*Remarque* : Il est classique, à ce stade, de prendre comme seconde condition de raccordement, la condition de continuité de la dérivée première de la flèche  $\frac{dU_y(l,0,0)}{dx}$  .

Une telle démarche a pour conséquence de déterminer directement  $c^* = -\frac{Fl^2}{2E_1I_z}$  , mais alors la continuité des déplacements  $U_x(l,y,z)$  à l'interface n'est pas assuré. Car rappelons le, dans la présente modélisation, le cisaillement étant pris en compte, une section droite initialement plane ne reste pas plane.

On préférera les trois conditions de raccordement suivantes:

7)  $U_x^{(1)}(l,0,0) = U_x^{(2)}(l,0,0)$  qui implique  $t^* = 0$ .

8)  $U_x^{(1)}(l, +h/2, 0) = U_x^{(2)}(l, +h/2, 0)$  qui entraîne:  $c^* = \frac{F}{E_1I_z} \left( -\frac{l^2}{2} + \frac{\nu_{12}I_z}{2S} - \frac{\nu_{13}I_y}{S} + \frac{E_1I_z}{G_{66}S} \right)$

Cette condition assure la condition de continuité en  $y = -h/2$  soit:

9)  $U_x^{(1)}(l, -h/2, 0) = U_x^{(2)}(l, -h/2, 0)$

Dans ces conditions les champs de déplacement prennent, pour chacun des tronçons, les formes indiquées dans le tableau n°A.I.1.

Tableau n° A.I.1: Déplacements en flexion quatre points.

<p>Dans l'intervalle <math>x \in (0, l)</math>,</p> $U_x^{(1)}(x,y,z) = -\frac{F(L-l)}{E_1I_z} xy$ <p>(A.I.19) <math>U_y^{(1)}(x,y,z) = -\frac{F(L-l)}{2E_1I_z} \left( L^2 - x^2 - \frac{(L-l)^2}{3} + \nu_{12} \left( \frac{I_z}{S} - y^2 \right) - \nu_{13} \left( \frac{2I_y}{S} - z^2 \right) + \frac{2E_1I_z}{G_{66}S} \right)</math></p> $U_z^{(1)}(x,y,z) = \frac{\nu_{13}F(L-l)}{E_1I_z} yz$
<p>Dans l'intervalle <math>x \in (l, L)</math>,</p> $U_x^{(2)}(x,y,z) = -\frac{Fy}{2E_1I_z} \left( L^2 - l^2 - (L-x)^2 + \left( \nu_{12} \frac{E_1}{G_{66}} \right) \left( \frac{I_z}{S} - \frac{y^2}{3} \right) - \nu_{13} z^2 \right)$ <p>(A.I.20) <math>U_y^{(2)}(x,y,z) = -\frac{F(L-x)}{2E_1I_z} \left( L^2 - l^2 - \frac{(L-x)^2}{3} + \nu_{12} \left( \frac{I_z}{S} - y^2 \right) - \nu_{13} \left( \frac{2I_y}{S} - z^2 \right) + \frac{2E_1I_z}{G_{66}S} \right)</math></p> $U_z^{(2)}(x,y,z) = \frac{\nu_{13}F(L-x)}{E_1I_z} yz$

### A.I.3.2 Application à l'essai de flexion normalisé.

L'essai de flexion statique a fait l'objet d'une nouvelle norme, NF B 51-016, de décembre 1987, " Détermination du module d'élasticité en flexion statique de petites éprouvettes sans défaut". Les résultats du paragraphe précédant sont exploités dans le cadre de cette nouvelle norme. Son originalité fondamentale est de préconiser un essai de flexion quatre points, par opposition à la procédure normalisée antérieure basée sur un essai de flexion trois points (NF B 51-008 de février 1942).

Les éprouvettes sans défaut, de droit fil, sont aux côtes suivantes: longueur 360 mm, épaisseur  $h=20$  mm, largeur  $e=20$  mm. La distance entre appuis extérieurs, (c.f. figure n° A.I.1.)  $L'=2L=320$  mm.

La distance entre appuis intérieurs,  $l'=2l=160$  mm. La courbure de l'éprouvette dans la partie médiane de l'éprouvette

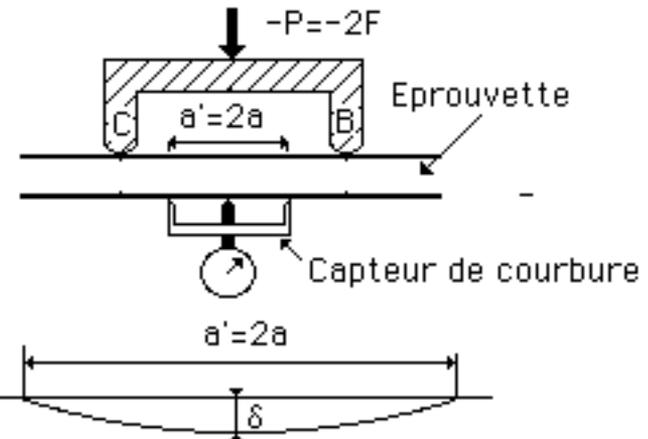


figure n° A.I.3: mesure de la courbure.

est estimée, comme indiquée sur la figure n° A.I.3., par mesure de la flèche  $\delta$  prise par un arc de corde  $= a' = 2a$ . L'effort global appliqué est  $P = 2F$  suivant la direction T.

