Chapitre 3 : Systèmes vibratoires à deux degrés de liberté.

Un système vibratoire à deux degrés de liberté est par définition un système dont l'état mécanique peut être entièrement défini, à tout instant par deux nombres.

3.1.- Equations du mouvement d'un système à deux degrés de liberté amorties

Toujours pour simplifier, nous allons travailler sur un exemple idéalisé. (figure n°3.1).

Pour les masselottes M_1 et M_2 prenons comme origine des espaces les positions d'équilibre au statique. Soient x_1 et x_2 les écarts de M_1 et M_2 à leur position d'équilibre.

Le système d'équation régissant le mouvement unidirectionnel des deux masselottes est alors le suivant:

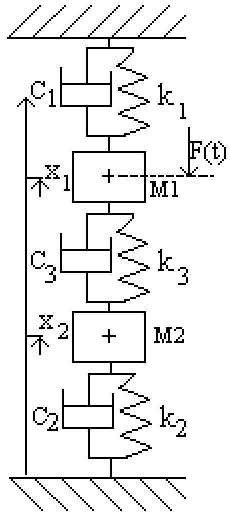

Figure N° 3-1: système à deux degrés de liberté

(3.1)
$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+(C_1+C_3)\frac{dx_1}{dt}+(k_1+k_3)x_1-C_3\frac{dx_2}{dt}-k_3x_2=F_0\cos(\omega t)$$
$$M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+(C_2+C_3)\frac{dx_2}{dt}+(k_2+k_3)x_2-C_3\frac{dx_1}{dt}-k_3x_1=0$$

3.2.- Equations du mouvement : vibrations libres.

Sans amortissement, (C_1,C_2 et C_3 = 0) et en l'absence de force d'excitation extérieure (F_0 = 0), le système 3-1 se met sous la forme suivante:

(3-2)
$$M_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+(k_1+k_3)x_1-k_3x_2=0$$
$$M_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+(k_2+k_3)x_2-k_3x_1=0$$

Par analogie à ce qui a été fait lors de l'étude des systèmes à un degré de liberté, on transforme les deux équations du système pour le mettre sous une forme canonique, en introduisant les paramètres caractéristiques de l'oscillateur double.

(3.3) $\omega_a = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_3}{M_1}}$

ω_a : représente la pulsation propre du système lorsque M_2 est maintenue en position fixe;

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k_2 + k_3}{M_2}}$$

ω_b : représente la pulsation propre du système lorsque M_1 est maintenue en position fixe;

$$\omega_{ab} = \sqrt{\frac{k_3}{\sqrt{M_1 M_2}}}$$

ω_{ab} : représente une pulsation de couplage.

.

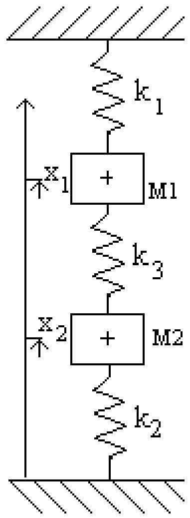

Figure n°3.1 : Oscillateur à deux degrés de liberté non amorti

Dans ces conditions, le système (3.2) s'écrit :

(3.4)
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_a^2 x_1 - \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2 x_2 = 0$$
$$-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2 x_1 + \frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_b^2 x_2 = 0$$

Les solutions seront obtenues sous la forme de combinaisons linéaires de deux solutions particulières linéairement indépendantes.

Recherche de solutions particulières

On recherche des solutions particulières sous les formes suivantes:

(3.5) $x_1 = \overline{x}_{01} e^{j\omega t}$ et $x_2 = \overline{x}_{02} e^{j\omega t}$

où $\overline{x}_{01}$ et $\overline{x}_{02}$ sont les amplitudes complexes à déterminer et ω la pulsation recherchée.

