

CHAPITRE 2

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DU COMPORTEMENT MÉCANIQUE DU MATÉRIAU BOIS

Le but de ce chapitre est de montrer la diversité des paramètres mécaniques et physiques dont il convient de tenir compte pour aborder la description quantitative du comportement mécanique du matériau bois. L'objectif de la rhéologie du bois est de définir et d'évaluer pratiquement les caractéristiques mécaniques intrinsèques du matériau considéré, permettant de relier l'état de déformation et l'état de contrainte de la pièce considérée.

L'un des objectifs visés dans cet ouvrage étant de sensibiliser un auditoire non nécessairement spécialiste des concepts pointus de la mécanique des milieux déformables, nous rappelons dans les premiers paragraphes de ce chapitre des notions essentielles de la mécanique des milieux continus. Pour approfondir les bases rudimentaires, évoquées ci-dessous, le lecteur se reportera valablement à la bibliographie indiquée en annexe.

2.1. ÉTAT MECANIQUE D'UN SOLIDE DEFORMABLE

Soumis à des sollicitations mécaniques ou physiques, les corps solides, initialement en équilibre, sont très généralement susceptibles de modifications de forme. Par cette accommodation géométrique, la structure oppose, à la sollicitation externe, une réaction qui permet une stabilisation vers un nouvel état d'équilibre contraint.

2.1.1 Notions de cinématique: Déplacements et déformations

La notion de déplacement implique toujours l'idée d'une comparaison entre une situation prise comme référence (*configuration initiale*) et une situation finale (*configuration actuelle*). Entre ces deux états, arbitrairement privilégiés, il existe une infinité de situations intermédiaires (*configurations intermédiaires*).

2.1.1.1 Configurations.

Une *configuration actuelle* géométrique K consiste en la donnée, à un instant t , de l'ensemble des vecteurs positions $\vec{x}(P)$ de toutes les particules de matière constituant le solide considéré. Chaque particule occupe un volume élémentaire dv .

La *configuration initiale* de référence K_0 est identifiée à l'instant t_0 , par la donnée des vecteurs positions $\vec{\zeta}(P_0)$ de toutes les particules de matière. On notera sur la figure n°2.1, que les points de l'espace notés P_0 et P représentent les positions de la même particule de matière considérée respectivement dans la configuration de référence K_0 et dans la configuration actuelle K .

Les notions de déplacements et de déformations résultent de la comparaison de la configuration actuelle, à la configuration de référence.

2.1.1.2 Champ de déplacements.

La transformation mécanique que subit le volume de matière peut être caractérisée par le champ des *vecteurs déplacements* $\vec{U}(P)$ qui donne la configuration actuelle à partir de la configuration initiale.

$$(2.1) \quad \vec{x}(P) = \vec{\zeta}(P_0) + \vec{U}(P)$$

Cette décomposition est illustrée par la figure n°2.1. L'observateur dispose de certains indices d'évaluation du champ de déplacement. Il peut, en effet, contrôler les changements de position de certains points matériels apparents de la structure.

Notons que d'une façon générale les déplacements des points internes du solide ne peuvent être directement évalués. La notion simple de champ de déplacement présente déjà, pour l'expérimentateur, des zones d'ombre non négligeables.

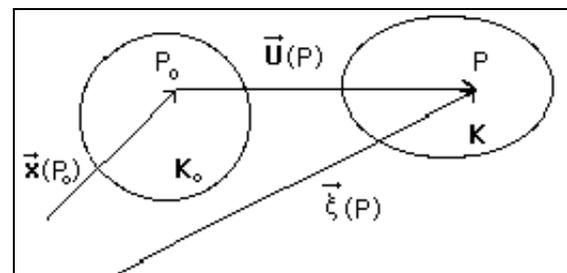


Figure n°2.1: Passage de K_0 à K par le déplacement $\vec{U}(P)$.

Admettons, pour introduire les notions de déformations, que ce champ de déplacement soit connu en tout point P .

$\vec{U}(P)$ est considéré dans les paragraphes qui suivent comme une donnée.

2.1.1.3 Notions de déformations

Un solide sera dit déformé, au cours de la transformation:

- si la distance géométrique entre deux particules voisines, P et Q , a été modifiée, on parlera d'*élongation* (ou de retrait).
- si l'angle que formaient trois particules voisines M , P et Q a été modifié, on parlera de *cisaillement* angulaire.

2.1.1.3.1 Déplacement de corps solide

Toutes les transformations mécaniques ne conduisent pas à une situation induisant des déformations. Il s'agit alors de *déplacements de corps solide*. De telles transformations sont entièrement définies par la donnée, en un point O_0 :

- du vecteur déplacement $\vec{U}(O_0)$ de ce point,
- du vecteur rotation $\vec{\Omega}(O_0)$, en ce point.

Le champ de déplacement de corps solide ainsi défini est donné par :

$$(2.2) \quad \vec{U}(O) = \vec{U}(O_0) + \vec{\Omega}(O_0) \wedge \vec{O_0O}$$

Ce champ de déplacement conserve les distances et les angles entre les particules de la structure et donc, n'occasionne pas de déformations.

2.1.1.3.2. Tenseur des déformations. (Elongation et cisaillement)

Considérons trois particules de matières P_0, M_0 et Q_0 , supposées voisines dans K_0 , comme schématisé sur la figure n°2.2. Elles restent voisines dans K . L'objet premier des notions de déformations est de se doter d'un outil permettant de répondre aux deux questions suivantes.

Question n°1: Quelle est la nouvelle distance l , entre deux particules de matière initialement distantes de l_0 ?

Question n°2: Quelle est la nouvelle valeur θ , de l'angle θ_0 que définissaient les trois particules voisines dans la configuration initiale?

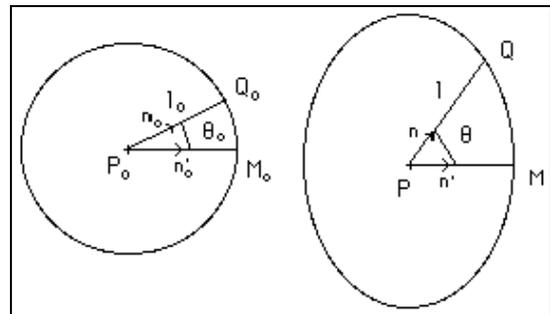


Figure n°2.2: Déformation du voisinage de P

La réponse à ces deux questions relève de la cinématique des milieux déformables. Le propos n'est pas, ici, d'apporter les démonstrations de ce domaine de la mécanique du solide, pour lesquelles, nous renvoyons le lecteur à des ouvrages spécialisés. (Duc et Bellet 1977, Laroze 1984-87, Lemaitre et Chaboche 1983, Germain 1986,...).

