

## CHAPITRE 10

### COMPORTEMENT MECANIQUE DES CONTREPLAQUES

Comme cela est indiqué au chapitre 1, § 1.3.2, §1.3.3 et §1.3.4, la matière ligneuse n'est pas simplement mobilisée industriellement sous forme de bois massif.

Qu'il s'agisse :

- de feuilles de déroulage destinées à la fabrication de contre-plaqués et de poutres lamifiées,
- de tranchages utilisés comme plis de parement pour leurs qualités esthétiques, de bois déchiquetés, divisés plus ou moins finement sous forme de copeaux, de plaquettes ou de sciures entrant dans la composition de panneaux de particules,
- de fibres cellulosiques, extraites par divers procédés chimiques ou mécaniques pour la confection de papiers, de cartons et de panneaux fibres de différentes densités,

une part très importante de la ressource en bois est consommée sous des formes plus ou moins divisées.

On notera que les deux dernières catégories évoquées ci-dessus peuvent être en partie approvisionnées à partir des résidus de première transformation, sciage, déroulage et tranchage, contribuant ainsi à une amélioration sensible du rendement matière.

Les matériaux composites, panneaux et stratifiés, élaborés généralement sous forme de panneaux à partir des co-produits du bois massif, peuvent être conçus, a priori dans leur conformation et leur composition, pour satisfaire aux exigences technologiques d'un cahier des charges. Cette proposition est illustrée dans la suite de ce chapitre par la présentation d'un outil particulier de conception et de dimensionnement des stratifiés multicouches à base de bois : les contreplaqués.

Le calcul prévisionnel des caractéristiques élastiques des contreplaqués est effectué à partir d'une modélisation basée sur la théorie des plaques minces stratifiées (Chapitre 9) en utilisant la masse volumique  $\rho$  du contreplaqué, à une humidité  $H$ , comme indicateur simple des caractéristiques du bois constitutif des plis.

Les prévisions des modules de flexion-torsion sont vérifiées avec une précision remarquable à propos d'un contreplaqué équilibré tout Okoumé testé

au moyen de deux dispositifs d'essais ; l'un de flexion et l'autre de torsion. Ces dispositifs sont rendus performants par les particularités technologiques originales, mises en œuvre au niveau des appuis.

D'importants progrès ont été réalisés, au cours des dernières années, en matière de rhéologie du comportement du matériau bois [GUITARD 1987], de conception mécanique des matériaux composites [LAROZE 1988], et enfin de qualification expérimentale de tels matériaux [BOS 1993].

En particulier, les contreplaqués constituent une classe de matériaux à base de bois dont la conception en fonction de performances requises peut, d'ores et déjà, être réalisée avec une grande précision. Ceci, paradoxalement en regard de la grande variabilité des propriétés mécaniques du matériau bois traditionnellement avancée dans la littérature, BODIG 1973.

L'objectif de ce chapitre est de montrer l'excellente concordance existant entre les évaluations expérimentales et les calculs prévisionnels des caractéristiques élastiques de flexion et de torsion de panneaux de contreplaqués.

Les souplesses de flexion-torsion,  $d_{ij}$ , sont mesurées à l'aide de deux dispositifs expérimentaux, l'un de flexion quatre points et l'autre de torsion. Des particularités technologiques originales, concernant les appuis, rendent ces moyens d'essais particulièrement adaptés à la caractérisation d'éprouvettes prélevées dans des plaques anisotropes, BOS 1993, GODET 1993.

Le logiciel de calcul prévisionnel des caractéristiques élastiques du contreplaqué fonctionne sur une modélisation assez classique, HEARMON 1948, de plaques multicouches stratifiées, à plis anisotropes élastiques orientés, sous hypothèses de faibles déflexions, du type Love Kirchhoff, en contraintes planes (Chapitre 9). L'originalité de la modélisation réside, cette fois, dans l'utilisation de la masse volumique  $\rho$  et du taux d'humidité  $H$  du contreplaqué, comme paramètres indicateurs des propriétés élastiques du bois massif constitutif des plis [GUITARD-EL AMRI 1986].

## 10.1 DIMENSIONNEMENT DE CONTRE-PLAQUES

Dans ce chapitre, une classe particulière de stratifiés est envisagée, les contre-plaqués. Un certain nombre d'hypothèses restrictives, mais réalistes, vont être formulées. Il en découlera la mise en œuvre d'une procédure de calcul prévisionnel et de dimensionnement des contreplaqués; laquelle pourra être ultérieurement modifiée, au gré de l'affinement des hypothèses préalablement émises.

### 10.1.1 Les données

Les précisions apportées dans ce paragraphe conditionnent le domaine de validité des conclusions numériques qui en seront tirées.

#### 10.1.1.1. Géométrie du panneau. Courbures admissibles.

Les panneaux considérés auront des dimensions grandes par rapport à l'épaisseur ; la longueur  $L$  et la largeur  $l$  seront de l'ordre du mètre, tandis que l'épaisseur  $h$  sera de l'ordre du centimètre. Le panneau supposé initialement plan ne subira que des faibles courbures, à grands rayons de l'ordre de plusieurs mètres, de telle sorte que les hypothèses cinématiques de Lowe-Kirchhoff puissent être retenues comme indiqué au §.9.1.2.

#### 10.1.1.2. Propriétés matérielles du pli déroulé.

Le problème majeur est ici de se donner les propriétés matérielles des plis de bois constituant le contreplaqué. L'originalité de la méthode consiste à utiliser les différents modèles prévisionnels de comportement mécanique des bois standards, introduits dans les chapitres précédents §4.2.

#### **Soupleses et rigidités élastiques.**

Les plis de bois résultent ici du déroulage d'une grume. Le comportement élastique d'un pli déroulé est supposé identique à celui du bois massif. Cette hypothèse ne tient pas compte de l'inévitable endommagement mécanique que subit le pli au cours du déroulage. Il est ici admis que cet endommagement est compensé par l'indiscutable renforcement transverse de la cohésion mécanique du pli qui résulte de la colle d'assemblage.

Les complaisances élastiques  $S_{ijkl}$  sont des données directes du problème, lorsqu'elles sont connues pour l'essence considérée.

Tableau n° 10.1: Modèles prévisionnels des caractéristiques élastiques d'une essence de masse volumique  $\rho$  donnée à 12% d'humidité.

Feuille "standard" (effectif 43) ( $\rho_0 = 0,65 \text{ g/cm}^3, H = 12\%$ ) $S_{ij}^{-1}(\rho) = S_{ij}^{-1}(\rho_0) \cdot [\rho/\rho_0]^B$				Résineux "standard" (effectif: 37) ( $\rho_0 = 0,45 \text{ g/cm}^3, H=12\%$ ) $S_{ij}^{-1}(\rho) = S_{ij}^{-1}(\rho_0) + B(\rho - \rho_0)$		
Modules z	$S_{ij}^{-1}(\rho_0)$ MPa	B	R(z, $\rho$ )	$S_{ij}^{-1}(\rho_0)$ MPa	B MPa. $\text{cm}^3/\text{g}$	R(z, $\rho$ )
$S_{11}^{-1} = E_R$	1810	1,30	0,933	1000	2370	0,705
$S_{22}^{-1} = E_T$	1030	1,74	0,920	636	1910	0,744
$S_{33}^{-1} = E_L$	14400	1,03	0,917	13100	41700	0,876
$S_{44}^{-1} = G_{TL}$	971	1,26	0,912	745	989	0,533
$S_{55}^{-1} = G_{LR}$	1260	1,14	0,900	861	2080	0,676
$S_{66}^{-1} = G_{RT}$	366	1,74	0,851	83,6	228	0,460
$-S_{12}^{-1} = \frac{E_R}{\nu_{RT}} = \frac{E_T}{\nu_{TR}}$	2680	1,41	0,888	2050	5280	0,546
$-S_{23}^{-1} = \frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}$	31200	1,09	0,805	30800	101000	0,817
$-S_{31}^{-1} = \frac{E_R}{\nu_{RL}} = \frac{E_L}{\nu_{LR}}$	37300	0,913	0,727	34200	117000	0,762

**Note:**  
R est le coefficient de corrélation obtenu pour chacune des régressions calculées. Il est à apprécier en fonction de l'effectif des populations traitées.  
B est soit l'exposant de la loi puissance, soit la pente de la droite de régression de la loi linéaire, obtenu par optimisation par les moindres carrés.  
Pour  $N-2 = 38$  degrés de liberté,  
Test significatif au seuil de 1‰ avec  $R > 0,413$   
Test significatif au seuil de 1‰‰ pour  $R > 0,513$

$$(10.0) \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{zr} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_R} & \frac{-\nu_{TR}}{E_T} & \frac{-\nu_{LR}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & \frac{-\nu_{LT}}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{RL}}{E_R} & \frac{-\nu_{TR}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Dans le cas contraire, elles seront évaluées au moyen des modèles prévisionnels de comportement élastiques proposés par différents auteurs.

Il conviendra alors de préciser pour chaque pli, la nature feuillue ou résineuse de l'essence utilisée ainsi que la masse volumique anhydre  $\rho_o$ . Ces modèles sont rappelés sur le tableau n°10.1, qui reproduit le tableau n°4.4.

Les rigidités  $C_{ijkl}$  (10.1), dans le référentiel de grume, sont obtenues par inversion du tenseur des complaisances  $S_{ijkl}$  (10.0)

$$(10.1) \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{3232} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{zr} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix}$$

### Retraits dus à une variation d'humidité

Les coefficients de retrait  $\alpha_{ij}^p$ , relatifs à chacun des plis, sont des caractéristiques matérielles données, lorsqu'elles sont connues pour l'essence considérée. Dans le cas contraire, les modèles prédictifs donnant le tenseur des coefficients de contrainte  $\beta_{ij}^p$  seront utilisés.

Rappelons que, comme indiqué en (8.17) §.8.2.3, les composantes  $\beta_{ij}^p$  du tenseur des coefficients de contraintes intègrent les propriétés élastiques et les retraits aux variations de taux d'humidité.

$$(10.2) \quad \beta_{ij}^p = C_{ijkl}^p \alpha_{kl}^p = \bar{\beta} \delta_{ij} = 21,5 (\rho^p)^2 \delta_{ij} \text{ en MPa}/\%H \text{ et } \rho^p \text{ en g/cm}^3$$

En première lieu, le tenseur des coefficients de contraintes apparaît comme un tenseur quasi isotrope. Les retraits au séchage dans les différentes directions matérielles semblent en proportion inverse des rigidités dans ces mêmes directions. Admettre l'isotropie de ce tenseur introduit des simplifications mathématiques dont on profitera dans la suite. En effet les composantes du tenseur restent invariantes dans un changement de base du type rotation.

