Chapitre 2 : Systèmes vibratoires à un degré de liberté.

Un système vibratoire à un degré de liberté est par définition un système dont la position géométrique est entièrement définie à tout instant par la donnée d'un nombre, mesure du paramètre de position.

Pour des raisons de simplification d'exposé et de notation, nous allons travailler sur un exemple idéalisé. Les conclusions pourront être facilement généralisées.

Soit le système schématisé sur la figure n°2.1. La masselotte M ne peut se déplacer que le long d'une glissière orientée suivant l'axe $o\vec{x}$.

Dans son mouvement, la masselotte est soumise à un système de forces:

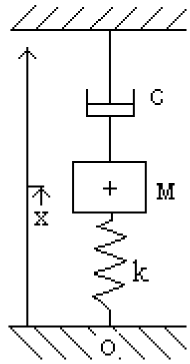

Figure N° 2.1: Oscillateur amorti à 1 degré de liberté

Poids : M est soumise à l'action du champ de pesanteur caractérisé par une accélération gravitationnelle $\vec{g}$, il en résulte une force $M\vec{g}$

Force de rappel élastique : Le ressort, de rigidité k et de longueur l_o au repos, exerce une force de rappel supposée élastique, proportionnelle à l'allongement du ressort $(x - l_0)$, dirigée suivant $o\vec{x}$ et d'intensité $-k(x - l_0)$.

Force de frottement visqueux : L'amortisseur C schématise la force visqueuse qui s'oppose au mouvement de M, dirigée suivant $\vec{x}$ et d'intensité $- C\dfrac{dx}{dt}$

Force d'excitation : c'est une force extérieure $\vec{F}$ agissant suivant $\vec{x}$, imposée par un agent extérieur.

L'équation du mouvement de la masselotte M suivant $\vec{x}$ est obtenue en écrivant que la quantité d'accélération est égale à la somme des forces agissant sur la masselotte.

(1) $$M\frac{d^2x}{dt^2} = - k(x - l_0) - C\frac{dx}{dt} - Mg + F$$

Cette équation générale sera utilisée tout au long de ce chapitre traitant des vibrations d'un système à un degré de liberté.

2.1.- Vibrations libres d'un système à un degré de liberté non amorti

Considérons d'abord le cas particulier pour lequel l'amortissement est nul (C=0) ou négligé. L'équation (1) se réduit à :

(2) $$M\frac{d^2x}{dt^2} = - k (x - l_0) - Mg + F$$

Position d'équilibre statique

En l'absence de force extérieure F=0, la masselotte est immobile ($\frac{dx}{dt} = 0$), dans une position d'équilibre repérée par l'abscisse x_0, telle que :

(3) $$0 = - k (x_0 - l_0) - Mg$$

Le poids est équilibré par un certain allongement statique du ressort.

Dans ce qui suit, on s'intéresse au mouvement de la masselotte autour de sa position d'équilibre x_0 .

Soit X(t) l'écart de position de M, à l'instant t, à sa position d'équilibre :

(4) $$X = x - x_0$$

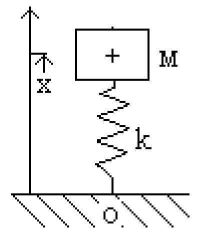

Figure N° 2.2: Oscillateur non amorti

En éliminant (3) dans (2), compte tenu de F=0, et en appliquant le changement de variable (4), l'équation du mouvement se transforme en :

(5) $$M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = 0$$

Remarque : lors de l'étude du mouvement d'un solide autour de sa position d'équilibre, les forces statiques, ici le poids, n'apparaissent plus dans l'équation.

Le mouvement de la masselotte est donné par la solution générale de l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant (5) qui a la forme générale suivante :

(6) $$X(t) = A \cos (\omega_0 t + \varphi)$$

Où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ est la **pulsation propre** du système, et A et φ sont des constantes qui seront définies en fonction des conditions initiales de position.

Exemple : si à l'instant t=0, on lâche le système avec un écart X(0)=a et une vitesse nulle ($\frac{dx(0)}{dt} = 0$), alors on déduit : A = a et φ =0

Soit $X(t) = a \cos(\omega_0 t)$

<u>En conclusion</u> : Un système à un degré de liberté non amorti, déplacé de sa position d'équilibre, oscille sinusoïdalement à sa pulsation propre ω_0 , indéfiniment.

(7) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

2.2.- Vibrations forcées d'un système à un degré de liberté non amorti

Au système précédent, on impose une force extérieure sinusoïdale de pulsation ω : $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$.