On se limitera à en illustrer l'utilisation sur des exemples simples

Tenseur des déformations linéarisé.

Le *tenseur des déformations linéarisé* est, par définition, la partie symétrique du *gradient de déplacement*. Une base de l'espace étant choisie, les composantes ε_{ij} du tenseur des déformations s'expriment à partir des dérivées

partielles des composantes $U_i(x_1, x_2, x_3)$ du déplacement, par rapport aux variables d'espace x_j .

Définitions des composantes du tenseur des déformations:

$$(2.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad \text{avec } i \text{ et } j \in (1,2,3)$$

elles sont présentées dans un tableau [3x3] dit matrice associée au tenseur, ε .

Dans l'hypothèse de petites déformations, on démontre que les réponses aux deux questions, ci-dessus, sont données dès que l'on connaît une grandeur dérivée du champ de déplacement, le tenseur des déformations linéarisé, noté

$$\Rightarrow \varepsilon(\mathbf{P}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial U_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial U_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Réponse à la question n°1:

La variation relative de la distance entre deux particules P_0 et Q_0 , situées initialement sur l'axe défini par le vecteur unitaire \vec{n}_0 et distantes de l_0 , est donnée par la grandeur scalaire suivante :

$$(2.4) \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \sum_{i \in j=1}^3 \varepsilon_{ij} n_i n_j = \varepsilon_{ij} n_i n_j$$

La dernière expression, dans laquelle est omis le symbole de sommation Σ , implique la sommation sur i et $j \in (1,2,3)$.

Les n_j sont les composantes du vecteur \vec{n}_0 .

Dans la suite, un indice (i ou j) répété deux fois dans le même monôme, implique la sommation de tous les termes, i et j prenant leurs valeurs de 1 à 3.

Exemple n°1: Considérons le cas particulier suivant. (figure n°2.2)

Soient P_0 et Q_0 positionnés suivant une direction $\vec{n}_0(1,0,0)$. Le calcul, d'après (2.4), conduit à une variation relative de longueur :

$$(2.5) \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon_{ij} n_i n_j = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{11}$$

En effet, l'opération définie en (2.4) se traduit par le double produit matriciel ci-dessus.

Remarque: Exprimées dans une base particulière, les composantes diagonales de la matrice associée au tenseur des déformations, représentent les variations relatives de distance, entre particules voisines positionnées suivant les trois directions du référentiel choisi.

Réponse à la question n°2:

La demi variation $\Delta\theta/2$ de l'angle θ_0 , défini par les trois particules P_0 , Q_0 et M_0 , se déduit des vecteurs unitaires \vec{n}_0 et \vec{n}'_0 , par le calcul suivant:

$$(2.6) \quad \frac{\Delta\theta}{2} = \sum_{i \in j=1}^3 \varepsilon_{ij} n_i n'_j = \varepsilon_{ij} n_i n'_j$$

La dernière expression, dans laquelle est omis le symbole de sommation Σ , implique sommation sur i et $j \in (1,2,3)$

- les n_i sont les composantes du vecteur \vec{n}_0
- les n'_i sont les composantes du vecteur \vec{n}'_0

Exemple n°2: Considérons le cas particulier suivant. (Figure n°2.2), soient P_0 et Q_0 positionnés suivant une direction $\vec{n}_0(1,0,0)$ et P_0 et M_0 positionnés suivant une direction $\vec{n}'_0(0,1,0)$

Le calcul, d'après (2.6), conduit à une variation angulaire de cisaillement:

$$(2.7) \quad \frac{\Delta\theta}{2} = \varepsilon_{ij} n_i n'_j = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \varepsilon_{12}$$

L'opération définie en (2.6) se traduit par le double produit matriciel ci-dessus.

Remarque: Exprimées dans une base particulière, les composantes non-diagonales de la matrice, associée au tenseur des déformations, représentent les demi variations angulaires (cisaillements), des angles droits, définis par les vecteurs de la base orthonormée dans la configuration initiale.

2.1.1.4 Compatibilité cinématique des déformations.

2.1.1.4.1. Passage au champ de déformation.

Du point de vue mathématique, la transformation cinématique que subit un solide déformable, est déterminée par la donnée des trois composantes $U_i(x_j)$ du vecteur déplacement $\vec{U}(P)$. Dans le cas où la transformation se développerait sans apparition de fissure ou de fente, ce sont trois fonctions continues et dérivables des variables d'espace x_i . Dans ces conditions, il est toujours possible, en appliquant les définitions rappelées en (2.3), de déterminer par dérivation les six composantes ε_{ij} , linéairement indépendantes, du tenseur des déformations $\vec{\varepsilon}$.

2.1.1.4.2. Equations de compatibilité cinématique

Le problème ici posé est inverse du précédent, il se formule de la façon suivante : Etant données six fonctions $\phi_{ij}(x_k)$, des variables d'espace, à quelles conditions ces fonctions représentent-elles un champ de déformation ?

Il faut que le système d'équations aux dérivées partielles suivant soit intégrable, de telle sorte que les composantes du champ de déplacement $U_i(x_j)$ puissent être déterminées.

$$(2.8) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \phi_{ij}(x_k)$$

On démontre que les conditions d'intégrabilité du système (2.8) constituent un système de six équations aux dérivées partielles du second ordre des composantes ε_{ij} . Ce sont les *équations de compatibilité cinématique* d'un champ de déformation donné.

$$(2.9) \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}$$

Dans le cas particulier du bois, il sera montré comment la prise en considération du caractère orthotrope cylindrique du matériau donne aux équations de compatibilité cinématique une forme mathématique très particulière du fait de l'utilisation des coordonnées cylindriques.

2.1.1.5 Conclusions sur la cinématique

Décrire les déplacements et l'état de déformation d'une structure implique d'analyser la transformation mécanique qui fait passer d'une configuration initiale, prise comme état de référence, à une configuration actuelle, prise comme état final.

Le champ de déformation est caractérisé, en tout point de la structure, par le tenseur des déformations. Lorsque le champ de déplacement est connu, le champ de déformation s'en déduit par les relations de définition (2.3).