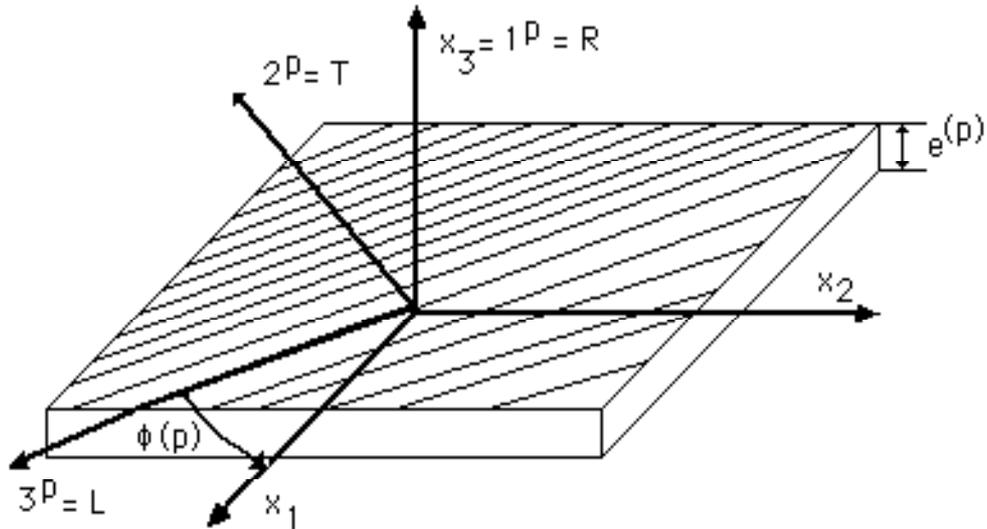


Figure n°10.1: Orientation du pli de rang p.

Tableau n°10.2 donnant les composantes du tenseur de rigidité dans le référentiel de plaque, après une rotation d'angle  $\varphi^P$  autour de l'axe  $\vec{R}$ .

$C_{ijkl}$  : Rigidités en notation tensorielle dans le référentiel de grume.

$C_{ijkl}^P$  : Rigidités en notation tensorielle (4 indices) dans le référentiel de plaque

$C_{ij}^P$  : Rigidités en notation matricielle (2 indices) dans le référentiel de plaque avec:

$$c = \cos(\varphi^P) \quad \text{et} \quad s = \sin(\varphi^P)$$

$$C_{11}^P = C_{1111}^P = C_{3333}c^4 + (2C_{2233} + 4C_{3232})s^2c^2 + C_{2222}s^4$$

$$C_{22}^P = C_{2222}^P = C_{2222}c^4 + (2C_{2233} + 4C_{3232})s^2c^2 + C_{3333}s^4$$

$$C_{33}^P = C_{3333}^P = C_{1111}$$

$$C_{23}^P = C_{2233}^P = C_{1122}c^2 + C_{1133}s^2$$

$$C_{31}^P = C_{3311}^P = C_{1133}c^2 + C_{1122}s^2$$

$$C_{12}^P = C_{1122}^P = C_{2233}(c^4 + s^4) + (C_{2222} + C_{3333} - 4C_{2233})s^2c^2$$

$$C_{44}^P = C_{2323}^P = C_{1212}c^2 + C_{3131}s^2$$

$$C_{55}^P = C_{3131}^P = C_{3131}c^2 + C_{1212}s^2$$

$$C_{66}^P = C_{1212}^P = C_{2323}(c^2 - s^2) + (C_{2222} + C_{3333} - 2C_{2233})s^2c^2$$

$$C_{16}^P = C_{1112}^P = -(C_{2222} - C_{2233} - 2C_{2323})s^3c - (C_{3322} - C_{3333} + 2C_{2323})sc^3$$

$$C_{26}^P = C_{2212}^P = -(C_{2222} - C_{2233} - 2C_{2323})sc^3 - (C_{3322} - C_{3333} + 2C_{2323})s^3c$$

$$C_{36}^P = C_{3312}^P = -(C_{1122} - C_{1133})sc$$

$$C_{45}^P = C_{2331}^P = -(C_{1313} - C_{1212})sc$$

En second lieu, pour une essence de masse volumique  $\rho^p$ , une bonne approximation du tenseur des souplesses est donnée par les expressions du tableau n° 10.1

### Dans le référentiel de plaque

Les plis étant obtenus par déroulage d'une grume, on admettra que la direction  $\vec{R}$  radiale de la matière ligneuse est sensiblement colinéaire à la direction  $\vec{X}_3$ , perpendiculaire au plan du panneau. Le plan du pli est donc (L,T) longitudinal, tangentiel. L'orientation du pli de rang p par rapport au référentiel de la plaque est défini par l'angle  $\varphi^p$  qui amène L sur  $\vec{X}_1$  par rotation autour de  $\vec{X}_3 = \vec{R}$ .

Les propriétés matérielles dans le référentiel de plaque sont obtenues en appliquant la formule de changement de base (3.2) du § 3.1.2,

$$(10.3) \quad C_{ijkl}^p = C_{pqrs} \varphi_{pi}^p \varphi_{qj}^p \varphi_{rk}^p \varphi_{sl}^p$$

moyennant la matrice de changement de base  $\varphi_{ij}^p$  suivante:

$$(10.4) \quad [\varphi_{ij}^p] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin(\varphi^p) & -\cos(\varphi^p) & 0 \\ \cos(\varphi^p) & -\sin(\varphi^p) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -s & -c & 0 \\ c & -s & 0 \end{bmatrix}$$

Le lecteur notera que la matrice de changement de base (10.3) n'a pas la forme la plus usuelle. Ceci tient compte du fait que, lors du changement de base, il y a eu une rotation autour de l'axe R et une permutation dans l'ordre des axes (1 $\leftrightarrow$ 3).

Le résultat du changement de base par la relation (10.3), moyennant (10.4), donne les composantes  $C_{ijkl}^p$  du tenseur des rigidités exprimées dans le référentiel de plaque, comme indiqué dans le tableau n°10.2.

**remarque:** Dans le tableau 10.2 sont indiquées les rigidités dans le référentiel de plaque. Celui-ci n'est plus colinéaire au référentiel de symétries matérielles du matériau constitutif. C'est la raison pour laquelle les rigidités sont maintenant au nombre de 13, alors qu'initialement elles étaient au nombre de 9.

De plus, les notations, avec contraction des indices deux à deux, ont été introduites pour les rigidités, comme cela a été fait pour les déformations et pour les contraintes au paragraphe § 3.1.4.

Les composantes du tenseur des coefficients de contraintes  $\beta_{ij}^p$  au séchage sont inchangées dans cette rotation conformément à la propriété de sphéricité du tenseur adoptée au paragraphe § 8.2.4.

### 10.1.1.3. Champ de variation du taux d'humidité

#### **Séchage ou reprise d'humidité**

Les variations spatiales du taux d'humidité envisagées ici, correspondent soit à un séchage  $\Delta H(x_1, x_2, x_3) < 0$ , soit à une reprise d'humidité  $\Delta H(x_1, x_2, x_3) > 0$ .

La situation initiale est une distribution spatialement uniforme de taux d'humidité, exprimé en %, notée :

$$(10.5) \quad H_0(x_1, x_2, x_3) = H_0$$

constante, généralement inférieure au point de saturation des fibres (PSF).

Le panneau est supposé plan dans cette situation initiale.

La situation finale (actuelle) est une distribution que l'on supposera linéarisée en  $x_3$ :

$$(10.6) \quad H_1(x_1, x_2, x_3) = H_0 + \Delta H(x_1, x_2, x_3) = H_0 + A(x_1, x_2) + x_3 B(x_1, x_2)$$

#### **Retraits et gonflements**

Les variations dimensionnelles résultant de  $\Delta H(x_1, x_2, x_3)$  sont prises en compte comme indiqué en (15) § I.2.1.3. Si le tenseur des coefficients de contrainte  $\beta_{ij}^p$  est une donnée du problème, les coefficients de retrait  $\alpha_{ij}^p$  seront calculés par la formule suivante:

$$(10.7) \quad \alpha_{ij}^p = S_{ijkl}^p \delta_{kl} \bar{\beta}$$

#### **Influence de l'humidité sur les rigidités.**

L'influence du changement du taux d'humidité sur les rigidités élastiques est prise en compte par une correction linéarisée en  $(H_1(x_i) - 12\%)$ , conforme à celle proposée par ailleurs [Guitard].

$$(10.8) \quad \begin{aligned} & [S_{3333}(H_1)]^{-1} = [S_{3333}(12)]^{-1} [1-0,015(H_1(x_1, x_2, z^p)-12)] \\ & \text{pour toutes les autres composantes :} \\ & [S_{ijkl}(H_1)]^{-1} = [S_{ijkl}(12)]^{-1} [1-0,030(H_1(x_1, x_2, z^p)-12)] \end{aligned}$$

On rappelle que  $z^p$  est la côte du plan moyen du pli de rang  $p$ .  
Faute de mieux, cette correction est jugée suffisante.

#### 10.1.1.4 Efforts extérieurs imposés.

Dans la suite de ce chapitre le panneau n'est soumis qu'à la variation spatiale de taux d'humidité. Il est libre de tout effort extérieur.

En conséquence:

La densité surfacique d'efforts extérieurs signalée au § 9.2.2.2. est nulle

$$(10.9) \quad F_i(x_1, x_2) = 0 \text{ pour } i = (1, 2).$$

Les efforts  $N_i$  de membrane et les moments  $M_i$  de flexion-torsion sont nuls sur le contour, soit:

$$(10.10) \quad N_i(\pm L/2, x_2) = 0 \quad ; \quad M_i(\pm L/2, x_2) = 0$$

$$(10.11) \quad N_i(x_1, \pm l/2) = 0 \quad ; \quad M_i(x_1, \pm l/2) = 0$$

#### 10.1.1.5. Conclusions sur les données.

L'ensemble des données précisées ci-dessus permet de déterminer la déformée d'un panneau initialement plan lorsqu'il est le siège d'une variation de taux d'humidité et libre de toute contrainte extérieure.