L'équation différentielle du mouvement autour de la position d'équilibre statique devient :

(8) $$M\frac{d^2X}{dt^2} + kX = F_0 \cos(\omega t) = R_e(F_0\, e^{j\omega t})$$

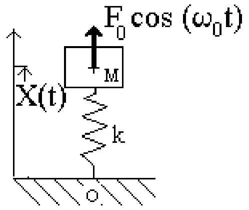

Figure N° 2.3: Vibrations forcées d'un oscillateur non amor

La solution générale de cette équation est la somme de :

- <u>La solution générale de l'équation sans second membre</u> (régime vibratoire libre vu au paragraphe précédent §2.1) est de la forme :
  $$X(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$
- <u>La solution particulière de l'équation complète</u>, que l'on désigne sous le nom de **régime vibratoire forcé**.

Compte tenu de la forme harmonique de la force appliquée, la recherche d'une solution particulière peut être menée par la méthode suivante :

Soit :

- $\overline{F} = F_0 e^{j\omega t}$ la force complexe, telle que $F(t) = R_e(\overline{F})$ appliquée est la partie réelle de $\overline{F}$
- $\overline{X} = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ est le déplacement complexe, dont la partie réelle est le déplacement recherché

Oscillateur non amorti à un degré de liberté en vibration forcée

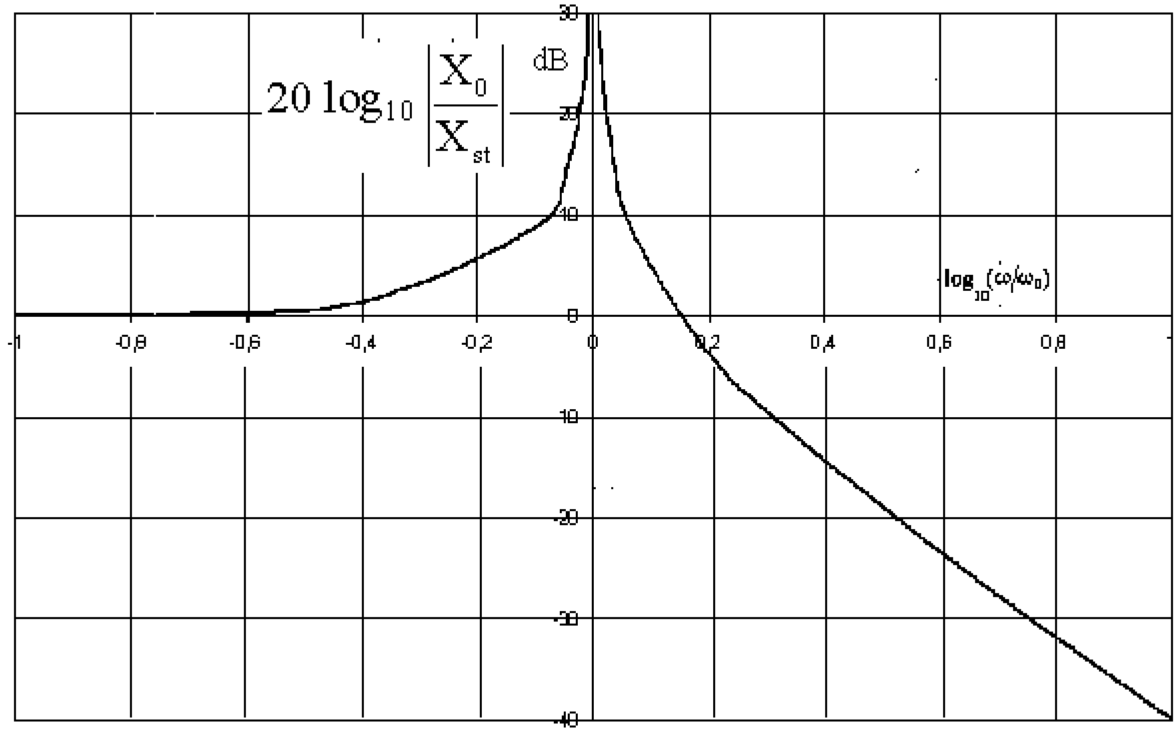

Figure n°2.4 : Amplitude du déplacement en fonction de la pulsation.