Pour l'essentiel, le tenseur des déformations permet de calculer :

- l'élongation entre deux particules par la relation (2.4).
- le cisaillement angulaire entre deux directions par la relation (2.6).

Les exemples n°1 et n°2 donnent une interprétation physique aux composantes de la matrice associée au tenseur des déformations, lorsqu'une base a été choisie :

- les termes diagonaux de la matrice représentent les variations relatives de longueur (élongations) dans les directions des axes du repère.
- les termes non diagonaux de la matrice représentent les demi variations des angles initialement droits, que définissent les vecteurs de base dans la configuration initiale.

Ces règles élémentaires simples sont indispensables, pour mettre en œuvre correctement des moyens expérimentaux de mesure des déformations (extensométrie), et pour en interpréter les résultats.

2.1.2. Champ de contrainte

Les concepts relatifs aux efforts mécaniques agissant sur une structure sont beaucoup plus abstraits que ceux relatifs aux notions cinématiques développées dans les paragraphes qui précèdent, car non observables directement.

2.1.2.1 Efforts extérieurs

Pour des raisons de clarté ultérieure, Il est nécessaire de rappeler les définitions de quelques notions.

Notion de *force de surface*. Pour décrire un effort extérieur, appliqué sur une zone du contour d'un solide, nous admettons qu'il est caractérisé par une grandeur vectorielle \vec{F} . La force \vec{F} est définie par une intensité F agissant, suivant un axe orienté, sur une zone (non nécessairement ponctuelle).

Notion de *facette*. A l'intérieur de la zone d'action de la force \vec{F} , on considère la surface d'aire dS infinitésimale, centrée en P (Figure n°2.3). La surface élémentaire dS est orientée par la normale unitaire \vec{n} , sortante du solide considéré. La grandeur $\vec{n} dS$ est une *facette orientée*. ($\vec{n} dS$ parfois notée $d\vec{S}$).

Notion de vecteur contrainte. La facette $\vec{n} dS$ supporte une part de l'effort \vec{F} . On définit le vecteur contrainte, noté $\vec{T}(P, \vec{n})$, comme la densité surfacique d'effort calculée en P:

$$(2.10) \quad \vec{T}(P, \vec{n}) = \frac{\vec{F}}{dS}$$

La part d'effort que supporte la facette $\vec{n} dS$ est $d\vec{F} = \vec{T}(P, \vec{n})dS$. Le vecteur contrainte se décompose, comme illustré sur la figure n°2.3, en plusieurs composantes.

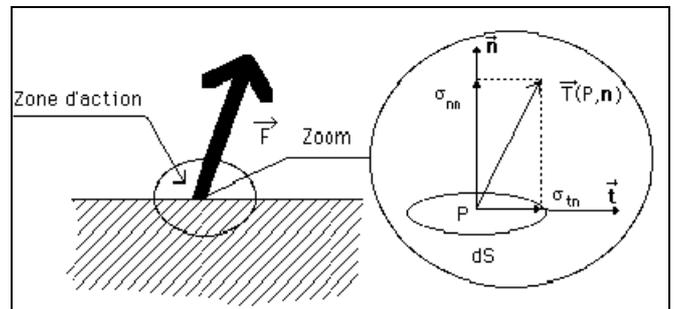


Figure n°2.3 : Force, facette et vecteur contrainte.

σ_{nn} : composante de contrainte normale à la facette d'orientation \vec{n} .

σ_{tn} : composante de cisaillement, tangente à la facette d'orientation \vec{n} .

Le principe d'une telle décomposition du vecteur contrainte en ses composantes sera largement utilisé dans ce qui suit.

Notion de force de volume. Sous l'action d'un champ de forces à distance, tel que le champ de gravitation, tout volume élémentaire de matière dv , centré en un point Q intérieur au solide, est soumis à un effort extérieur élémentaire de volume $d\vec{F}$. Cet effort est caractérisé par une densité volumique $\vec{f}(Q)$

$$(2.11) \quad \vec{f}(Q) = \frac{d\vec{F}}{dv}$$

Dans ces conditions la particule de volume dv , centrée en Q, est soumise à une force de volume élémentaire extérieure $d\vec{F} = \vec{f}(Q)dv$

2.1.2.2 Efforts intérieurs

Sous l'action d'efforts extérieurs, appliqués le plus souvent à la frontière du solide, les particules de matière situées à l'intérieur sont sollicitées mécaniquement. Le but est, maintenant, de se doter d'un outil de description de l'état des contraintes internes.

Le solide D est soumis aux actions d'un système de forces $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$. Envisageons, comme indiqué sur la figure n°2.4, la coupure fictive (a,a') qui sépare D en deux sous domaines D_1 et D_2 .

Le point matériel P, appartenant à cet interface fictif, est le centre de deux facettes $\vec{n}dS$ et $-\vec{n}dS$.

Ces deux facettes ont la même aire dS , mais sont orientées respectivement suivant \vec{n} et $-\vec{n}$, puisque considérées comme frontières des deux sous domaines, D_1 et D_2 .

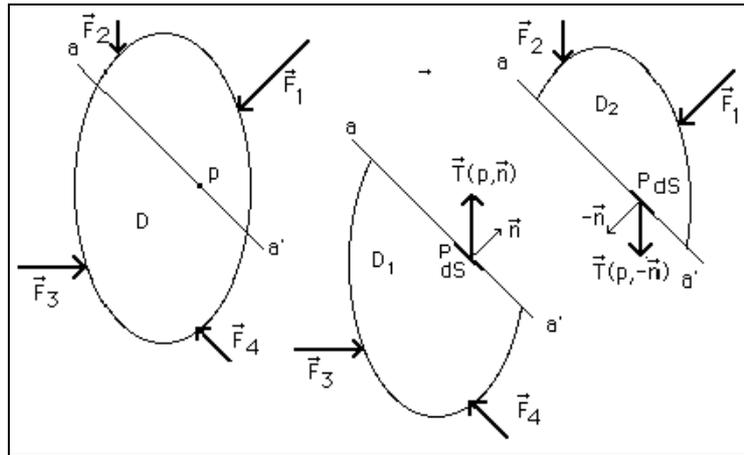


Figure n°2.4: Facette intérieure, liée à une coupure fictive

Le sous domaine D_2 exerce une action de contact sur D_1 , au niveau de P, caractérisée par le vecteur contrainte intérieure $\vec{T}(P, \vec{n})$. Par réaction, le sous domaine D_1 exerce sur D_2 une action de contact au niveau de P, caractérisée par le vecteur contrainte intérieure $\vec{T}(P, -\vec{n})$.