On notera en particulier que l'angle de pli  $\varphi^p$ , utilisé en § 9.1.3, est supposé, pour l'instant, spatialement uniforme. Ceci pourra être revu pour tenir compte de défauts d'angles de fil au sein d'un pli, en particulier au voisinage des nœuds.

### 10.1.2 Résolution en déplacements

#### 10.1.2.1 Choix de la forme du champ de déplacement.

La méthode de résolution développée dans la suite est une méthode de déplacements qui s'appuie sur les hypothèses cinématiques formulées au § 9.1.2.

Le choix du champ de déplacement (9.7) implique tout d'abord:

- la continuité des déplacements aux interfaces  $h_p$  entre les plis de rang  $p$  et  $p+1$ . Ceci satisfait donc automatiquement les conditions (9.18) du § 9.2.2.1.
- les composantes  $\gamma_5 = 2\varepsilon_{13} = 0$  et  $\gamma_4 = 2\varepsilon_{23} = 0$  sont nulles.

Compte tenu des rigidités  $C_{ij}^p$  explicitées dans le tableau n°10.2, les composantes  $\sigma_5 = \sigma_{13}$  et  $\sigma_4 = \sigma_{23}$  correspondantes du tenseur des contraintes, dans le référentiel de plaque, se calculent comme indiqué en (9.17). Elles sont donc nulles :

$$(10.12) \quad \sigma_4 = C_{44}^p \gamma_4 + C_{45}^p \gamma_5 = 0 \quad ; \quad \sigma_5 = C_{54}^p \gamma_4 + C_{55}^p \gamma_5 = 0$$

Ceci satisfait à deux des trois conditions (9.19) du § 9.2.2.1, portant sur les conditions en contraintes aux interfaces de plis.

La troisième condition porte sur  $\sigma_{33}$  qui s'écrit :

$$(10.13) \quad \sigma_{33} = \sigma_3 = C_{31}^p \varepsilon_1 + C_{32}^p \varepsilon_2 + C_{33}^p \varepsilon_3 + C_{36}^p \gamma_6 - \bar{\beta} [A(x_1, x_2) + x_3 B(x_1, x_2)]$$

Pour assurer la condition de continuité de cette composante aux interfaces  $h_p$ , il faut l'imposer nulle partout. Cette condition conduit à formuler des hypothèses de contraintes planes.

#### 10.1.2.2 Conditions de contraintes planes.

La loi de comportement hygro-élastique en situation de contraintes planes est obtenue en injectant dans (9.17) l'expression de  $\varepsilon_3$  extraite de (10.13). Elle s'écrit sous la forme suivante:

$$(10.14) \quad \sigma_i = Q_{ij}^p (\varepsilon_j^o + x_3 k_j) - \beta_i^p [A(x_1, x_2) + x_3 B(x_1, x_2)]$$

avec  $i$  et  $j \in (1, 2, 6)$

Le détail des composantes élastiques  $Q_{ij}^p$  en contraintes planes ainsi que les coefficients de contrainte  $\beta_i^p$  sont indiqués dans le tableau n°10.3.

#### 10.1.2.3 Loi de comportement hygro-élastique de plaque.

Les efforts généralisés définis en (9.1) et (9.2) du § 9.1.1. s'obtiennent en intégrant les expressions (10.14) suivant l'épaisseur de la plaque.

$$(10.15) \quad N_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i dx_3 \quad ; \quad M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i x_3 dx_3 \quad ; \quad \text{pour } i \text{ et } j \in (1, 2, 6).$$

Conformément aux propositions du § 9.1.3., la loi de comportement s'exprime en termes de *rigidités de membranes*  $A_{ij}$ , de *rigidités de flexion-torsion*  $D_{ij}$  et de *rigidités de couplage*  $B_{ij}$  sous la forme (10.16)

$$(10.16) \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1 & F_1 \\ E_2 & F_2 \\ E_6 & F \\ F_1 & G_1 \\ F_2 & G_2 \\ F_6 & G_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x_1, x_2) \\ B(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Contrairement à la forme proposée dans l'écriture (9.10), des termes complémentaires  $E_i$ ,  $F_i$  et  $G_i$  apparaissent pour tenir compte de l'effet de variation du taux d'humidité. Les différents termes sont explicités sur le tableau n° 10.4.

Après inversion, la loi de comportement s'exprime alors en termes de *soupleses de membranes*  $a_{ij}$ , de *soupleses de flexion-torsion*  $d_{ij}$  et de *soupleses de couplage*  $b_{ij}$  sous la forme (10.17)

$$(10.17) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} & b_{11} & b_{12} & b_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} & b_{21} & b_{22} & b_{26} \\ a_{61} & a_{62} & a_{66} & b_{61} & b_{62} & b_{66} \\ b_{11} & b_{12} & b_{16} & d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{26} & d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ b_{61} & b_{62} & b_{66} & d_{61} & d_{62} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & f_1 \\ e_2 & f_2 \\ e_6 & f \\ f_1 & g_1 \\ f_2 & g_2 \\ f_6 & g_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(x_1, x_2) \\ B(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

Tableau n°10.3: Expression dans le référentiel de plaque des composantes de rigidité en contraintes planes  $Q_{ij}^P$  ainsi que les coefficients de contrainte  $\beta_i^P$ .

$$\begin{aligned} Q_{11}^P &= C_{11}^P - \frac{C_{13}^P C_{31}^P}{C_{33}^P}, & Q_{12}^P &= C_{12}^P - \frac{C_{13}^P C_{32}^P}{C_{33}^P}, & Q_{16}^P &= C_{16}^P - \frac{C_{13}^P C_{36}^P}{C_{33}^P} \\ Q_{22}^P &= C_{22}^P - \frac{C_{23}^P C_{32}^P}{C_{33}^P}, & Q_{26}^P &= C_{26}^P - \frac{C_{23}^P C_{36}^P}{C_{33}^P}, & Q_{66}^P &= C_{66}^P - \frac{C_{63}^P C_{36}^P}{C_{33}^P} \\ \beta_1^P &= \bar{\beta} \left[ 1 - \frac{C_{13}^P}{C_{33}^P} \right], & \beta_2^P &= \bar{\beta} \left[ 1 - \frac{C_{23}^P}{C_{33}^P} \right], & \beta_6^P &= \bar{\beta} \left[ 1 - \frac{C_{63}^P}{C_{33}^P} \right] \end{aligned}$$

Tableau n°10.4: Expression des rigidités de membrane  $A_{ij}$ , de flexion-torsion  $D_{ij}$ , ainsi que des termes de couplage  $B_{ij}$  et des coefficients de contraintes généralisés  $E_i$ ,  $F_i$  et  $G_i$ . avec  $i$  et  $j \in (1,2,6)$

**Rigidités de membrane:**

$$(10.18) \quad A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}^P dx_3 = \sum_{P=1}^n Q_{ij}^P e^P$$

**Rigidités de flexion-torsion:**

$$(10.19) \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}^P x_3^2 dx_3 = \sum_{P=1}^n Q_{ij}^P \left[ e^P z^{P^2} + \frac{e^{P^3}}{12} \right]$$

**Rigidités de couplage:**

$$(10.20) \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{ij}^P x_3 dx_3 = \sum_{P=1}^n Q_{ij}^P e^P z^P$$

**Coefficients de contrainte de membrane:**

$$(10.21) \quad E_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \beta_i^P dx_3 = \sum_{P=1}^n \beta_i^P e^P$$

**Coefficient de contrainte de couplage:**

$$(10.22) \quad F_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \beta_i^P x_3 dx_3 = \sum_{P=1}^n \beta_i^P z^P e^P$$

**Coefficients de contrainte de flexion -torsion:**

$$(10.23) \quad G_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \beta_i^P x_3^2 dx_3 = \sum_{P=1}^n \beta_i^P \left[ e^P z^{P^2} + \frac{e^{P^3}}{12} \right]$$

## 10.2 SIMULATIONS ET CALCUL PREVISIONNEL DE CONTREPLAQUES

En associant les modèles prévisionnels de comportements élastiques tridimensionnels proposés au chapitre 4 (Tableau n°4.4) et rappelés sur le tableau n°10.1, à la théorie des plaques stratifiées élastiques, il est tout à fait possible de prévoir, de simuler les caractéristiques élastiques de membrane  $A_{ij}$ , de flexion-torsion  $D_{ij}$  ainsi que les termes de couplages  $B_{ij}$  pour des panneaux de contreplaqué.

Un simple tableur permet d'exploiter pour chaque pli les propriétés élastiques dans le référentiel du panneau (Tableau n°10.2) compte tenu de :

- l'orientation du pli ( $\varphi^p$ ). L'état supposé de contraintes planes est considéré à travers le tableau n° 10.3.
- la conformation du panneau, nombre  $n$  de plis, épaisseur et orientation de chaque pli, permet de calculer les caractéristiques élastiques du panneau. (10.18), (10.19) et (10.20).

Les paragraphes suivants vont illustrer certaines particularités de comportement de panneaux stratifiés associées au nombre de plis et à certaines singularités de fabrication.

### 10.2.1. Les contreplaqués trois plis

Les contreplaqués équilibrés les plus simples, technologiquement acceptables sont les trois plis croisés 0, 90,0 degrés. En effet, à condition que les plis extérieurs soient à fils parallèles et de même épaisseur, les coefficients de couplages  $B_{ij}$ , donnés par la relation (10.20) sont nuls. Un bicouche à plis croisés ne peut être équilibré.

Dans ces conditions, il n'y a pas de couplage entre sollicitations de membrane ( $N_1, N_2, N_6$ ) et déformations de flexion-torsion ( $k_1, k_2, k_6$ ) et réciproquement.

Les caractéristiques élastiques de tels panneaux, calculées à partir du modèle développé ci-dessus, sont reportées dans le tableau n°10.5.

Dans ce tableau, les épaisseurs de chaque pli sont données comme une fraction de l'épaisseur totale  $h$  du panneau.