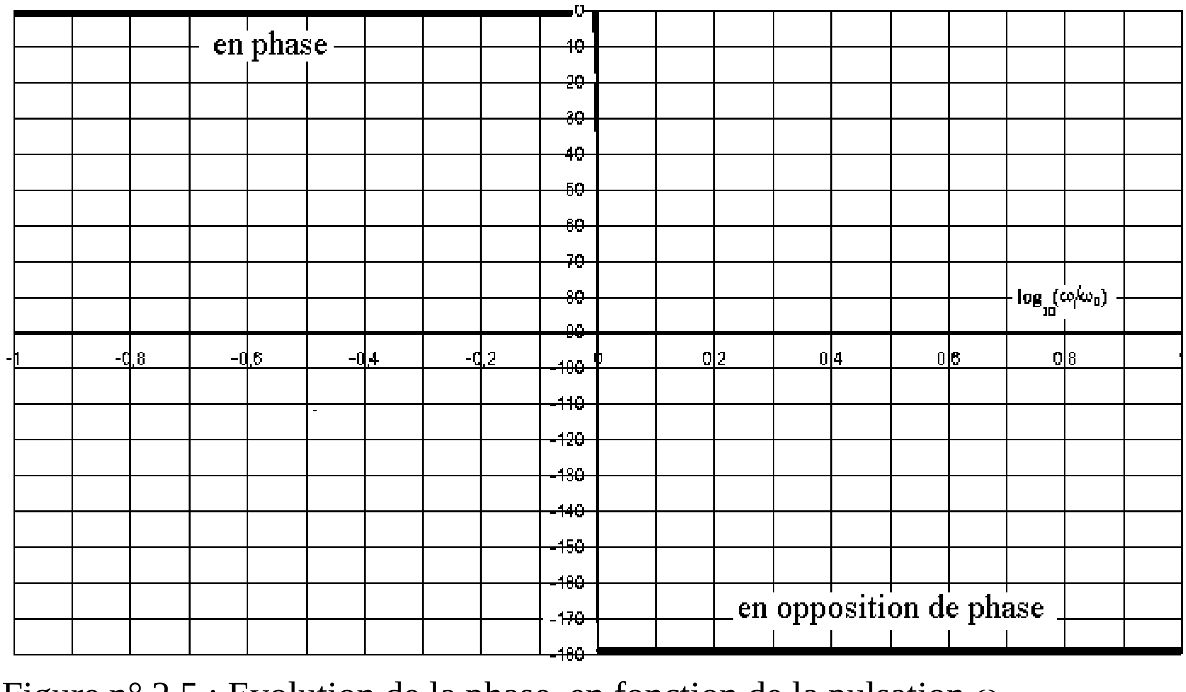

Figure n° 2.5 : Evolution de la phase en fonction de la pulsation ω

L'introduction des formes de X et de F dans l'équation (8) permet d'expliciter le rapport des amplitudes complexes du déplacement résultant $\overline{X}$ à l'amplitude complexe de la force imposée $\overline{F}$.

(9) $$\frac{\overline{X}}{\overline{F}} = \frac{X_0 e^{j\varphi}}{F_0} = \frac{1}{k - M\omega^2}$$

Afin de donner un caractère général aux résultats de cette analyse, il est pratique d'introduire dans l'expression (9) les paramètres caractéristiques de l'oscillateur mécanique étudié.

Un premier paramètre est la **<u>pulsation propre</u>** $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ définie en (7).

Un second paramètre est la **<u>déflexion statique</u>** $X_{st} = \frac{F_0}{k}$. Elle représente le déplacement statique de la masselotte qui résulterait de l'application d'une force constante égale en amplitude au module F_0 de la force harmonique imposée.

Dans ces conditions, après les changements de paramètres indiqués, l'expression (9) devient (10).

(10) $$\frac{k\overline{X}}{\overline{F}} = \frac{X_0 e^{j\varphi}}{X_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Etude de la réponse en vibration forcée en fonction de la pulsation ω.

Pour analyser la réponse en fréquence, la fonction complexe (10) est représentée dans un diagramme de Baude donnant l'évolution de l'amplitude et de la phase en fonction de la pulsation de la force d'excitation.

Réponse en amplitude :

En référence aux pratiques, notamment des automaticiens, il est d'usage de porter sur un graphique l'évolution de la grandeur

(11) $$20 \log_{10} \left|\frac{X_0}{X_{st}}\right| \text{ en fonction du } \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Les ordonnées sont alors graduées en décibels (dB) .