L'équilibre de l'aire élémentaire dS impose $\vec{T}(P, \vec{n}) + \vec{T}(P, -\vec{n}) = \vec{0}$.

Ceci traduit le principe de l'action et de la réaction. On remarque que le vecteur $\vec{T}(P, \vec{n})$, ainsi défini, n'a de sens que si le point P est choisi, et si de plus l'orientation \vec{n} de la coupure fictive est déterminée.

Question n°3: Comment exprimer le vecteur contrainte en tous points, quelle que soit l'orientation de la facette?

2.1.2.3 Tenseur des contraintes

L'état des contraintes d'un solide est caractérisé par le **tenseur des contraintes**, noté $\vec{\sigma}$, fonction du point P considéré. Dès qu'une base de l'espace est choisie, les composantes σ_{ij} du tenseur peuvent être représentées dans une matrice.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Il est important d'avoir présent à l'esprit la signification physique des composantes de la matrice associée au tenseur des contraintes.

Les termes en colonnes sont les composantes du vecteur contrainte agissant sur des facettes orientées respectivement suivant les trois directions $\vec{1}, \vec{2}, \vec{3}$.

$$\begin{aligned}\vec{T}(P, \vec{1}) &= \sigma_{11} \vec{1} + \sigma_{12} \vec{2} + \sigma_{13} \vec{3} \\ \vec{T}(P, \vec{2}) &= \sigma_{21} \vec{1} + \sigma_{22} \vec{2} + \sigma_{23} \vec{3} \\ \vec{T}(P, \vec{3}) &= \sigma_{31} \vec{1} + \sigma_{32} \vec{2} + \sigma_{33} \vec{3}\end{aligned}$$

La figure n° 2.5 illustre cette proposition sur un cube élémentaire.

Réponse à la question n°3: Les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ qui agit, au point P, sur une facette d'orientation $\vec{n}(n_1, n_2, n_3)$ se déduisent du tenseur des contraintes $\overset{\Rightarrow}{\sigma}$ par l'opération suivante:

$$(2.12) \quad T_i = \sigma_{ij} n_j$$

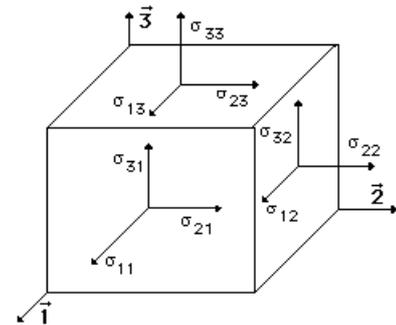


Figure n° 2.5: représentation graphique des composantes du tenseur des contraintes.

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

Cette notation tensorielle est équivalente à la notation matricielle ci-contre.

2.1.2.4 Equations d'équilibre

L'état contraintes internes d'un solide est donc entièrement déterminé par la donnée des neuf composantes du tenseur de contraintes qui sont des fonctions des variables d'espace. La question est de savoir : Quelles sont les conditions auxquelles doivent satisfaire neuf fonctions $\sigma_{ij}(x_k)$ pour qu'elles représentent les composantes d'un tenseur des contraintes?

Ces conditions sont purement mécaniques et traduisent le principe fondamental de la dynamique appliqué à un volume élémentaire de matière. La démonstration ne sera pas reprise ici, on se contente d'en énoncer les résultats.

L'équilibre des efforts extérieurs agissant sur un volume élémentaire de matière est traduit par les théorèmes généraux.

La résultante des efforts extérieurs équilibre la quantité d'accélération. Ceci donne les trois équations d'équilibre suivantes:

$$(2.13) \quad \sigma_{ij,j} + \rho f_i = \rho \gamma_i$$

Soit encore l'écriture dans l'encadré ci-dessous, dans laquelle les f_i sont les composantes de la densité massique d'effort extérieur

Dans le cas d'une transformation statique les accélérations sont nulles, et les second membres sont tous identiquement égaux à zéro.

En l'absence de moment massique, induit par un champ d'efforts extérieurs (ce qui est le cas le plus fréquent et en particulier du bois), l'équilibre du moment résultant des

forces extérieures, agissant sur le volume élémentaire considéré, se traduit par des conditions de symétrie des composantes de la matrice associée au tenseur des contraintes.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho f_1 &= \rho \frac{d^2 U_1}{dt^2} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho f_2 &= \rho \frac{d^2 U_2}{dt^2} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 &= \rho \frac{d^2 U_3}{dt^2} \end{aligned}$$

Pour la plupart des matériaux le tenseur des contraintes est symétrique.

$$(2.14) \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad , \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad , \quad \sigma_{31} = \sigma_{13}$$

En conséquence, les composantes du tenseur des contraintes σ_{ij} sont à priori six fonctions des variables d'espace, qui pour être statiquement admissibles doivent satisfaire à un système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre, précisé en (2.13).

2.1.2.5 Conclusions sur la statique

Ce paragraphe a permis de présenter la notion de force extérieure \vec{F} , appliquée sur une zone extérieure du contour d'un solide. La densité surfacique d'effort $\vec{T}(P, \vec{n})$, ou vecteur contrainte, agissant en un point P, sur une facette d'aire dS, d'orientation \vec{n} , se calcule en tout point P à partir du tenseur des contraintes $\vec{\sigma}$ et de \vec{n} , conformément à la formule (2.12). On notera que la matrice associée au tenseur des contraintes est symétrique, pour la plupart des matériaux usuels non soumis à des densités volumiques de moments internes (contrairement à ce qui se passerait dans le cas d'un matériau composite incluant des particules magnétisées susceptibles d'être le siège d'un moment intérieur d'orientation lorsque soumises à l'action d'un champ magnétique).

La dimension physique des composantes du tenseur des contraintes est celle d'une pression ($1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, on utilisera souvent $\text{MPa} = 10^6 \text{ Pa}$)

Le tenseur des déformations $\vec{\varepsilon}$, correspond au tenseur de Green-Lagrange linéarisé, ce qui suppose que les états de déformations considérées ci-dessus sont petites. Typiquement, une composante ε_{ij} du tenseur est une grandeur sans dimension au valeurs maximales de l'ordre de 1%.