#### Estimation du module d'élasticité longitudinal.

La flèche  $\delta$  est donnée par:

$$(A.I.21) \quad \delta = U^{(1)}\left(\frac{a}{2}, -\frac{h}{2}, +\frac{e}{2}\right) - U_y^{(1)}\left(0, -\frac{h}{2}, +\frac{e}{2}\right) = \frac{F(L-l)}{E_1 I_z} \frac{a^2}{8}$$

En conséquence le module d'élasticité longitudinal  $E_L$  s'exprime:

$$(A.I.22) \quad E_L = \frac{(L-l)a^2}{2I_z} \frac{\Delta F}{\Delta \delta} \quad \text{soit encore} \quad E_L = \frac{3(L-l')a'^2}{8eh^3} \frac{\Delta P}{\Delta \delta}$$

Cette dernière expression est parfaitement conforme à la proposition de la norme. L'effet du cisaillement, évoqué plus haut, n'intervient pas dans la partie de l'éprouvette soumise à la flexion circulaire. La norme a été modifiée pour cela.

#### Estimation du module de cisaillement $G_{LT}$

Le même essai permet en principe d'estimer le module de cisaillement.

Il est possible de mesurer, en cours d'essai, le déplacement entre traverses, lequel est influencé par la contribution du cisaillement. Il est donné par

$$u = -U_y^{(1)}\left(l, \frac{h}{2}, \frac{e}{2}\right), \quad \text{soit selon (A.I.19):}$$

$$(A.I.23) \quad u = -\frac{F(L-l)}{2E_L I_z} \left( L^2 - l^2 - \frac{(L-l)^2}{3} + \frac{h^2}{6} \left( \frac{E_L}{G_{LT}} - \nu_{12} \right) + \frac{\nu_{13} e^2}{12} \right)$$

Le principe consiste à extraire  $G_{LT}$  du rapport des accroissements  $\Delta u$  à  $\Delta \delta$ , donnés respectivement par (A.I.21) et (A.I.23) qui résultent d'un accroissement  $\Delta P$  de l'effort appliqué.

$$(A.I.24) \quad G_{LT} = \left( \frac{\frac{3}{8} \left( 1 - \frac{l'}{L'} \right) \frac{L'a'^2}{h^3}}{\frac{3a'^2}{8h^2} \frac{\Delta u}{\Delta \delta} - \left( \frac{L'^2}{h^2} - \frac{2l'^2}{h^2} + \frac{L'l'}{h^2} \right) + \nu_{12} - \frac{\nu_{13} e^2}{2 h^2}} \right) \frac{\Delta P}{e \Delta \delta}$$

Il est utile de procéder à une application numérique en utilisant les côtes standard des éprouvettes et des distances entre appuis, telles que précisées dans la norme. Soit:

$L' = 320 \text{ mm}$ ,  $l' = 160 \text{ mm}$ ,  $h = 20 \text{ mm}$ ,  $e = 20 \text{ mm}$ ,  $a' = 120 \text{ mm}$ .

$$(A.I.25) \quad G_{LT} = \frac{0.4}{\frac{\Delta u}{\Delta \delta} - \frac{512}{27}} \frac{\Delta P}{\Delta \delta}$$

La relation (A.I.25) est donnée en négligeant les termes relatifs aux effets Poisson. Cette simplification est parfaitement licite du point de vue numérique. Dans le principe, on constate que la double mesure, de la flèche  $\Delta \delta$  et du déplacement des appuis  $\Delta u$  permet d'évaluer le module d'Young longitudinal  $E_L$  et d'estimer le module de cisaillement  $G_{LT}$ .

Du point de vue expérimental, on prendra garde au fait que dans le déplacement des traverses sont inclus les effets de poinçonnement des appuis, en effet les appuis exercent leurs efforts suivant la direction tangentielle qui se trouve être la plus souple. En conséquence, sauf précautions particulières,  $u$  sera surestimé et  $G_{LT}$  approché par défaut. Les évaluations de  $G_{LT}$  sont dans ce cas fonctions décroissantes de la charge  $P$  appliquée.