En reportant ces formes (3.5) dans le système (3.4), il vient:

(3.6)
$$(\omega_a^2 - \omega^2)\overline{x}_{01} - \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2 \overline{x}_{02} = 0$$
$$-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2 \overline{x}_{01} + (\omega_b^2 - \omega^2)\overline{x}_{02} = 0$$

<u>Détermination des pulsations propres.</u>
Les pulsations ω solutions possibles doivent annuler le déterminant de ce système:

(3.7) $$\frac{\overline{x}_{02}}{\overline{x}_{01}} = \frac{\omega_a^2 - \omega^2}{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2} = \frac{\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2}{\omega_b^2 - \omega^2}$$

soit l'équation bicarrée $\omega^4 - (\omega_a^2 + \omega_b^2)\omega^2 + \omega_a^2\omega_b^2 - \omega_{ab}^4 = 0$
Cette équation admet toujours des racines réelles positives en ω^2:

(3.8) $$\omega_1^2 \text{et} \omega_2^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2}\right)^2 + \omega_{ab}^4}$$

L'expression (3.8) de ω_1^2 et de ω_2^2 suggère une construction graphique, le cercle de Mohr (figure n°3.2.).
sur un axe, à partir d'une origine O, on porte les points A et B tels que $\overline{OA} = \omega_a^2$ et $\overline{OB} = \omega_b^2$
on porte le point C sur la perpendiculaire en B à OB tel que $\overline{BC} = \omega_{ab}^2$
alors, le cercle centré au milieu de AB, passant par C, coupe l'axe OA en deux points D et E tels que :
$\overline{OD} = \omega_1^2$ et $\overline{OE} = \omega_2^2$

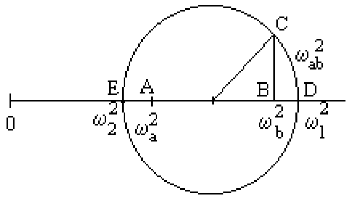

Figure n°3.2: Construction graphique des deux pulsations propres

<u>Modes de vibration</u>
A chaque pulsation propre est associée une relation liant les amplitudes des vibrations associées (3.7) .
Le mode (1), associé à la pulsation ω_1 ,

$$\omega_1^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2}\right)^2 + \omega_{ab}^4}$$

correspond aux amplitudes de $\overline{x}_{11}$ et $\overline{x}_{12}$, telles que :

(3.9) $$\frac{\overline{x}_{12}}{\overline{x}_{11}} = \alpha(\omega_1) = \frac{\omega_a^2 - \omega_1^2}{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2} = \frac{\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2}{\omega_b^2 - \omega_1^2}$$

Le mode (2), associé à la pulsation ω_2 ,

$$\omega_2^2 = \frac{\omega_a^2 + \omega_b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_a^2 - \omega_b^2}{2}\right)^2 + \omega_{ab}^4}$$

correspond aux amplitudes de $\overline{x}_{21}$ et $\overline{x}_{22}$, telles que :

(3.10) $$\frac{\overline{x}_{22}}{\overline{x}_{21}} = \alpha(\omega_2) = \frac{\omega_a^2 - \omega_{21}^{\ 2}}{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2} = \frac{\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2}{\omega_b^2 - \omega_2^{\ 2}}$$

Les oscillations libres de ce système à deux degré de liberté se développent selon les formes suivantes :

(3.11) $$\begin{aligned} x_1(t) &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ x_2(t) &= A\alpha(\omega_1)\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\alpha(\omega_2)\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

A, B, φ_1 et φ_2 sont quatre constante qui sont à identifier en prenant en compte les conditions initiales du cas traité.

3.3. Mise en évidence de deux modes de vibration

Pour illustrer la notion de mode de vibration, envisageons le système particulier tel que $k_1 = k_2 = k$ et $M_1 = M_2 = M$

Il en résulte que $\omega_a = \omega_b = \sqrt{\frac{k + k_3}{M}}$ et $\omega_{ab} = \sqrt{\frac{k_3}{M}}$

En reportant ces expressions dans (3.8) il vient pour les pulsations propres :

(3.12) $$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad \text{et} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_3}{M}}$$

Premier mode associé à la pulsation ω_1

En remplaçant dans (3.9) ω_1 par sa valeur prise en (3.12), on obtient :

(3.13) $$\left[\frac{\overline{x}_{12}}{\overline{x}_{11}}\right]_{\omega=\omega_1} = +1$$

En conséquence dans ce premier mode de vibration, les deux masselottes oscillent en phase à la pulsation ω_1.