2.1.3. Rhéologie et lois de comportement

Les paragraphes § 2.1.1 et 2.1.2 ci-dessus ont traité respectivement de la cinématique (déplacements et déformations) et de la statique (contraintes) des milieux continus déformables. Les concepts développés jusque là sont purement théoriques et il ne font aucune allusion aux propriétés intrinsèques du matériau considéré.

Nous avons jusqu'ici *inventé* un contexte mécanique théorique; si l'on souhaite lui trouver quelques applications au monde réel qui nous environne, il convient de le compléter par *des observations* et donc des données spécifiques du matériau. En effet, un solide de géométrie déterminée, soumis à une sollicitation extérieure (contrainte) d'intensité donnée, est le siège de déformations dont les intensités sont caractéristiques du matériau qui le compose. Une règle en acier apparaît comme moins déformable qu'une règle en matière plastique.

Il convient, dans le cadre d'une science à caractère expérimental marqué "la Rhéologie", de proposer et de qualifier les lois de comportement, reliant pour un matériau donné les états de contraintes aux états de déformation, les mieux adaptées dans un contexte expérimental donné.

2.1.3.1. Formulation d'un problème de mécanique

Résoudre l'état mécanique d'un solide soumis à une transformation purement mécanique (sans variation de température, d'humidité, etc), c'est identifier 15 fonctions des variables d'espace, correspondant aux champs de déplacement U_i (3), de déformation ε_{ij} (6) et de contrainte σ_{ij} (6).

Pour résoudre mathématiquement un problème de mécanique, on dispose d'un système d'équations aux dérivées partielles et de conditions aux limites correctement définies au contour de la structure étudiée.

Le système d'équation aux dérivées partielles comprend :

- les 6 relations de définition (2.3) des déformations ε_{ij} à partir des déplacements U_i

$$(2.3) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}) \quad \text{avec } i \text{ et } j \in (1,2,3)$$

- les 3 relations données par (2.13) les équations d'équilibre local des contraintes

$$(2.15) \quad \frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \rho f_i = \rho \frac{d^2 U_i}{dt^2}$$

- les 6 relations traduisant la loi de comportement du matériau

$$(2.16) \quad \varepsilon_{ij} = F_{ij} (\sigma_{kl}, \dots)$$

Soit au total un système de 15 équations, à priori indépendantes.

Conditions au contour :

Sur une géométrie donnée, un tel système d'équation admet en théorie une infinité de solutions mathématiques. Il importe sur un plan pratique d'être en mesure d'identifier, **la solution unique** correspondant au problème réel posé.

Il faut alors préciser la nature des forces de masse f_i , ainsi que les conditions de liaisons imposées en tous points du contour du volume de matière considéré. Un problème sera correctement posé, du point de vue mécanique, s'il est possible de fixer, en tout point du contour, trois composantes orthogonales entre elles, parmi les trois composantes du vecteur déplacement et les trois composantes du vecteur contrainte.

2.1.3.2. Fonctions d'état et lois de comportement

Un élément de structure mécanique, soumis aux efforts de service est le siège de déformations. L'art de l'ingénieur s'exprime aux différents niveaux de la conception, de la fabrication et de la maintenance du système considéré, (charpente, machine, meuble,...). L'état de déformation de l'élément de structure doit être, dans la mesure du possible, prévu et contrôlé par le concepteur. Cet état de déformation est la résultante des propriétés mécaniques du, ou des matériaux mis en œuvre, de la géométrie de la structure, des efforts imposés, du temps d'application de ces charges, des conditions climatiques d'environnement (température, humidité, ambiance corrosive, etc.).

La connaissance du fonctionnement d'une structure mécanique implique donc, au premier chef, l'identification des propriétés mécaniques du matériau. Il faut déterminer les lois physico-mécaniques régissant les évolutions des états de déformations en fonction de l'histoire des états de contraintes imposés sous des conditions variées de conditions d'environnement. Ces relations constituent ce que le mécanicien appelle "*les lois de comportement*" ou le thermodynamicien "*les fonctions d'état*".

L'effort de recherche visant à l'identification expérimentale des propriétés matérielles, ainsi qu'à la modélisation mathématique du comportement mécanique caractéristique d'un matériau, relève du domaine scientifique dit "*Rhéologie*".

Tout ingénieur technologue est pour le moins familier d'un modèle particulièrement simple de loi de comportement des solides déformables, la "*théorie de l'élasticité linéaire des solides homogènes et isotropes*" (§.2.1.3.3.) Ce modèle constitue un outil puissant, car applicable avec succès en première approximation, pour des niveaux de sollicitation raisonnables, à une très large gamme de matériaux utilisés classiquement en fabrication mécanique. Cependant dans bien des applications, la modélisation élastique se révèle insuffisante pour rendre compte du comportement mécanique observé.

Le béton, le bois, les aciers eux-mêmes sous certaines conditions d'environnement, sont susceptibles de présenter des effets de *fluage*. L'état de déformation évolue dans le temps sous un chargement maintenu constant. Pour de nombreux matériaux, il est possible d'estimer un niveau de contrainte en deçà duquel les déformations en fluage évoluent vers une valeur limite finie. Les modèles de comportement développés dans ce cadre relèvent de la "*théorie de la viscoélasticité*".

La tâche du rhéologue doit être envisagée en deux étapes complémentaires.

Approche phénoménologique: (le "Comment" du comportement)

Le problème technique posé est de mettre en œuvre les moyens expérimentaux, en vue de l'identification de la fonction de transfert entre contraintes et déformations, qu'il s'agisse de méthodes indicielles (essais de fluage ou de relaxation) ou d'analyses harmoniques par des essais à sollicitations imposées périodiques (module dynamique ou frottement intérieur). Les conditions thermodynamiques, température et taux d'humidité, sont soit des paramètres, soit des variables dans les expérimentations réalisées.

Une seconde étape est de caler au mieux le modèle théorique de loi de comportement choisi en identifiant les paramètres de ce modèle à partir des observations expérimentales. D'une façon assez générale, les modèles rhéologiques une fois calés, conduisent à une description du "Comment" du comportement différé.

Approche Explicative: (le "Pourquoi" du comportement)

Une phase complémentaire du travail du rhéologue est de tenter de répondre au "Pourquoi" des effets observés, en référence aux mécanismes physico-chimiques susceptibles d'induire le comportement macroscopique identifié. Cette partie du travail est plus délicate. Elle implique quasiment

toujours une collaboration interdisciplinaire entre des spécialités scientifiques très variées.