Note: un rapport d'amplitude $\left|\frac{X_0}{X_{st}}\right| = 2$ s'exprime en décibel par une valeur égale à $20 \log_{10}(2) = 20 \times 0{,}30103 \approx 6$ décibels

Oscillateur amorti à un degré de liberté en vibration forcée

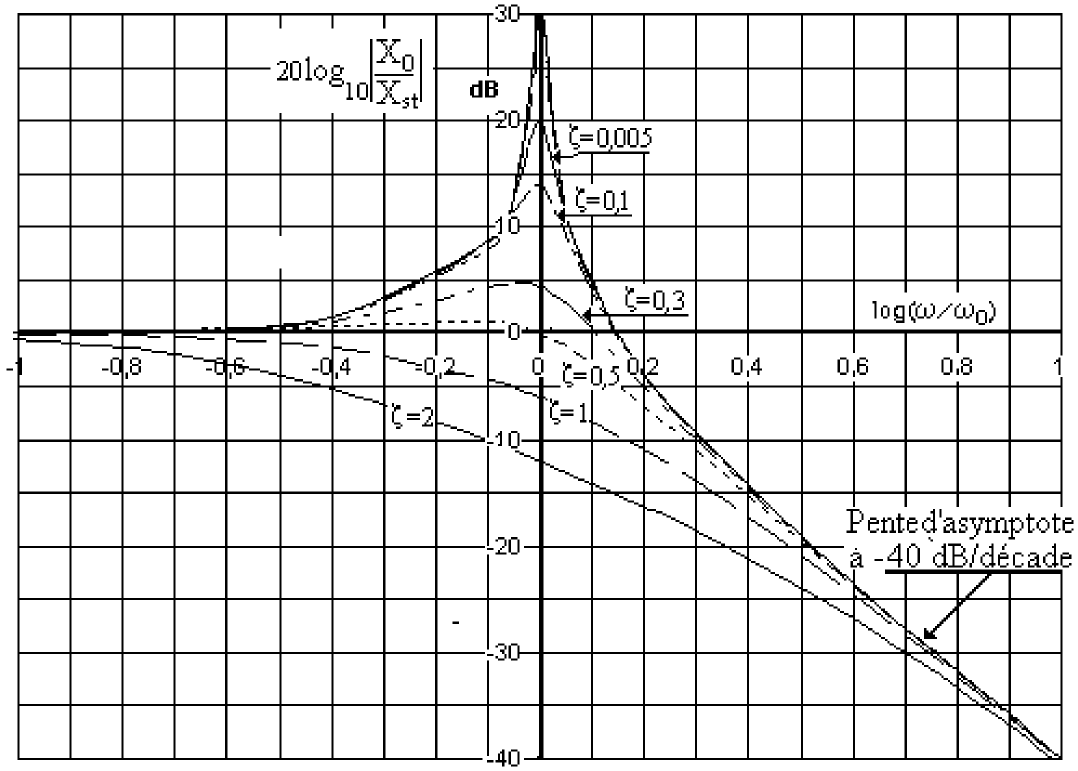

Figure n°2.6 : Amplitude du déplacement en fonction de la pulsation ω, pour différents coefficients d'amortissement.