Tableau n°10.5 : Caractéristiques de contre plaqués trois plis

n° contreplaqué	1 rang (1; 2 ; 3)	2 rang (1; 2 ; 3)	3 rang (1; 2 ; 3)	4 rang (1; 2 ; 3)	5 rang (1; 2 ; 3)	6 rang (1; 2 ; 3)	7 rang (1; 2 ; 3)
$\varphi(p)$ degrés	0 ; 90 ; 0	0 ; 90 ; 0	0 ; 90 ; 0	0 ; 90 ; 0	0 ; 90 ; 0	0 ; 90 ; 0	0 ; 90 ; 5
e(p)/h	1/3 ; 1/3 , 1/3	1/4 ; 2/4 ; 1/4	1/5 ; 3/5 ; 1/5	1/6 ; 4/6 ; 1/6	1/3 ; 1/3 ; 1/3	10/31 ; 10/31 ; <b>11/31</b>	1/3 ; 1/3 ; 1/3
$\rho_0$ kgm <sup>-3</sup>	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	0,65;0,45;0,65	0,65;0,45;0,65	--; 0,65 ;--
nature F ou R	F ; F ; F	F ; F ; F	F ; F ; F	F ; F ; F	F ; R ; F	F ; F ; F	F ; F ; F
A11/h MPa	10100	7830	6480	5570	9960	10200	10030
A12/h	483	483	483	483	412	482	510
A16/h	0	0	0	0	0	0	350
A22/h	5570	7830	9190	10100	5100	5420	5580
A26/h	0	0	0	0	0	0	0
A66/h	971	971	971	971	895	971	998
B11/h <sup>2</sup> Mpa	0	0	0	0	0	70,6	-20,5
B12/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	0	9,06
B16/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	0	117
B22/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	-70,6	2,41
B26/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	0	14,1
B66/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	0	0	9,05
D11/h <sup>3</sup> Mpa	1170	1078	974	883	1175	1180	1170
D12/h <sup>3</sup>	40,2	40,2	40,2	40,2	39,6	40,2	45,8
D16/h <sup>3</sup>	0	0	0	0	0	0	42,2
D22/h <sup>3</sup>	129	228	331	422	124	126	130
D26/h <sup>3</sup>	0	0	0	0	0	0	5,09
D66/h <sup>3</sup>	80,9	80,9	80,9	80,9	80,2	80,9	84,2

Les caractéristiques sont réduites par des puissances de  $h$ , de telle sorte que les grandeurs soient exprimées dans la même unité, le MPa ( $10^6$  Pa).

$$A_{ij}/h \quad ; \quad B_{ij}/h^2 \quad ; \quad D_{ij}/h^3$$

### 10.2.1.1 Les Panneaux équilibrés

Les colonnes n°1 à 4 du tableau n°10.5 correspondent à des contreplaqués trois plis constitués d'une même essence, le feuillue « standard », de masse volumique  $\rho = 0,65 \text{ gr.cm}^{-3}$  supposés stabilisés à un taux d'humidité de 12%. Le rapport de l'épaisseur du pli médian à l'épaisseur des plis extérieurs varie d'un panneau à l'autre dans un rapport de 1 à 4.

On constate que les panneaux sont équilibrés car les  $B_{ij} = 0$  et que les axes  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  sont axes principaux :

- pour les rigidités de membrane, car  $A_{16} = A_{26} = 0$  ;
- pour les rigidités de flexion-torsion, car  $D_{16} = D_{26} = 0$ .

D'autre part, le rapport  $A_{11}/A_{22}$ , qui peut être pris comme indicateur de l'anisotropie des propriétés de membrane, est voisin de 1 dans le cas du contreplaqué n°2, pour lequel l'épaisseur de l'âme (pli médian) est double de celle des plis de parement (plis extérieurs)

Il convient de remarquer que l'anisotropie des propriétés de flexion-torsion, caractérisée par le rapport  $D_{11}/D_{22}$ , varie sensiblement de 2 à 10 dans les exemples discutés. Ceci illustre clairement l'influence prépondérante des plis extérieurs sur les rigidités de flexion-torsion.

La rigidité de cisaillement de membrane  $A_{66}$ , tout comme la rigidité de torsion  $D_{66}$ , pour des plis croisés à 90 degrés, sont indépendantes des épaisseurs relatives des plis et correspondent aux propriétés du matériau monocouche.

Le contreplaqué n°5 est géométriquement semblable au panneau n°1, il n'en diffère que par la nature résineuse du pli médian, ayant une masse volumique  $\rho = 0,45 \text{ gr.cm}^{-3}$  plus faible. Ce panneau en mélange d'essence (plis extérieurs de qualité, pli médian de second choix par exemple) illustre la faible part prise par le pli médian dans le comportement mécanique de l'élément structural, notamment en flexion-torsion.

10.2.1.2 Surépaisseur d'un pli extérieur, défaut de fabrication

Les deux derniers exemples doivent être considérés comme des illustrations de l'influence des incertitudes de la fabrication sur la qualité du produit fini.

Le contreplaqué n°6 est matériellement semblable au panneau n°1, il n'en diffère géométriquement que par une surépaisseur de 10% de l'un des plis extérieurs. Si les caractéristiques de membrane et de flexion-torsion ne sont que très faiblement affectées par ceci, en revanche, deux termes de couplage sont non nuls  $B_{11}$  et  $B_{22} \neq 0$ .

Sachant que les moyens de calcul usuels (Cahiers techniques du CTB par exemple) des contreplaqués ne permettent pas d'accéder aux termes de couplage, il convient de préciser de façon chiffrée leur influence dans le présent exemple.

Calcul d'un trois plis de 5 mm d'épaisseur avec défaut.

La loi de comportement d'un panneau de type n°6, d'épaisseur nominale  $h = 5$  mm, s'écrit en termes de rigidité, à partir du tableau n°10.5

**Remarque :** les termes de la matrice de rigidité (10.24) correspondent aux unités telles que les  $N_i$  sont exprimés en  $Nm^{-1}$ , les  $M_i$  en N, les  $\varepsilon_j^0$  sans dimension et les  $k_i$  en  $m^{-1}$ .

$$(10.24) \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 51,0 \cdot 10^6 & 2,41 \cdot 10^6 & 0 & 1,76 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 2,41 \cdot 10^6 & 27,1 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -1,76 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4,85 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 1,76 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 147 & 5,02 & 0 \\ 0 & -1,76 \cdot 10^3 & 0 & 5,02 & 15,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix}$$

$$(10.25) \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19,7 \cdot 10^{-9} & -1,76 \cdot 10^{-9} & 0 & -0,232 \cdot 10^{-6} & -0,123 \cdot 10^{-6} & 0 \\ -1,76 \cdot 10^{-9} & 37,3 \cdot 10^{-9} & 0 & -0,123 \cdot 10^{-6} & 4,210 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 206 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 \\ -0,232 \cdot 10^{-6} & -0,123 \cdot 10^{-6} & 0 & 6,88 \cdot 10^{-3} & -2,21 \cdot 10^{-3} & 0 \\ -0,123 \cdot 10^{-6} & 4,210 \cdot 10^{-6} & 0 & -2,21 \cdot 10^{-3} & 64,7 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 99 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix}$$

Les relations (10.25) donnent les souplesses du même panneau, obtenues par inversion de (10.24).

Afin d'illustrer l'influence des termes de couplage, considérons le panneau schématisé sur la figure n°10.2a de longueur  $L = 2,5$  m suivant l'axe  $\bar{x}_1$  et de largeur  $l = 1,5$  m suivant l'axe  $\bar{x}_2$  et supposons que ce panneau est soumis à une tension de membrane suivant les directions  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , telle que  $N_1 = N_2 = 50\,000 \text{ Nm}^{-1}$  ; cette valeur est de l'ordre de la charge de rupture en traction ( $\sigma_1 = \sigma_2 = 10 \text{ MPa} < \sigma_{\text{rupture}} \approx 30 \text{ MPa}$ ).

Dans ces conditions, suivant (10.25) il vient :

$$(10.26) \quad k_1 = - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -0,232 \cdot 10^{-6} N_1 - 0,123 \cdot 10^{-6} N_2 = -0,0177 \text{ m}^{-1}$$

$$(10.27) \quad k_2 = - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = -0,123 \cdot 10^{-6} N_2 + 4,210 \cdot 10^{-6} N_1 = +0,204 \text{ m}^{-1}$$

La surface déformée du plan moyen est en selle de cheval, admettant les rayons de courbures normales principales suivants (affectées de leur signe)

$$R_1 = \frac{1}{k_1} = -56,5 \text{ m} \quad ; \quad R_2 = \frac{1}{k_2} = +4,9 \text{ m}$$

Pour fixer les idées, ces courbures se traduisent par des flèches  $W_1$  et  $W_2$  au centre du panneau, calculées par rapport à des cordes AB et CD comme précisées sur les figures n°10.2b et 10.2c.

$$W_1 = 14 \text{ mm} \quad ; \quad W_2 = -57 \text{ mm}$$

En conclusion, une surépaisseur du pli supérieure de 10% fait que sous l'action d'un chargement de membrane isotrope  $N_1 = N_2$ , le plan moyen subit deux courbures anticlastiques en forme de selle de cheval comme illustré sur la figure n°10.3.