Dans le cas du matériau bois, un mécanicien ne saurait imaginer élucider valablement le problème sans l'appui d'un biologiste, spécialiste d'anatomie (structure ligneuse), d'un chimiste polymériste (polymères constitutifs), d'un physicien (température et eau dans le bois)...

A partir de certaines évidences expérimentales désormais disponibles, extraites de la littérature internationale, mais aussi des acquis expérimentaux du G.S. Rhéologie du bois¹, il est possible de dégager certaines interprétations explicatives du comportement différé du matériau bois.

2.1.3.3. Cas particulier : Elasticité des solides homogènes et isotropes

Nous la rappelons ici, pour mémoire, la loi de comportement élastique isotrope des solides homogènes. Elle est entièrement définie par la donnée de deux paramètres élastiques indépendants et la loi de comportement (2.16) s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$(2.17) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

E est le *Module d'Young*

ν est le *coefficient de Poisson*

$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ est la trace du tenseur des contraintes

δ_{ij} est le symbole de Kroneker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$)

$$(2.18) \quad \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

Cette loi est mise en défaut dans le cas du bois du fait de la très forte anisotropie de ce matériau.

¹ GS Rhéologie du Bois et GS Mécanique et Rhéologie du Bois: Groupements Scientifiques CNRS-INRA-CTBA-CTFT ayant assuré la promotion de la recherche en Sciences du Bois (Mécanique) dans les périodes 1984-1988 et 1988-1992.

2.2. GENERALITES SUR LA RHEOLOGIE DU MATERIAU BOIS

Les considérations générales de mécanique des solides déformables, développées au paragraphe précédent, vont être particularisées au cas du matériau bois.

2.2.1. Modélisation de la grume idéale, paramètres géométriques

La grume "idéale" (ou le tronc idéal) est assimilée à un volume de matière lignocellulosique, supposé continu au sens du mécanicien, admettant des symétries matérielles cylindriques. L'échelle d'observation macroscopique considérée ne fait intervenir que des volumes élémentaires de matière suffisamment grands devant la structure cellulaire. Ceci permet de formuler l'hypothèse de continuité du milieu.

Les propriétés tant mécaniques que physiques changent d'un point à un autre. La présence des cernes de croissance, dans lesquels se distinguent parfois le bois initial du bois final, ainsi que la variabilité de la croissance radiale saisonnière contribuent à une hétérogénéité intra et inter cernes. Si l'échelle d'observation macroscopique retenue intègre cette hétérogénéité de structure, on parlera d'un bois macroscopiquement homogène.

Lorsqu'on distinguera des modifications de propriétés entre la patte et le voisinage du houppier, entre le cœur et l'aubier (bois juvénile par exemple), on parlera d'hétérogénéité macroscopique.

En s'appuyant sur la géométrie du tronc et les particularités de structures, telles que les enveloppes cylindriques que forment les cernes annuels et la présence des rayons ligneux, on définit le tronc "idéal" comme un volume de matière admettant une symétrie de révolution autour de l'axe du tronc.

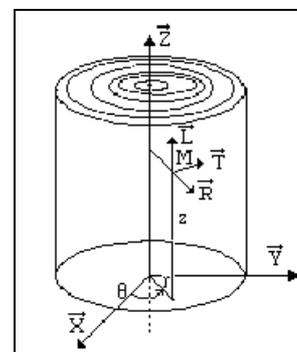


Figure n°2.6: Le point matériel M est repéré dans la grume par r, θ, z , dans la base naturelle locale associée.

Tout plan radial (passant par l'axe) est considéré comme plan de symétrie matérielle. En négligeant la conicité induite par les enveloppes de croissance radiale, on est amené à considérer que tout plan normal à l'axe du tronc est aussi un plan de symétrie matérielle. Le tronc idéal est considéré comme muni d'une symétrie matérielle orthotrope cylindrique. En conséquence, tout point matériel P est repéré dans la grume par les coordonnées cylindriques (r, θ, z) auxquelles sont

associés les vecteurs de la base naturelle locale orthonormée ($\vec{R}, \vec{T}, \vec{L}$), comptés respectivement suivant les directions : radial, tangentielle, longitudinale) (Figure n°2.6).

En résumé, le tronc idéal sera considéré sous l'angle d'un milieu continu, homogène, orthotrope cylindrique. La réalité sera représentée par des perturbations au modèle, parmi lesquelles on peut citer la présence de nœuds sains ou non adhérents, de fissures (*fentes, gerces, roulures ou gélivures*), d'une hétérogénéité marquée entre le coeur et l'aubier, la patte et le houppier (*bois juvénile, bois adulte*), d'hétérogénéités locales liées à une texture plus ou moins marquée (*bois initial et bois final* nettement différencié), défauts de concentricité (*moelle excentrée*), etc...

2.2.2. Variété du comportement mécanique, paramètres physiques

En guise d'illustration de l'influence des différents paramètres mécaniques et physiques intervenant dans la définition du comportement mécanique du matériau bois, nous avons choisi un exemple d'essai simple, voire simpliste par certains de ces aspects, qui met en valeur la complexité du problème et la diversité des couplages induits par les paramètres physiques.

On considère un échantillon prismatique de bois dont l'aire de la section droite est S_0 . Deux points A et B, distants de l_0 , ont été repérés et positionnés suivant le grand axe \vec{e}_3 de l'éprouvette.

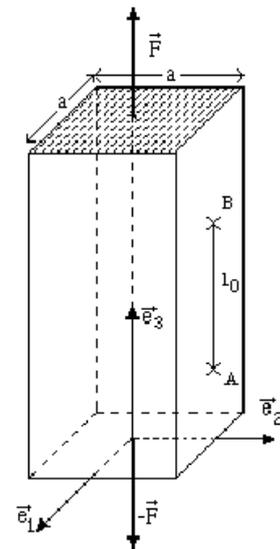


Figure n° 2.8: Prisme droit soumis à une sollicitation axiale.

Le principe de l'essai est d'imposer un doublet de forces \vec{F} équilibrées croissant et d'enregistrer l'élongation Δl que subit le segment AB (Figure n° 2.8). Les conditions particulières technologiques ne sont pas précisées ici, le principe de la méthode étant dominant.