Tout ce passe ici comme si les deux masselottes oscillaient indépendamment l'une de l'autre.

Le ressort de couplage k_3 n'est pas sollicité.

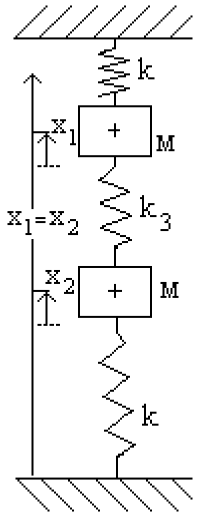

Figure n°3.3 Mode 1, vibrations de même amplitude, en phase.

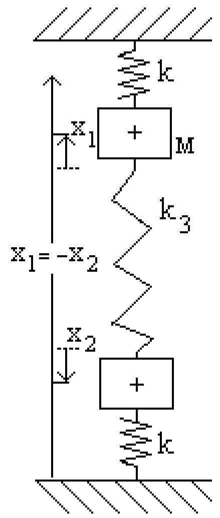

Figure n°3.4 Mode 2, vibrations de même amplitude, en phase.

Deuxième mode associé à la pulsation ω_2

En remplaçant dans (3.10) ω_2 par sa valeur prise en (3.12), on obtient :

(3.14) $$\left[\frac{\overline{X}_{22}}{\overline{X}_{21}}\right]_{\omega=\omega_2} = -1$$

En conséquence, dans ce deuxième mode de vibration, les deux masselottes oscillent en opposition de phase à la pulsation ω_2. Tout ce passe ici comme si les deux masselottes oscillaient en miroir par rapport à un plan passant par le milieu du ressort de couplage k_3.

La solution générale du système est une combinaison linéaire des deux modes

$$X_1(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi_1\right) + B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2k_3}{M}}t + \varphi_2\right)$$

$$X_2(t) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t + \varphi_1\right) - B_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2k_3}{M}}t + \varphi_2\right)$$

3.4. Vibrations forcées d'un système à deux degrés de liberté non amorti

Le mouvement du système en vibrations forcées est régi par le système d'équations (3.1), qui peut s'écrire comme ci-dessous.

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{(k_1+k_3)}{M_1}x_1 - \frac{k_3}{M_1}x_2 = \frac{F_0}{M_1}e^{j\omega t}$$

(3.15)

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{(k_2+k_3)}{M_2}x_2 - \frac{k_3}{M_2}x_1 = 0$$

Il convient de mettre ce système sous forme canonique en utilisant, d'une part, les caractéristiques des oscillateur et du couplage élastique introduits (3.3)
Le système s'écrit :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_a^2 x_1 - \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2 x_2 = \frac{F_0}{M_1}e^{j\omega t}$$

(3.16)

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \omega_b^2 x_2 \frac{dx_1}{dt} - \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2 x_1 = 0$$

On recherche la solution particulière sous la forme de fonctions harmoniques de même pulsation ω que celle de la force imposée.

(3.17) $\quad x_1(t) = \overline{x}_{01}e^{j\omega t} \quad$ et $\quad x_2(t) = \overline{x}_{02}e^{j\omega t}$

Les amplitudes sont données en injectant (3.15) dans (3.14). Il en résulte :

$$\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_a^2}\right]\overline{x}_{01} - \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_a^2}\right]\overline{x}_{02} = \frac{F_0}{k_1+k_3}$$

(3.18)

$$-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_b^2}\right]\overline{x}_{01} + \left[1-\frac{\omega^2}{\omega_b^2}\right]\overline{x}_{02} = 0$$

d'où l'on déduit:

(3.19)
$$\bar{x}_{01} = \frac{F_0}{k_1 + k_3} \frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right)^2\right]^2}$$

(3.20)
$$\bar{x}_{02} = \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_b^2}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2}\right]} \bar{x}_{01}$$

(3.21)
$$\bar{x}_{02} = \frac{F_0}{k_1 + k_2} \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_b^2}\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + \right] - \left[\left(\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right)^2\right]^2}$$

3.5. Vibrations forcées d'un système à deux degrés de liberté amorties

Le mouvement du système en vibrations forcées est régi par le système d'équations (3.1), qui peut s'écrire comme ci-dessous.