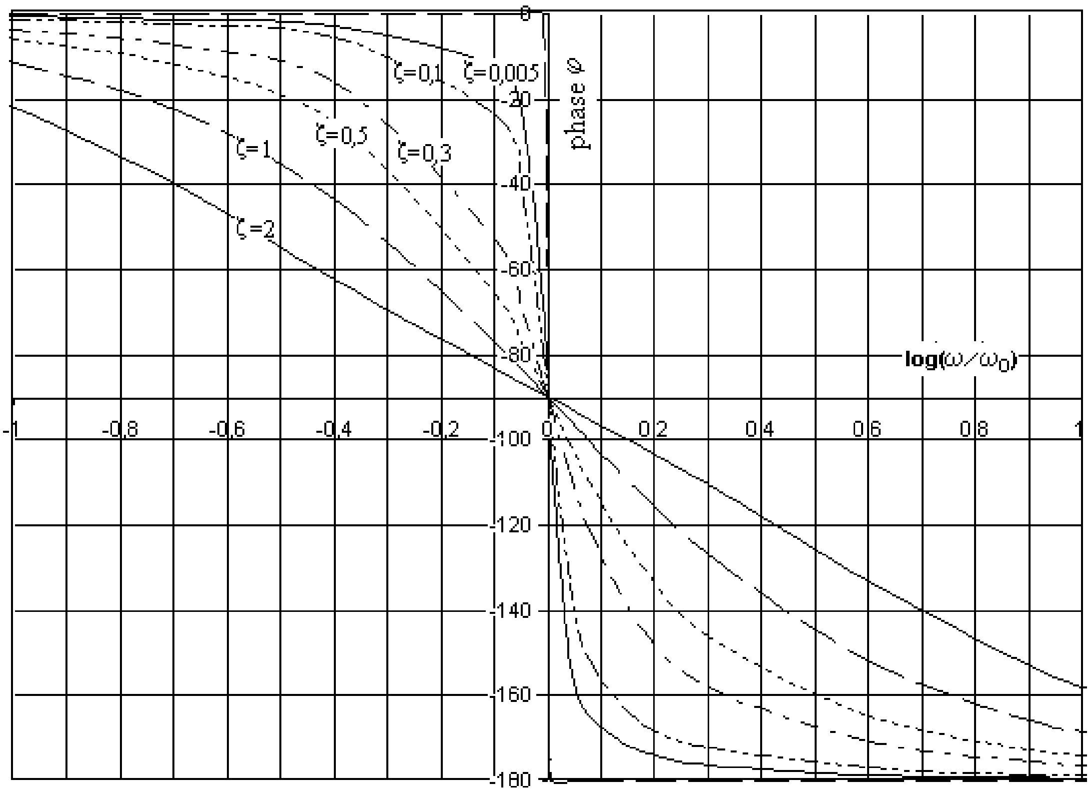

Figure n° 2.7 : Evolution de la phase en fonction de la pulsation ω, pour différents coefficients d'amortissement.

2.3.- Vibrations libres d'un système à un degré de liberté avec amortissement

Soit le cas particulier de la figure n°2.1, pour F = 0, lorsque l'on ne s'intéresse qu'au mouvement de la masselotte autour de sa position d'équilibre.

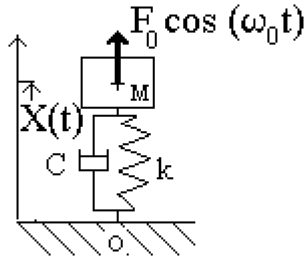

Figure N° 2.8: Vibrations forcées d'un oscillateur non amorti

L'équation (1) devient :

(14) $$M\frac{d^2X}{dt^2}+C\frac{dX}{dt}+kX=0$$

Le mouvement est donné par la solution générale de cette équation.

On recherche des solutions de la forme $X = X_0 e^{\lambda t}$ et donc les valeurs particulières de λ qui satisfassent à (14), solutions de (15).

(15) $$M\lambda^2 + C\lambda + k = 0 .$$

Suivant les valeurs des paramètres M, C et k de l'oscillateur amorti, les racines λ_1 et λ_2 de cette équation du second degré seront des nombres réels ou des imaginaires traduisant respectivement des fonctions du temps monotones ou oscillantes. Ceci dépend du signe du discriminant $\Delta = C^2 - 4kM$

On désignera sous le nom d'amortissement critique, C_r la valeur de C qui annule le discriminant Δ , soit :

(16) $$C_r = \sqrt{4kM}$$

Dans ces conditions, il est utile de transformer l'équation (14) pour la mettre sous une forme canonique, en introduisant des grandeurs caractéristiques de l'oscillateur amorti, à savoir :

la fréquence de résonance	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$
l'amortissement critique	$C_r = \sqrt{4kM}$
le coefficient d'amortissement	$\zeta = \frac{C}{C_r}$

Il vient :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\frac{C}{C_r}\omega_0\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$$

ou encore en introduisant le coefficient d'amortissement ζ :

(17) $$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = 0$$

En recherchant des solutions sous la forme X(t) = a $e^{\lambda t}$, compte tenu des nouveaux paramètres, l'équation (15) se transforme en (18) :

(18) $$\lambda^2 + 2\zeta\omega_0\lambda + \omega_0^2 = 0$$

le discriminant de cette équation du second degré est noté Δ:

(19) $$\Delta = \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

2.3.1.- Réponse non oscillante : ζ>1, C>C_r

Lorsque l'amortissement de l'oscillateur est supérieur à l'amortissement critique (ζ>1, C>C_r) l'équation admet deux racines réelles négatives:

(20) $\lambda_1 = -\alpha_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$ et $\lambda_2 = -\alpha_1 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$

Dans ces conditions, lorsque M est déplacée de sa position d'équilibre, puis lâchée, le retour se fait sous la forme d'une fonction continûment décroissante du temps de la forme :

(21) $$X(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

A et B sont des constantes à identifier à partir de conditions initiales imposées.