### A.I.3.3 Comparaison avec la flexion trois points.

Dans un essai en flexion trois points, schématisé sur la figure N° A.I.4, la flèche  $u$  au niveau du point d'appui central se déduit de (A.I.20) en faisant  $l=x=0$ . Soit

$$U_y^{(2)}(0, \frac{h}{2}, 0) = -\frac{FL}{2E_L I_z} \left( \frac{2L^2}{3} - \frac{\nu_{12} h^2}{6} - \frac{\nu_{13} e^2}{6} + \frac{E_L h^2}{6G_{66}} \right)$$

L'expression du module d'élasticité longitudinal  $E_L$ , prenant en compte l'effet de cisaillement, se met sous la forme suivante :

$$(A.I.26) \quad E_L = \frac{L^3}{4eh^3} \left( 1 + \left( \frac{h}{L'} \right)^2 \left( \frac{E_L}{G_{LT}} - \nu_{12} - \nu_{13} \left( \frac{e}{h} \right)^2 \right) \right) \frac{\Delta F}{\Delta u}$$

Cette dernière expression (A.I.26) permet de chiffrer la sous estimation sur  $E_L$  à laquelle conduisait la pratique de l'essai de flexion trois points lorsque l'effet de cisaillement n'était pas pris en considération.

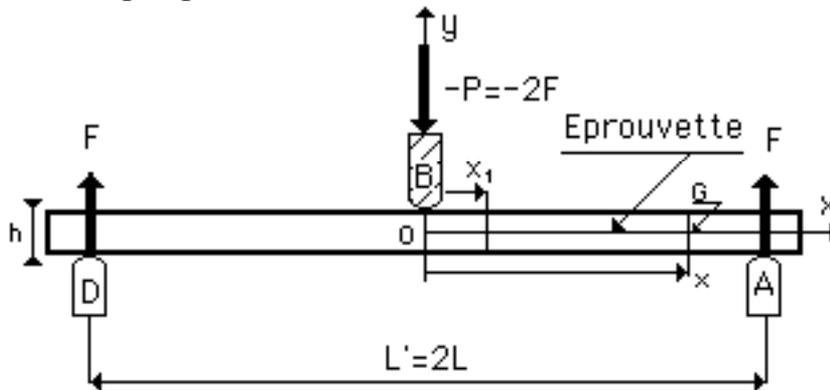


Figure N° A.I.3: Essai de flexion trois points

En prenant les côtes d'éprouvettes qui était en usage dans les anciennes procédures:  $L' = 280$  mm. et  $h = 20$  mm, en adoptant :

pour le feuillu standard,  $E_L = 14400$  MPa,  $G_{LT} = 971$  MPa

pour le résineux standard,  $E_L = 13100$  MPa,  $G_{LT} = 745$  MPa

$$(A.I.27) \quad \frac{\Delta E_L}{E_L} \approx \frac{\left(\frac{h}{L'}\right)^2 \frac{E_L}{G_{LT}}}{1 + \left(\frac{h}{L'}\right)^2 \frac{E_L}{G_{LT}}};$$

$$(A.I.28) \quad \frac{\Delta E_L}{E_L} = 0,07 \text{ pour le feuillu,} \quad \frac{\Delta E_L}{E_L} = 0,08 \text{ pour le résineux.}$$

A cette sous-estimation systématique du module  $E_L$ , due au fait de négliger, dans le cas du bois, les effets de cisaillement, il convient d'adjoindre la sous-estimation complémentaire, évoquée au précédent paragraphe, liée à l'effet de poinçonnement des appuis. Dans l'essai de flexion trois points, l'effort transmis par l'appui central est double, à chargement global  $P$  fixé (c.f. figure N° A.I.4).

On peut raisonnablement penser que la procédure antérieure d'évaluation du module d'élasticité, à partir d'un essai en flexion trois points, conduisait à une sous-estimation systématique de cette caractéristique voisine de 15%.

#### A.I.4. Conclusion.

L'influence de l'anisotropie du matériau bois a été analysée à travers un mode particulier de sollicitation statique, la flexion.

Il a été montré que la très forte anisotropie du matériau bois fait que les modes de sollicitation en flexion sont sensibles aux effets de cisaillement. Pour réduire à moins de 1% la contribution de l'effort tranchant, par rapport au moment fléchissant, il faut que la distance entre deux plans de chargement  $L = (L'/2)$  soit de l'ordre de 20 fois l'épaisseur  $h$  de la pièce testée.

## **CHAPITRE 11**

### **Annexe I. FLEXION STATIQUE DE POUTRES ORTHOTROPES.**

#### **A.I.1 Prise en compte du cisaillement.**

##### **A.I.1.1 Conditions d'admissibilité statique.**

##### **A.I.1.2 Conditions d'admissibilité cinématique.**

#### **A.I.2 Déformée du 3<sup>ème</sup> degré**

#### **A.I.3 Application à la flexion quatre points**

##### **A.I.3.1 Etat mécanique correspondant.**

##### **A.I.3.2 Application à l'essai de flexion normalisé.**

##### **A.I.3.3 Comparaison avec la flexion trois points.**

#### **A.I.4. Conclusion.**