#### Calcul d'un trois plis de 12 mm d'épaisseur avec défaut.

Le calcul précédent est repris de façon analogue sur un contreplaqué trois plis en quadrature (0,90,0) d'épaisseur nominale  $h=12$  mm, avec une surépaisseur de 10% du pli supérieur. A partir du tableau n°10.5, il vient :

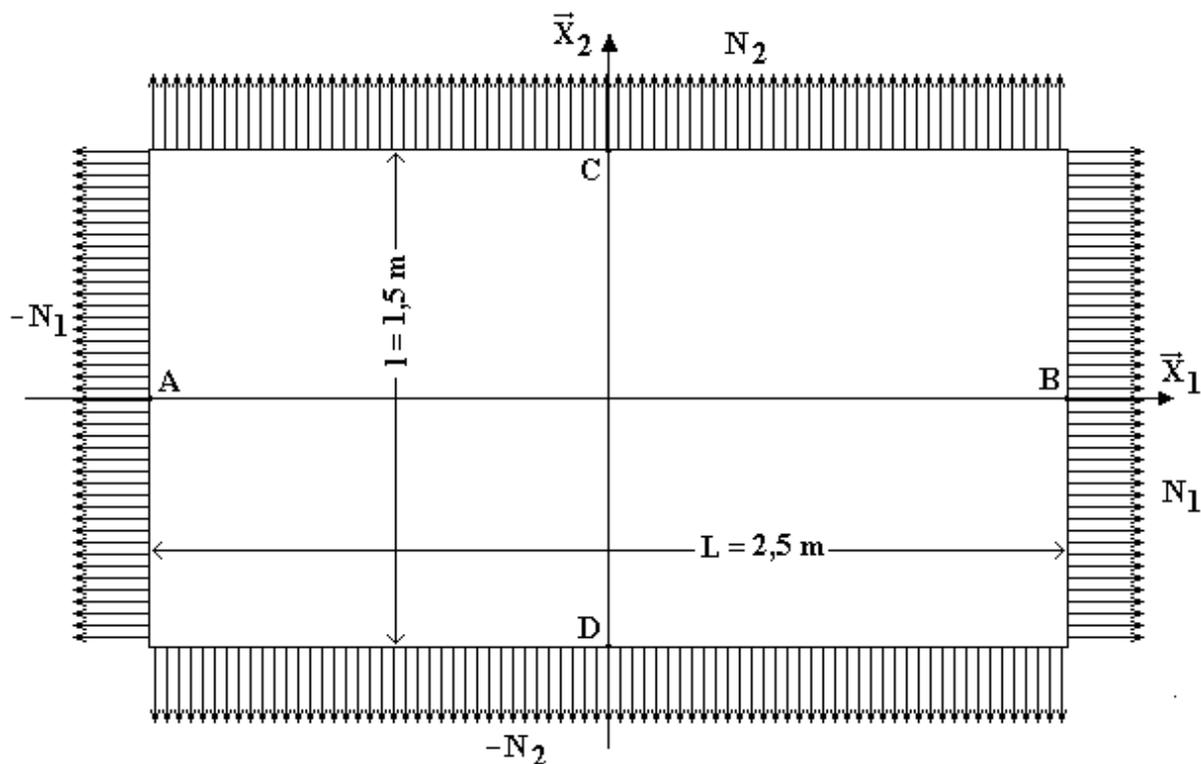


Figure n°10.2a : Panneau de contre plaqué trois plis avec une surépaisseur de pli extérieur de 10%, chargement plan de membrane  $N_1 = N_2 = 5\,000 \text{ Nm}^{-1}$

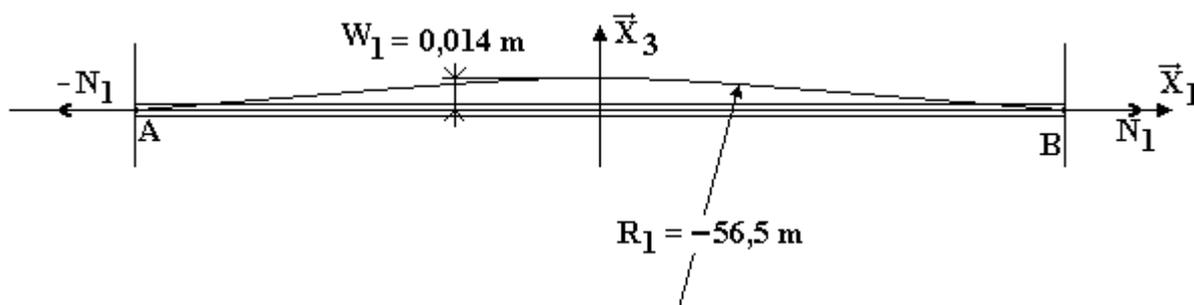


Figure n°10.2b : Déformée  $W(x_1, 0)$  par rapport à la corde AB

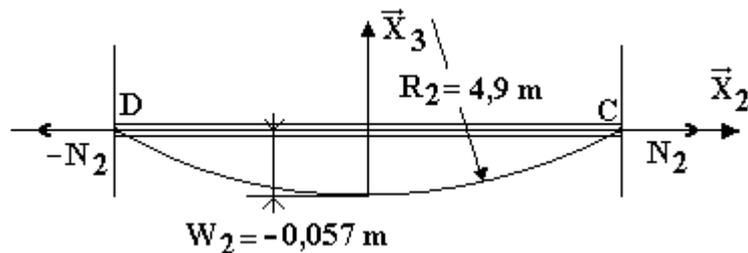


Figure n°10.2c : Déformée  $W(0, x_2)$  par rapport la corde CD

$$(10,28) \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 122 \cdot 10^6 & 5,78 \cdot 10^6 & 0 & 10,2 \cdot 10^3 & 0 & 0 \\ 5,78 \cdot 10^6 & 65 \cdot 10^6 & 0 & 0 & -10,2 \cdot 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 11,6 \cdot 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 10,2 \cdot 10^3 & 0 & 0 & 2030 & 69,5 & 0 \\ 0 & -10,2 \cdot 10^3 & 0 & 69,5 & 214 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 139 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix}$$

Après inversion de la matrice des rigidités, on obtient celle des souplesses.

(10.29)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,21 \cdot 10^{-9} & -0,733 \cdot 10^{-9} & 0 & -0,0405 \cdot 10^{-6} & -0,0219 \cdot 10^{-6} & 0 \\ -0,733 \cdot 10^{-9} & 15,6 \cdot 10^{-9} & 0 & -0,0219 \cdot 10^{-6} & 0,749 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 86,2 \cdot 10^{-9} & 0 & 0 & 0 \\ -0,0405 \cdot 10^{-6} & -0,0219 \cdot 10^{-6} & 0 & 0,498 \cdot 10^{-3} & -0,163 \cdot 10^{-3} & 0 \\ -0,0219 \cdot 10^{-6} & 0,749 \cdot 10^{-6} & 0 & 0,163 \cdot 10^{-3} & 4,76 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,19 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix}$$

Toujours pour un panneau de  $L = 2,5$  m et  $l = 1,5$  m, supposons le soumis à un effort de traction de membrane isotrope tel que  $N_1 = N_2 = 120\,000 \text{ Nm}^{-1}$ , ce qui correspond à une contrainte moyenne locale de traction  $\sigma_1 = \sigma_2 = 10 \text{ MPa}$ , du tiers de la contrainte de rupture, évaluée ici à  $\sigma_{\text{rupture}} = 30 \text{ MPa}$ . On note que le chargement est proportionnel à celui imposé au panneau précédent et dans le rapport des épaisseurs (12/5). Ceci permettra de comparer les deux situations.

Les courbures se calculent

$$(10.30) \quad k_1 = - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = -0,0405 \cdot 10^{-6} N_1 - 0,0219 \cdot 10^{-6} N_2 = -0,0075 \text{ m}^{-1}$$

$$(10.31) \quad k_2 = - \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = -0,218 \cdot 10^{-6} N_1 + 0,749 \cdot 10^{-6} N_2 = +0,0872 \text{ m}^{-1}$$

d'où l'on déduit les deux flèches :

$$W_1 = 5,8 \text{ mm} \quad ; \quad W_2 = 0,024 \text{ mm}$$

Ce second exemple est reporté pour pouvoir conclure de la façon suivante :

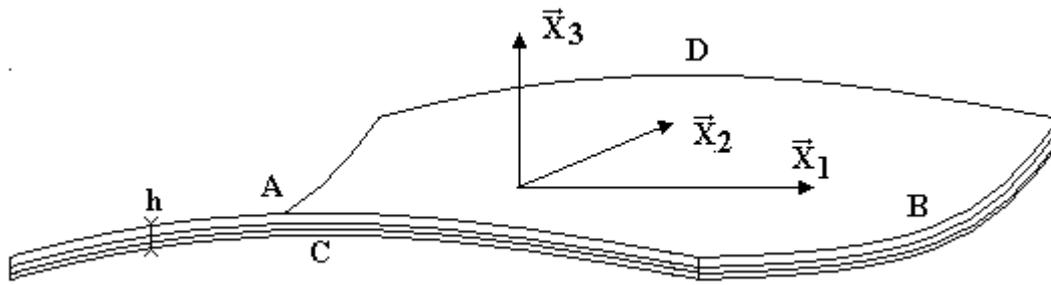


Figure n° 10.3 : Déformée d'un panneau plan déséquilibré par une surépaisseur du pli extérieur supérieur, lorsqu'il est soumis à une tension de membrane isotrope.

**Une surépaisseur d'un pli extérieur, d'un pourcentage donné de l'épaisseur nominale du pli, provoque un déséquilibre du panneau et donc des couplages membrane, flexion-torsion, dont les effets sont d'autant plus marqués, à chargement équivalent, que l'épaisseur nominale du contreplaqué trois plis est plus faible.**

En conclusion, l'élaboration de contre plaqués trois plis équilibrés, de haute qualité technologique, requiert le maximum de précautions de fabrication.

### 10.2.1.3 Défaut d'orientation d'un pli extérieur

Le panneau n°7, dont les caractéristiques sont indiquées sur le tableau n°10.5, est un panneau déséquilibré par défaut d'orientation du pli supérieur dont le fil fait un angle de 5 degrés par rapport au pli extérieur inférieur.

On constate, en premier lieu, que toutes les rigidités de couplage  $B_{ij}$  sont différentes de zéro, ce qui présage d'une déformée complexe, même dans des conditions de chargement simple.

De plus, les termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$  ainsi que  $D_{16}$  et  $D_{26}$  sont non nuls, ce qui signifie que les axes  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  ne sont plus directions principales, ni pour le comportement de membrane, ni pour le comportement de flexion-torsion.

Enfin, on note que la rigidité de cisaillement de membrane  $A_{66}$  et la rigidité de torsion  $D_{66}$  sont différentes et légèrement supérieures aux termes correspondants des panneaux de n°1 à n°6. Pour des angles de croisement de plis 0, 90 degrés, les rigidités pour le panneau sont les mêmes que celles des plis. Ici, le défaut angulaire a une incidence sur ces paramètres. Ce phénomène sera discuté en détail par la suite.

## 10.2.2 Les contreplaqués 5 plis et plus.

L'obtention de contreplaqués épais (allant jusqu'à 25 mm) est conditionnée par le déroulage de placages de qualité, dont les épaisseurs usuelles peuvent s'échelonner de 9 à 40/10 de mm. Le nombre des plis peut être de 5,7,9 etc., en nombre impair comme nous l'avons vu, pour assurer au mieux les conditions d'équilibrage.

Si le nombre de plis est pair alors, très généralement, le noyau du panneau (plis internes) comporte deux plis médians collés à fil parallèle.