(3.22)
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{(C_1 + C_3)}{M_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{(k_1 + k_3)}{M_1}x_1 - \frac{C_3}{M_1}\frac{dx_2}{dt} - \frac{k_3}{M_1}x_2 = \frac{F_0}{M_1}e^{j\omega t}$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{(C_2 + C_3)}{M_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{(k_2 + k_3)}{M_2}x_2 - \frac{C_3}{M_2}\frac{dx_1}{dt} - \frac{k_3}{M_2}x_1 = 0$$

Il convient de mettre ce système sous forme canonique en utilisant, d'une part, les caractéristiques des oscillateur et du couplage élastique introduits (3.3) et en y adjoignant, d'autre part, les caractéristiques réduites visqueuses :

(3.23) $$2\xi_a\omega_a = \sqrt{\frac{C_1 + C_3}{M_1}}; \qquad 2\xi_b\omega_b = \sqrt{\frac{C_2 + C_3}{M_2}}; \qquad 2\xi_{ab}\omega_{ab} = \frac{C_3}{\sqrt{M_1M_2}}$$

Le système s'écrit :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2\xi_a\omega_a\frac{dx_1}{dt} + \omega_a^2x_1 - 2\sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\xi_{ab}\omega_{ab}\frac{dx_2}{dt} - \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\omega_{ab}^2x_2 = \frac{F_0}{M_1}e^{j\omega t}$$

(3.24)

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2\xi_b\omega_b \frac{dx_2}{dt} + \omega_b^2 x_2 - 2\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\xi_{ab}\omega_{ab}\frac{dx_1}{dt} - \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\omega_{ab}^2 x_1 = 0$$

On recherche la solution particulière sous la forme de fonctions harmoniques de même pulsation ω que celle de la force imposée.

(3.25) $\qquad x_1(t) = \overline{x}_{01} e^{j\omega t} \qquad$ et $\qquad x_2(t) = \overline{x}_{02} e^{j\omega t}$

Les amplitudes sont données en injectant (3.25) dans (3.24). Il en résulte :

(3.26)
$$\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2} + 2j\xi_a \frac{\omega}{\omega_a}\right]\overline{x}_{01} - \sqrt{\frac{M_2}{M_1}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_a^2} + 2j\xi_{ab}\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right]\overline{x}_{02} = \frac{F_0}{k_1 + k_3}$$
$$-\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_b^2} + 2j\xi_{ab}\frac{\omega_{ab}}{\omega_b}\right]\overline{x}_{01} + \left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2} + 2j\xi_b\frac{\omega}{\omega_b}\right]\overline{x}_{02} = 0$$

d'où l'on déduit:

(3.27)
$$\overline{x}_{01} = \frac{F_0}{k_1 + k_3}\,\frac{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 2j\xi_b\frac{\omega}{\omega_b}\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 + 2j\xi_a\frac{\omega}{\omega_a}\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 2j\xi_b\frac{\omega}{\omega_b}\right] - \left[\left(\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right)^2 + 2j\xi_{ab}\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right]^2}$$

(3.28)
$$\overline{x}_{02} = \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_b^2} + 2j\xi_{ab}\frac{\omega_{ab}}{\omega_b}\right]}{\left[1 - \frac{\omega^2}{\omega_b^2} + 2j\xi_b\frac{\omega}{\omega_b}\right]}\overline{x}_{01}$$

(3.29)
$$\overline{x}_{02} = \frac{F_0}{k_1 + k_3}\,\frac{\sqrt{\frac{M_1}{M_2}}\left[\frac{\omega_{ab}^2}{\omega_b^2} + 2j\xi_{ab}\frac{\omega_{ab}}{\omega_b}\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 + 2j\xi_a\frac{\omega}{\omega_a}\right]\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2 + 2j\xi_b\frac{\omega}{\omega_b}\right] - \left[\left(\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right)^2 + 2j\xi_{ab}\frac{\omega_{ab}}{\omega_a}\right]^2}$$

Une discussion générale est hors de propos ici. On se limitera à l'étude de l'absorbeur dynamique de vibrations.

3.5. Absorbeur dynamique de vibrations