Suivant le sens de l'effort appliqué, il s'agira d'un *essai de traction* ou d'un *essai de compression*. L'usage veut que l'on rende compte de ce genre d'essais par un graphique contrainte-déformation, comme représenté sur la figure n°2.9. La contrainte $\sigma = F/S_0$ (avec $S_0 = a^2$) est portée en fonction de la déformation $\varepsilon = \Delta l/l_0$. Le résultat diffère suivant qu'il s'agit de l'essai de traction ou de compression.

Sur la *courbe de traction*, en fonction de l'augmentation de la contrainte imposée, on distingue d'abord une zone sensiblement linéaire, dite *élastique*, limitée par la *contrainte limite d'élasticité en traction* σ_{eT} , suivie d'une zone dite plastique, qui s'écarte de l'évolution linéaire. La *contrainte de rupture en traction* σ_{rT} est enfin atteinte. Lorsque l'élongation à la rupture en traction ε_{rT} est peu différente de l'élongation à la limite d'élasticité ε_{eT} , on dit que l'on est en présence d'une rupture *fragile*.

Sur la *courbe de compression*, on distingue de même une zone sensiblement linéaire, dite *élastique*, limitée par la *contrainte limite d'élasticité en compression* σ_{eC} , suivie d'une zone de déformation plastique, limitée par la *contrainte de rupture en compression* σ_{rC} . Lorsque l'élongation à la rupture en compression ε_{rC} est grande par rapport à l'élongation à la limite d'élasticité ε_{eC} , on dit que l'on est en présence d'une rupture *ductile* (avec fort allongement à la rupture). On notera que les normes françaises n'utilisent pas l'essai de traction pour la qualification du bois L'essai de compression est décrit par la norme NF B 51007.

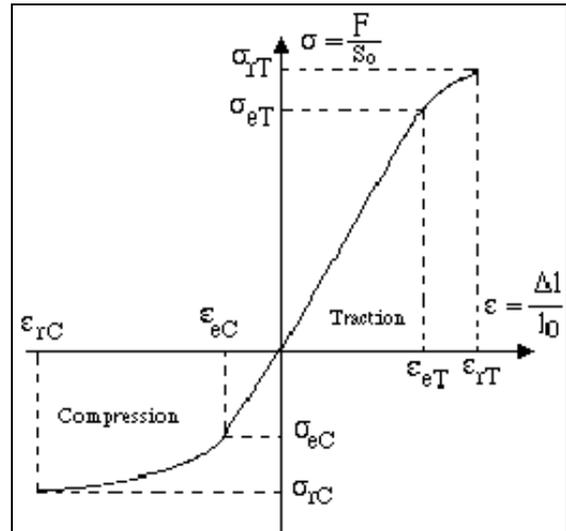


Figure n°2.9 Allure schématique du diagramme contrainte-déformation (traction compression)

2.2.2.1. Le domaine élastique: l'anisotropie

Supposons, pour fixer les idées, que l'éprouvette représentée sur la figure 2.8 ait été prélevée de telle sorte que son repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ soit colinéaire au repère de grume $(\vec{R}, \vec{T}, \vec{L})$. On dit que l'essai est parallèle au fil du bois (grain), le grand axe de l'éprouvette est parallèle à \vec{L} . Sur la figure n° 2.10, la caractéristique de la figure n° 2.9 est réduite aux portions linéaires. Elle est limitée par σ_{eT} en traction et par σ_{eC} en compression.

La zone de comportement linéaire est généralement plus grande en traction qu'en compression.

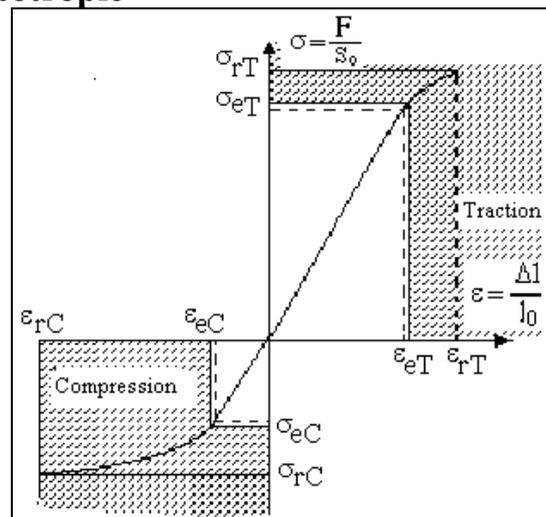


Figure n°2.10 Courbe contrainte-déformation en traction et en compression limitée à la zone linéaire de comportement élastique.

Si l'on ne différencie pas les pentes de la caractéristique entre traction et compression, on décrira analytiquement le comportement élastique par

$$(2.16) \quad \sigma = E_L \varepsilon \text{ ou } \varepsilon = S_{33} \sigma \quad \text{avec } S_{33} = \frac{1}{E_L}$$

E_L : Module d'Young longitu-dinal, parallèlement au fil du bois,

S_{33} : Complaisance élastique à la traction parallèlement au fil du bois.

Usuellement, on ne distingue pas modules (complaisances) obtenus en traction ou en compression, il faut noter que la zone de validité de (2.16) diffère suivant le type de sollicitation. La contrainte limite d'élasticité en compression est généralement plus faible, en module, que celle observée en traction $|\sigma_{eT}| > |\sigma_{eC}|$.

Le caractère d'anisotropie élastique se manifeste lorsque, prélevant une éprouvette de grand axe orienté suivant \vec{R} ou \vec{T} , on obtient des valeurs des modules d'Young E_R et E_T différents de E_L et très sensiblement plus faibles.

L'une des particularités du comportement élastique du bois est d'être très fortement anisotrope.

L'anisotropie orthotrope cylindrique constitue une spécificité du comportement mécanique du matériau bois. Le formalisme associé à la loi de comportement élastique est précisé au chapitre 3.

Le chapitre 4 est consacré à l'approche expérimentale du comportement. Certaines des techniques métrologiques mises en œuvre pour la qualification du matériau sont évoquées. La seconde partie de ce chapitre 4 vise à apporter des éléments de compréhension des observations en termes de particularités anatomiques ou structurelles des tissus ligneux.

Le chapitre 5 traite de problèmes d'élasticité linéaire des solides orthotropes cylindriques et de différentes méthodes de leur résolution. La statique et la dynamique sont abordées.

2.2.2.2. Le comportement différé : le paramètre temps

La norme ASTM D 143-62 prescrit de procéder à un essai à vitesse de déplacement de traverse de 1mm/mn.