Tableau n° 10.6 : Contreplaqués à 5 plis et plus.

n° contreplaqué	8 rang (1;2;3;4;5)	9 rang (1;2;3;4;5)	10 rang (1;2;3;4;5)	11 rang (1;2;3;4;5)	12 rang (1;2;3;4;5)	13 rang (1;2;3;4;5)
<b>Phi(p)</b>	0 ; 90; 0 ; 90;0	45;-45 ;0 ;-45 ;45	60;-60;0;-60;60	60;-60;0;-60;60	60;-60;0;-60;60	0;60;-60;0;-60;60;0
<b>e(p)/h</b>	1/5;1/5 ;1/5 ;1/5 ;1/5	1/5;1/5 ;1/5 ;1/5 ;1/5	1/5;1/5 ;1/5 ;1/5 ;1/5	1/6;1/6;2/6;1/6;1/6	10/61;10/61;20/61;10/61;11/61	1/8;1/8;1/8;2/8;1/8;1/8; 1/8
<b>Ro gr/cm3</b>	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--	--; 0,65 ;--
<b>nature F ou R</b>	-- ; F ; --	-- ; F ; --	-- ; F ; --	-- ; F ; --	-- ; F ; --	-- ; F ; --
A11/h MPa	9 190	7 030	4 850	6 480	6 410	8 520
A12/h	482	2 650	2 110	1 830	1 850	3 500
A16/h	0	0	0	0	29	0
A22/h	6 480	7 570	7 570	6 480	6 530	5120
A26/h	0	0	0	0	67,4	0
A66/h	971	3 130	2 590	2 320	2 330	1 980
B11/h <sup>2</sup> MPa	0	0	0	0	-32,8	0
B12/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	5,45	0
B16/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	14,2	0
B22/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	21,9	0
B26/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	33,1	0
B66/h <sup>2</sup>	0	0	0	0	5,45	0
D11/h <sup>3</sup> MPa	983	433	209	238	237	805
D12/h <sup>3</sup>	40,2	263	207	203	203	109
D16/h <sup>3</sup>	0	163	85	65	69,3	-28
D22/h <sup>3</sup>	322	425	761	741	742	363
D26/h <sup>3</sup>	0	163	197	152	161	-64
D66/h <sup>3</sup>	80,9	304	248	243	243	149

On imagine aisément le grand nombre de configurations d'assemblage envisageables. Quelques exemples de classes de contreplaqués à cinq plis et plus sont reportés sur le tableau n°10.6.

#### 10.2.2.1 Cinq plis équilibrés croisés à 90 degrés

La classe des panneaux n° 8 du tableau n°10.6 correspond à des cinq plis croisés à 90 degrés, iso-épaisseurs. L'examen des rigidités réduites reportées dans le tableau montre que :

- les panneaux sont équilibrés  $B_{ij} = 0$
- les directions principales des rigidités de membrane sont les mêmes que celles des rigidités de flexion-torsion ( $A_{16} = A_{26} = 0$  avec  $D_{16} = D_{26} = 0$ ) et sont confondues avec les axes  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  du panneau.
- Les rigidités de cisaillement de membrane  $A_{66}$  et de rigidité de torsion  $D_{66}$  sont identiques à celles des panneaux trois plis croisés à 90 degrés et égale à celle de chaque pli.

Une comparaison avec le tableau n°10.5 fait apparaître une analogie de comportement entre la classe n°8 et la classe n°3. En ne prenant en considération que les caractéristiques élastiques, le seul avantage du cinq plis croisé à 90 degrés est de permettre d'atteindre des épaisseurs totales de panneau plus importantes, compte tenu de la limitation technologique en épaisseur des monocouches de qualité technologique acceptable (technologie de déroulage).

Des conclusions analogues seraient tirées pour des classes de panneaux à 7, 9 plis et plus, croisés à 90 degrés.

#### 10.2.2.2 Cinq plis équilibrés à angles de croisement variés

Un avantage certain des moyens de calcul prévisionnel du comportement élastique des panneaux est de pouvoir analyser les propriétés des produits au niveau de la conception.

Les classes des panneaux envisagées ici correspondent à des angles de croisement des plis différents de 90 degrés.

Le lecteur prendra garde au fait que les axes  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  qui définissent le référentiel du panneau ne sont plus choisis, comme cela est l'usage, en référence à l'orientation du pli de parement supérieur (pli extérieur visible). Ils correspondent, dans les exemples donnés dans le tableau n°10.6, à l'orientation du plan médian.

Les classes de panneaux n°9 et 10 correspondent à des empilements équilibrés de plis orientés, par rapport au plan médian, suivant des angles respectivement de  $\pm 45$  degrés et de  $\pm 60$  degrés.

La classe n°11 est de même nature avec un pli médian d'épaisseur double.

La classe n°13 est un sept plis.

Pour toutes ces classes :

- les panneaux sont équilibrés  $B_{ij} = 0$ .
- les orientations ont été disposées de telle sorte que  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  coïncident avec des directions principales pour les rigidités de membrane  $A_{16} = A_{26} = 0$ .
- ces directions ne sont plus principales pour les rigidités de flexion-torsion  $D_{16} \neq 0$  et  $D_{26} \neq 0$ .
- la remarque la plus importante est que la rigidité de cisaillement de membrane  $A_{66}$ , ainsi que la rigidité de torsion  $D_{66}$  sont considérablement augmentées par rapport aux contreplaqués croisés à 90 degrés (multiplication par 3).
- la classe n°12 diffère de la classe n°11 par une surépaisseur de 10% de l'un des plis de parement ; ce défaut de fabrication simulé montre que tous les termes de couplages  $B_{ij}$  sont alors différents de zéro.

En conclusion de ce paragraphe, on retiendra la possibilité d'accroître la rigidité de cisaillement de membrane  $A_{66}$  et la rigidité de torsion  $D_{66}$  en choisissant des angles de croisement des plis différents de 90 degrés, tout en assurant un empilement équilibré. De tels panneaux assurent en particulier une meilleure tenue au contreventement lorsqu'ils sont utilisés comme éléments porteurs d'une structure.

On remarquera que cet effet de raidissement au cisaillement est réalisé par la classe n°9 qui peut être considérée comme un 5 plis croisés à 90 degrés, exception faite du pli médian (cf. tableau n°10.3).

Il est clair que la fabrication de tels panneaux entraîne des chutes importantes : il ne peut s'agir que de panneaux spéciaux à utilisation bien ciblée.

### **10.2.3 Conclusion sur l'élasticité des contreplaqués.**

Ce début de chapitre a essentiellement porté sur un rappel des moyens nécessaires pour décrire de façon satisfaisante le comportement élastique des contreplaqués.

L'introduction du calcul prévisionnel, prenant en compte les sollicitations de membrane, de flexion–torsion, ainsi que les termes de couplage dans le cas de panneaux non équilibrés, a permis de discuter certaines spécificités élastiques des panneaux.

Aucun des aspects de comportement des multicouches aux états limites, voisins des charges de rupture, n'a été évoqué ici.

Une importante question demeure, celle de la pertinence de ces calculs prévisionnels.

La fin de ce chapitre apporte la validation expérimentale des calculs prévisionnels élastiques.

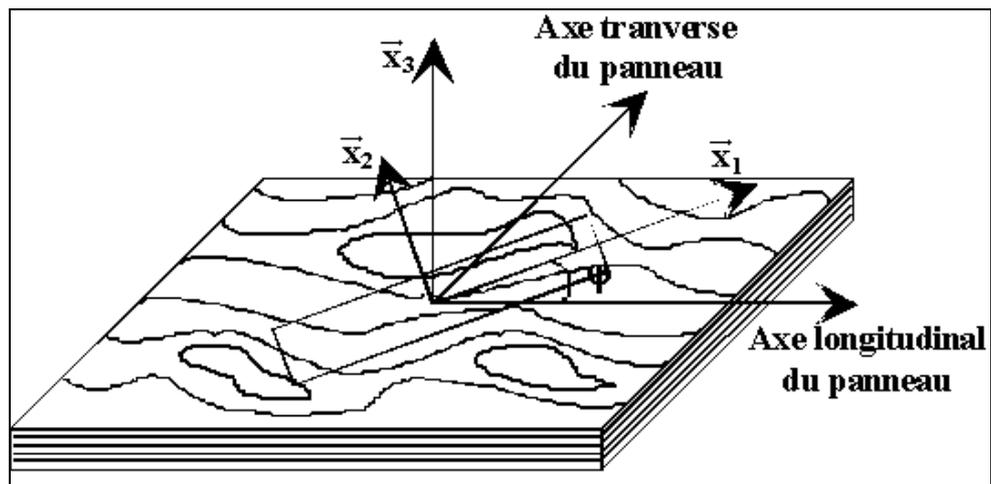


Figure n° 10.4. Définition de la direction de prélèvement  $\varphi$  des éprouvettes dans les panneaux.

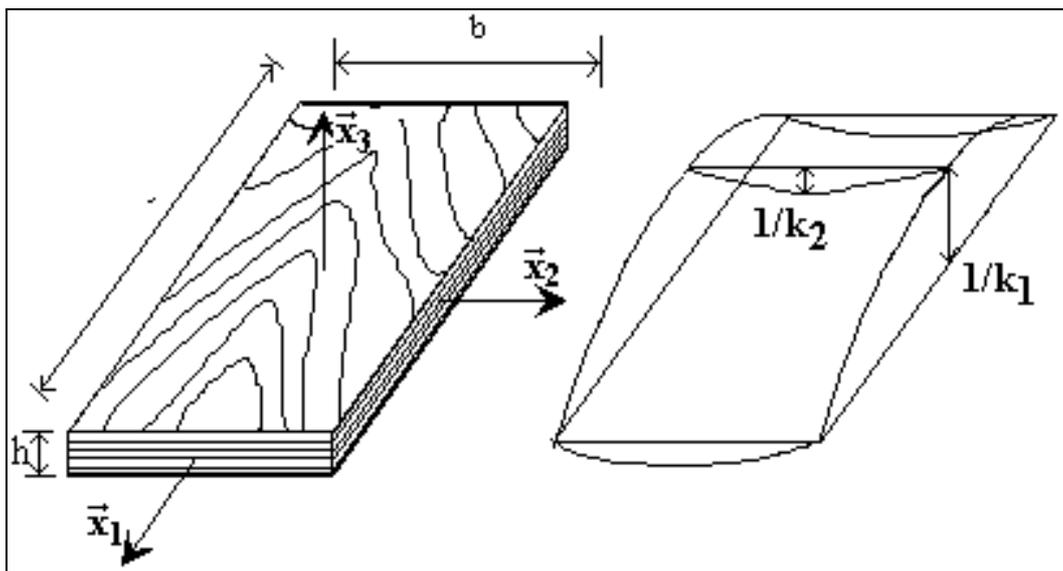


Figure n° 10.5 : Epreuve sollicitée en flexion pure par un moment  $M_1$  qui induit au premier ordre une courbure  $k_1$  et au second ordre une courbure anticlastique  $k_2$  ( déformée en selle de cheval)

### 10.3. VALIDATION EXPERIMENTALE D'UN OUTIL D CONCEPTION DES CONTREPLAQUES

Il s'agit ici de montrer, sur un exemple concret, que les modèles de comportement élastique des bois massifs standards « feuillus » ou « résineux », injectés dans les modèles de calcul prévisionnel des stratifiés donnent des estimations efficaces des rigidités de flexion-torsion des contreplaqués. La validation expérimentale implique une expérimentation soignée.