2.3.2.- Réponse critique : ζ=1, C=C_r

Lorsque l'amortissement C est strictement égal à l'amortissement critique, l'équation (18) admet une racine double λ_0 :

(22) $$\lambda_0 = -\omega_0$$

la solution générale est encore une fonction monotone du temps de la forme :

(23) $$X(t) = (At + B)e^{-\omega_n t}$$

A et B sont, là encore, des constantes à identifier à partir de conditions initiales imposées.

2.3.3.- Réponse oscillante : $\zeta < 1$ $C < C_r$

Lorsque C est inférieur à l'amortissement critique C_r, , le discriminant Δ est négatif et les solutions de l'équation caractéristiques sont à valeurs complexes :

(24) $\lambda_1 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ et $\lambda_2 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Deux nouveaux paramètres sont définis :

Le **décrément logarithmique** $\lambda = \zeta\omega_0 = \dfrac{C}{2M}$

La **pseudo pulsation** $q = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

La solution générale des vibrations libres avec amortissement s'écrit donc :

$$\overline{X}(t) = Ae^{-\lambda t + jqt} + Be^{-\lambda t - jqt}$$

A et B sont des constantes d'intégration.

La partie réelle de la solution peut s'écrire sous la forme (25)

(25) $$X(t) = A_1\, e^{-\lambda t} \cos(q\, t + \varphi)$$

A_1 et φ sont des constantes d'intégration à identifier.

2.4.- Vibrations forcées d'un système à un degré de liberté avec amortissement

En vibrations forcées, l'équation du mouvement complète comprend un second membre.

(26) $$M\frac{d^2X}{dt^2} + C\frac{dX}{dt} + kX = F_0\cos(\omega t)$$

En introduisant les paramètres caractéristiques de l'oscillateur mécanique amorti, cette équation se met sous la forme canonique suivante :

(27) $$\frac{d^2X}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dX}{dt} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 X_{st}\cos(\omega t) = R_e(\omega_0^2 X_{st} e^{j\omega t})$$

avec, rappelons le, :

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$: la pulsation propre ;

$\zeta = \dfrac{C}{C_r} = \dfrac{C}{\sqrt{4kM}}$: le coefficient d'amortissement ;

$X_{st} = \dfrac{F_0}{k}$: la déflexion statique

Une solution particulière de l'équation complète est recherchée sous la forme :

(28) $$\overline{X}(t) = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

Cette forme injectée dans (27) donne :

(29) $$\frac{X_0 e^{j\varphi}}{X_{st}} = \frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_0}}$$

L'analyse de la réponse en fonction de la pulsation ω de la force d'excitation est conduite de façon analogue à celle menée au paragraphe §2.2.

Réponse en amplitude

(30) $$\left|\frac{X_0}{X_{st}}\right| = \frac{1}{\left(\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)},$$

La figure n° 2.6 représente l'évolution de l'amplitude X_0 en fonction de la pulsation ω. L'axe des ordonnées porte 20 $\log_{10} \left|\dfrac{X_0}{X_{st}}\right|$, gradué en décibels (dB), en fonction de $\log_{10}(\dfrac{\omega}{\omega_0})$.

Réponse en Phase

(31) $$\varphi = \text{- Arctg}\left(\frac{2\zeta \dfrac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

La figure n°2.6 représente l'évolution de la phase φ du déplacement X(t) par rapport à la force imposée F(t), en fonction de ω.
Sur les deux figures, les différentes courbes sont paramétrées par le coefficient d'amortissement $\zeta = \dfrac{C}{C_r}$

Aux très basses fréquences (pulsations), l'amplitude X_0 tangente l'horizontale à 0 dB, par valeur supérieures, tandis que la phase est quasi nulle.
Lorsque la pulsation d'excitation ω augmente et tend vers la pulsation de résonance ω_0, l'amplitude croit pour atteindre un maximum au voisinage de la pulsation de résonance. Le niveau de ce maximum d'amplitude est fonction inverse du coefficient d'amortissement ζ. Une amplitude infinie à la résonance correspond à un $\zeta = 0$ (Système non amorti). Dans le même temps la phase, qui est un retard de phase du déplacement sur la force imposée passe progressivement de 0 à $-\pi/2$.

Au delà de la résonance , vers les hautes fréquences $\omega > \omega_0$, l'amplitude décroît et le retard de phase tend vers $-\pi$ (opposition de phase). Toutes les courbes d'amplitude tendent vers l'asymptote dont la pente est de – 40 dB/décade.