L'expérience révèle que la vitesse de la transformation mécanique modifie les modules d'Young apparents. Des vitesses élevées induisent des modules plus grands. Ceci signifie que le paramètre temps influe sur la loi de comportement, il s'agit d'un effet d'élasticité différée.

De même, une pièce de bois, soumise depuis un instant initial à une charge maintenue, est le siège d'une déformation qui évolue avec le temps. Il s'agit du phénomène de fluage, autre manifestation du comportement différé.

Les principaux concepts mathématiques permettant de décrire le comportement différé des solides sont développés au chapitre 6.

Différentes modélisations viscoélastiques y sont rappelées. Dans le cas particulier du bois, les phénomènes d'activation thermiques et hydriques des processus élémentaires sources de comportement différé sont présentés dans un contexte expérimental au niveau du chapitre 7.

2.2.2.3. Le domaine plastique - les mécanismes de rupture.

Considérons à nouveau l'essai présenté sur la figure n°2.8 et intéressons nous au domaine au-delà des limites d'élasticité. Toujours dans l'hypothèse d'un échantillon taillé suivant le fil du bois ($\vec{e}_3 = \vec{L}$), on constate que la rupture à la traction apparaît plutôt *fragile*, alors qu'à la compression, la ruine présente un caractère *ductile*. Les modes de ruine sont très différents suivant le type de sollicitations imposées. Par exemple au cours d'un essai, lorsque l'on a atteint le niveau de contrainte $\sigma_A \in]\sigma_{eC}, \sigma_{rC} [$, si l'on procède à la décharge de l'échantillon, il subsiste à charge nulle une déformation dite *résiduelle* ϵ_{res} .

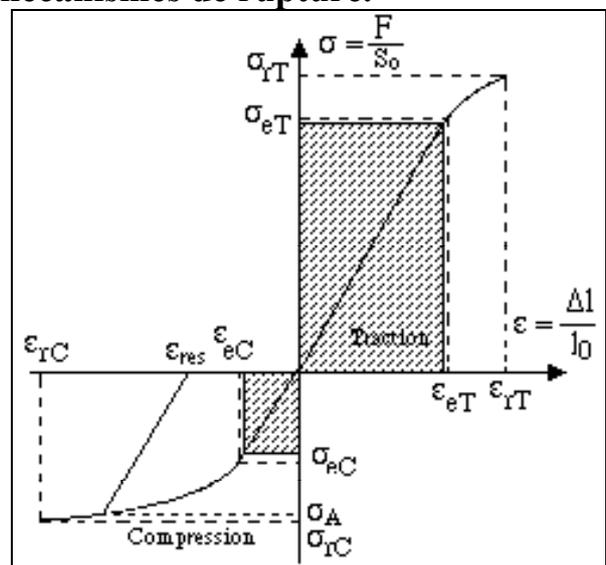


Figure n° 2.11 Courbe contrainte-déformation en traction et en compression limitée à la zone de comportement plastique.

Une partie de cette déformation résiduelle est susceptible de se résorber au cours du temps, là encore se manifeste un effet différé. L'étude du faciès de rupture de l'échantillon montre une différence nette entre les modes de la ruine en traction et de la ruine en compression. Dans un cas il y a ruptures de fibres, dans le second, il y a flambements et instabilités mécaniques.

L'étude du comportement mécanique aux états limites, voisinage de la rupture, est rendu complexe du fait de l'anisotropie. Les critères d'apparition des déformations plastiques, ainsi que des éléments de mécanique de la rupture seront introduits sur le plan théorique au chapitre 8 et feront l'objet d'illustrations expérimentales spécifiques du bois au chapitre 9.

2.2.2.4. Paramètres physiques du comportement mécanique.

Les propriétés mécaniques sont étroitement liées à l'état physico-chimique du matériau bois. Parmi les principaux paramètres, nous serons conduits à envisager la *masse volumique* qui caractérise la quantité de matière lignocellulosique, par rapport aux vides, dans le volume matériel considéré. Nous verrons comment les modules d'élasticité, les charges de rupture, sont fortement corrélés à la masse volumique et que ces grandeurs sont très généralement des fonctions croissantes de celle-ci.

Une augmentation du *taux d'humidité*, particulièrement pour des valeurs comprises entre l'état anhydre et le point de saturation des fibres (P.S.F.), modifie très sensiblement les caractéristiques élastiques, ainsi que les contraintes de limite d'élasticité, en les abaissant.

Un changement de taux d'humidité modifie sensiblement les cinétiques des processus élémentaires de comportement différé. Lorsque des cycles de variation de taux d'humidité sont imposés au bois, le comportement différé est rendu plus complexe à observer et difficile à interpréter. Les manifestations de l'effet dit *mécanosorptif* sont engendrées.

La température est de même un paramètre physique très important qui conditionne le comportement mécanique du bois. En particulier, la présence de transitions vitreuses à différentes températures pour les principaux polymères constitutifs de la matière ligneuse, laisse entrevoir que les cinétiques des effets viscoélastiques sont modifiés par activation thermique.

La présence d'eau en phase liquide au sein de la matière induit des particularités de variations dimensionnelles particulièrement aux basses températures. Ces différents aspects seront approfondis au chapitre 7 qui traite du comportement différé, avec notamment des considérations sur le fluage des déformations, la relaxations des contraintes et les modules dynamiques et les frottements intérieurs.

2.3. EN CONCLUSION

Les caractères marqués d'anisotropie et de comportement différé, la multiplicité des modes de rupture font toute la complexité du comportement mécanique du matériau bois.

En se limitant à des domaines de validité particuliers, différents modèles de loi de comportement, prenant en compte les spécificités de la matière ligneuse, vont être successivement présentés:

- comportement élastique anisotrope,
- comportement viscoélastique,
- critère d'apparition des déformations plastiques,
- modes de rupture.

On s'efforce de présenter des alternances de chapitres, les uns à caractère théorique, nécessaires à une compréhension rigoureuse de modèles complexes, les autres aux caractères plus techniques et appliqués, rendant compte des évidences expérimentales et précisant les caractéristiques mécaniques utiles.

Le lecteur gardera présent à l'esprit qu'il est fondamentalement illusoire de vouloir rendre compte de mécanismes multiples et couplés et complexes, par une présentation simpliste.

Une meilleure compréhension du comportement mécanique du matériau bois impose un formalisme malheureusement difficile et parfois laborieux.