#### 10.3.1. Un contreplaqué test : Okoumé, équilibré, sept plis

Le matériau choisi pour illustrer la démonstration est un contreplaqué tout Okoumé. Il s'agit d'un feuillu tropical, traditionnellement mis en œuvre dans la confection de panneaux de contreplaqués. La rectitude du fil, sa faible nodosité, sa grande aptitude au déroulage et les qualités esthétiques des plis sont, parmi d'autres, les caractéristiques qui justifient son emploi en ce domaine et en font l'une des essences de référence.

Le contreplaqué est équilibré, à 7 plis, iso-épaisseur, croisés selon la séquence 0/90/0/.../0, brut de fabrication (sans ponçage, ni traitement des faces de parement). Les panneaux ont été élaborés par le Centre de Recherche de ROL TECH, en dimensions de production 2,50 x 1,20 m<sup>2</sup>.

L'épaisseur de déroulage des plis est de 21/10<sup>ème</sup> de mm. La colle utilisée est un phénol-formol, dosée à 200g par m<sup>2</sup> d'interface. La polymérisation à chaud (140°C), réalisée sous pression (1,4 MPa), conduit à un produit final de 14 mm d'épaisseur, de masse volumique  $\rho = 0,44 \text{ kg.m}^{-3}$ , pour un taux d'humidité voisin de H = 11 %.

La caractérisation mécanique des panneaux est conduite dans le cadre des hypothèses de la théorie classique des plaques minces stratifiées élastiques équilibrées (Chapitre 9), en se limitant à l'évaluation des souplesses de flexion-torsion,  $d_{ij}$ , qui permettent d'exprimer linéairement des déplacements généralisés  $k_i$  en fonction des efforts linéiques généralisés associés  $M_j$ .

$$(10.32) \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{26} \\ d_{61} & d_{62} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix}$$

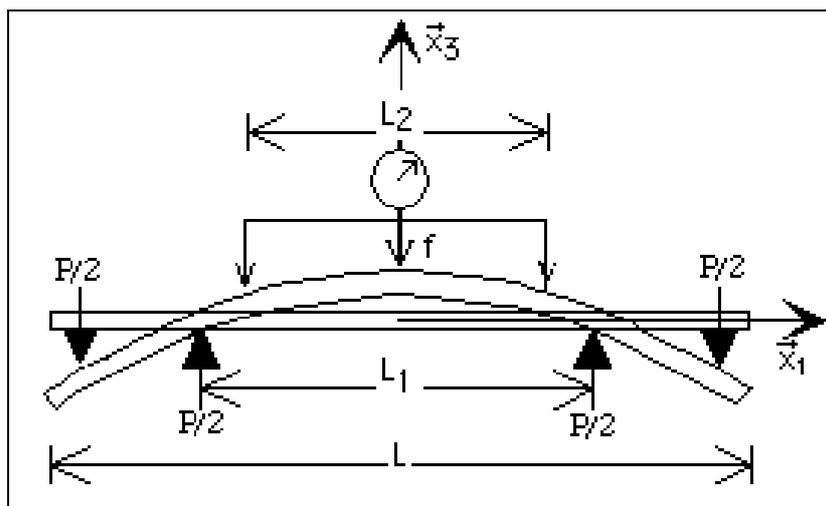


Figure n° 10.6 Schéma de l'essai de flexion quatre points (4 appuis)

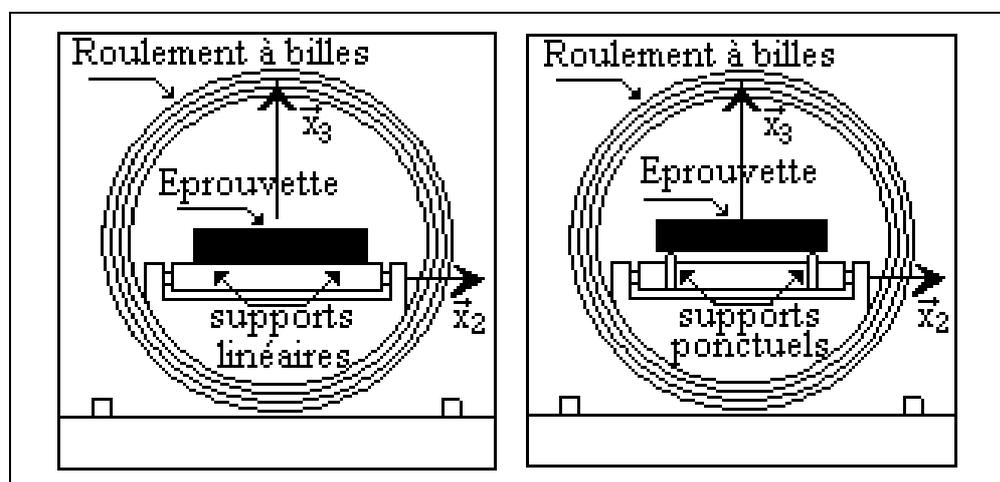


Figure n° 10.7 Appuis libres en rotation autour de l'axe  $\vec{x}_1$ , avec supports ponctuels pour le dispositifs BOGUI.

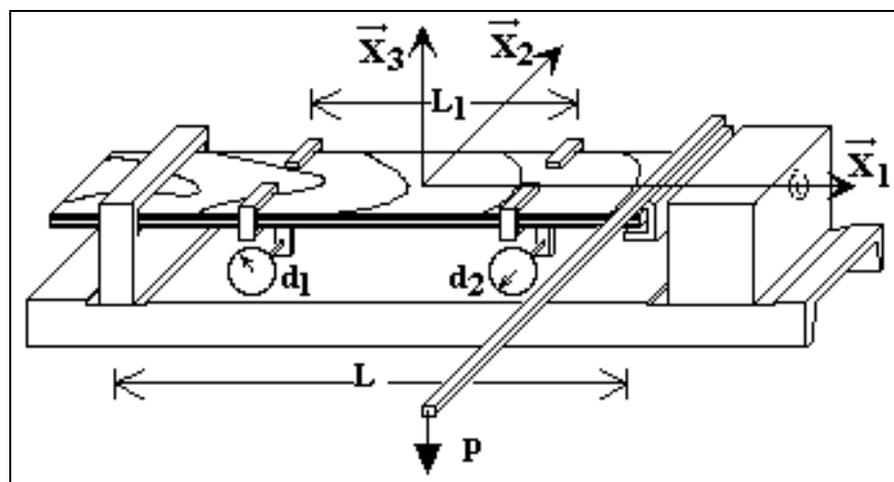


Figure n° 10.8. Machine de torsion GOBOGUI

En se limitant aux *panneaux équilibrés*, il est licite de réduire la loi de comportement (10.17) à la forme simple (10.32). En effet, les couplages entre états mécaniques de membrane et de flexion-torsion n'existent pas dans ce cas particulier.

Les axes de référence de l'éprouvette sont précises sur la figure 10.4.  $k_1$  et  $k_2$  représentent respectivement les courbures des lignes de coordonnées  $x_1$  et  $x_2$ , tandis que  $k_6$  correspond à la torsion de l'éprouvette.

$M_1$  et  $M_2$  sont les moments linéiques de flexion agissant respectivement sur des coupures élémentaires d'orientation  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$ , tandis que  $M_6$  représente le moment linéique de torsion.

Remarque : Les souplesses de flexion-torsion  $d_{ij}$ , définies en (10.17) sont fonctions de l'épaisseur  $h$  du panneau.

En vue d'une comparaison des différentes évaluations, les souplesses sont exprimées en terme de grandeurs techniques assimilables à des modules d'élasticité équivalents définis par la relation (10.33) :

$$(10.33) \quad E_{ij} = \frac{12}{h^3 d_{ij}}$$

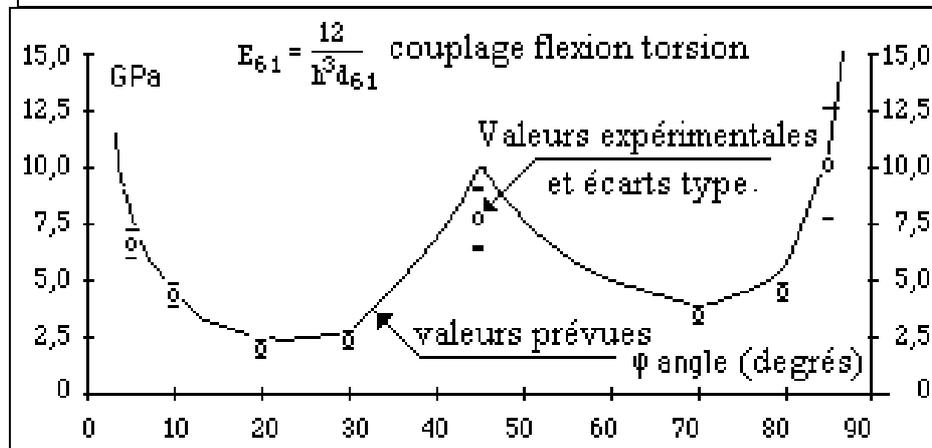
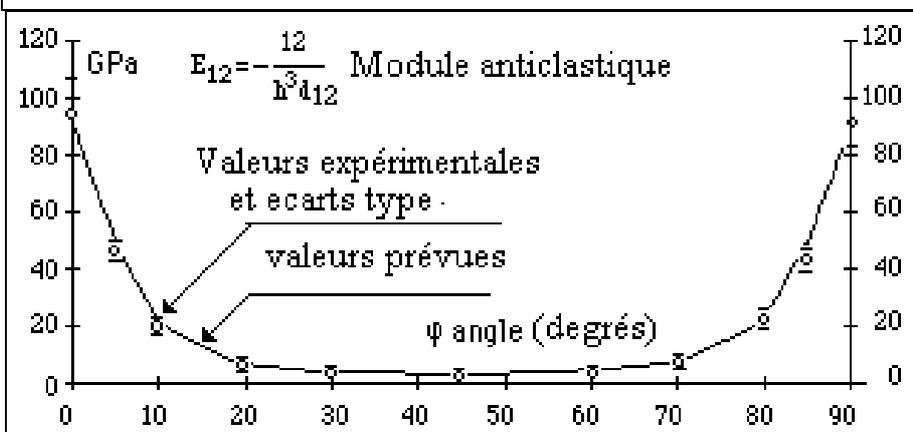
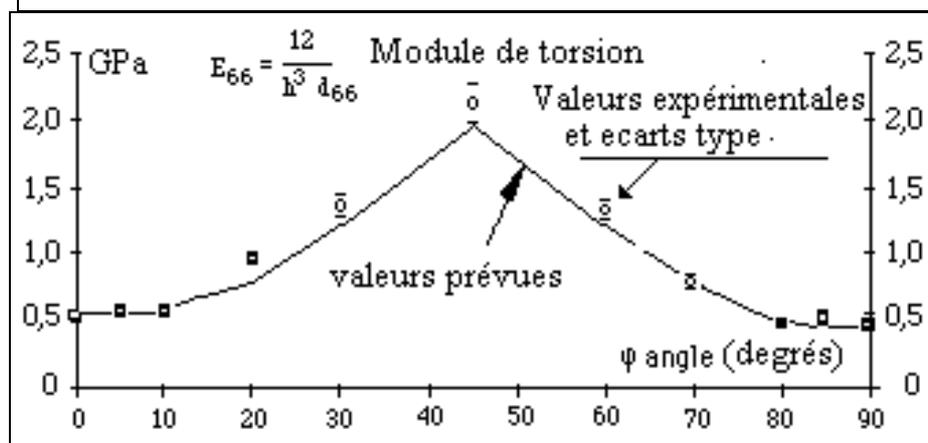
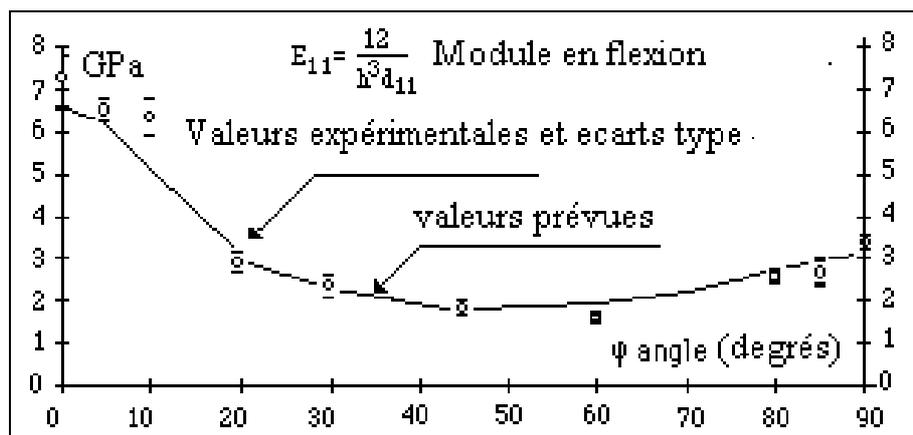
Les éprouvettes sont débitées dans deux panneaux aux dimensions ( $L*b*h$ ) suivantes :  $500*100*14 \text{ mm}^3$ . Leurs orientations dans le panneau sont caractérisées par l'angle  $\varphi$ , référencé entre l'axe longitudinal du panneau<sup>1</sup> et le grand axe  $\bar{x}_1$  de l'éprouvette (figure 10.4). Les 11 angles de prélèvement retenus sont : 0, 5, 10, 20, 30, 45, 60, 70, 80, 85 et 90°. L'échantillonnage comporte cinq éprouvettes pour chaque orientation.

### 10.3.2. Moyens expérimentaux originaux

Les dispositifs expérimentaux de flexion et de torsion utilisés ont été spécialement réalisés en vue de la qualification de plaques orthotropes. Leurs particularités résident dans la nature des appuis, constitués de doublets ponctuels, et les degrés de liberté de rotation qui leur sont laissés.

---

<sup>1</sup> Le sens longitudinal d'un panneau est traditionnellement donné par l'axe du fil des plis de parement.



## 10.3.2.1. Essai de flexion (BOGUI)

Le bâti de flexion possède 4 appuis, libres en rotation autour du grand axe  $\bar{x}_1$  de l'éprouvette (figure n° 10.7). Ce degré de liberté des appuis, semblable à celui des appuis définis dans La norme ASTM D 3043 méthode B, ASTM 1993, permet de libérer un éventuel couplage de torsion parasite,  $k_6$ , induit lors de la sollicitation en flexion d'éprouvettes hors axes. Aux appuis linéiques, prescrits dans l'ASTM, ont été substitués des doublets d'appuis ponctuels laissant s'exprimer librement la courbure anticlastique  $k_2$  (figure n° 10.7).

Ces dispositions expérimentales permettent d'appliquer, dans la zone centrale de l'éprouvette, une sollicitation de flexion pure (i.e.  $M_2 = M_6 = 0$ ), correspondant au moment fléchissant  $M_1$ . Les mesures effectuées concernent les courbures principale  $k_1$  et anticlastique  $k_2$ , ainsi que la torsion  $k_6$ .

Pour une éprouvette, prélevée suivant un angle  $\varphi$ , les souplesses  $d_{ii}^{(\varphi)}$  définies en (10.32) et déduites de (10.17) sont alors calculées.

$$(10.34) \quad d_{ii}^{(\varphi)} = k_i / M_1 \quad \text{avec } i = 1, 2, 6$$

Remarque : Dans de telles conditions de mise en charge, l'effet Poisson engendre une courbure anticlastique  $k_2$ , toujours de signe opposé à la courbure principale  $k_1$ . En conséquence, la souplesse  $d_{21}$  est une grandeur négative qui représente une mesure de la courbure anticlastique  $k_2$  résultant de l'application d'un moment fléchissant  $M_1$  de valeur unité.

On prendra garde au fait que les résultats figurant dans la suite du document sont exprimés en valeur absolue.

## 10.3.2.2. Essai de torsion (GOBOGUI)

Le dispositif de torsion utilisé possède également des appuis ponctuels. Il permet d'appliquer un moment de torsion pure  $M_6$  (figure n° 10.8). La souplesse de torsion  $d_{66}^{(\varphi)}$  définie en (10.27) se déduit de la mesure de la torsion résultante  $k_6$ .

$$(10.34) \quad d_{66}^{(\varphi)} = k_6 / M_6$$

**Tableaux :**

Okumé	$E_R$	$E_T$	$E_L$	$\frac{E_T}{\nu_{TR}} = \frac{E_R}{\nu_{RT}}$	$\frac{E_L}{\nu_{LT}} = \frac{E_T}{\nu_{TL}}$	$\frac{E_R}{\nu_{RL}} = \frac{E_L}{\nu_{LR}}$	$G_{LT}$	$G_{LR}$	$G_{RT}$
$\rho = 0,44$ $\text{g.cm}^{-3}$	1090	520	9630	1550	20390	26120	590	810	190
$\rho = 0,41$ $\text{g.cm}^{-3}$	990	460	8960	1400	18880	24500	540	750	160

Tableau 10.7 : Prévisions du comportement tridimensionnel élastique d'un Okoumé massif en fonction de sa masse volumique  $\rho$ , estimée à une humidité  $H=11\%$ , à partir du modèle feuillus standard.

	Souplesses de flexion-torsion $10^{-6} (\text{mN})^{-1}$				Modules élastiques équivalents MPa			
	$d_{11}$	$d_{22}$	$d_{21}$	$d_{66}$	$E_{11}$	$E_{22}$	$E_{21}$	$E_{66}$
Valeurs expérimentales	603,2	1325	46,70	7951	7250	3300	93650	550
Simulations $\rho = 0,44 \text{ g.cm}^{-3}$	604,9	1702	47,94	7169	7130	2570	91230	610
Simulations $\rho = 0,41 \text{ g.cm}^{-3}$	662,6	1362	49,59	7672	6600	3210	88180	570

Tableau 10.8 : Caractéristiques élastiques de flexion-torsion d'un contreplaqué équilibré tout Okoumé à 11% d'humidité. Valeurs expérimentales et calculs prévisionnels.

### 10.3.3. Pertinence de la modélisation

L'estimation des propriétés élastiques du bois constitutif des plis est réalisée à partir de deux évaluations de la masse volumique de l'Okoumé utilisé.

Une première approximation consiste à retenir pour masse volumique du bois, celle du matériau élaboré :  $\rho = 0,44 \text{ g.cm}^{-3}$  (mesurée à 11% d'humidité).

Une seconde approche consiste à corriger la masse volumique du contreplaqué en tenant compte de la colle. Cette correction est réalisée à partir des données du centre de recherche ROL TECH, qui estime la quantité de matière sèche apportée par la colle à  $33 \text{ kg.m}^{-3}$ . On obtient ainsi  $\rho_c = 0,41 \text{ kg.m}^{-3}$ .

On notera que les deux estimations de la masse volumique considérées ci dessus sont supérieures à la moyenne avancée dans la littérature  $\rho_{lu} = 0,33 \text{ kg.m}^{-3}$  (WOOD HANDBOOK 1987).

Une part de cet écart est imputable à la densification du matériau, résultant du processus de fabrication (pressage à chaud), qui entraîne une rigidification du matériau. Celle-ci est de fait prise en compte dans les simulations puisque l'indicateur des propriétés élastiques retenu est une masse volumique apparemment majorée.

Les caractéristiques élastiques, obtenues pour l'Okoumé massif à partir du modèle feuillus standard, corrigées en masse volumique et en humidité conformément à (5) et (6) sont portées dans le tableau I.