

CHAPITRE 9

BASES THEORIQUES DU DIMENSIONNEMENT DES MULTICOUCHES

Le problème est de déterminer le comportement élastique d'un composite multicouche constitué de n plis. Dans l'exemple de la figure n° 9.1, il s'agit d'un cinq (5) plis, muni d'un référentiel de structure $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$, centré dans le plan médian de la plaque composite.

9.1 MECANIQUE DES PLAQUES PLANES MINCES (RAPPEL)

En reprenant l'essentiel de la théorie des plaques minces, la figure n° 9.2 représente un élément de plaque d'épaisseur h , limité par quatre coupures élémentaires de longueurs égales, deux à deux, à dx_1 et dx_2 .

9.1.1 Grandeurs physiques, efforts généralisés (notations)

Le torseur des efforts intérieurs, agissant sur la coupure élémentaire de centre P_0 , appartenant au plan moyen de la plaque, de longueur élémentaire dx_2 et orientée par la normale extérieure $\vec{n} = \vec{x}_1$ à l'élément de plaque, est défini par les cinq efforts généralisés suivants:

Résultante de composantes: (Unités: force par unité de longueur)

N_1 effort linéique normal de membrane, compté > 0 suivant \vec{x}_1

N_6 effort linéique tranchant de membrane, compté > 0 suivant \vec{x}_2

Q_1 effort linéique tranchant normal au plan, compté > 0 suivant \vec{x}_3

Moment de composantes: (Unités: force)

M_1 moment linéique de flexion, compté > 0 suivant \vec{x}_2

M_6 moment linéique de torsion, compté > 0 suivant $-\vec{x}_1$.

Le torseur des efforts intérieurs, agissant sur une coupure élémentaire centrée en P_0^* , point du plan moyen de la plaque, de longueur élémentaire dx_1 , et orientée par la normale extérieure $\vec{n} = \vec{x}_2$ est défini par :

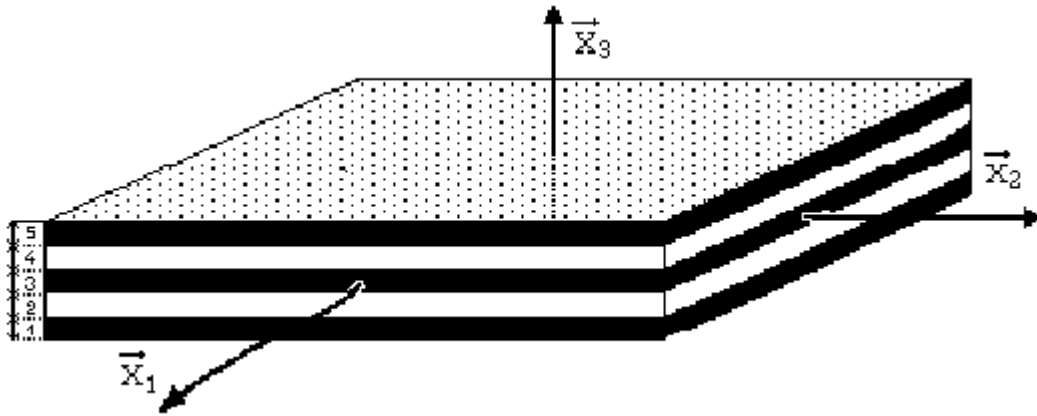


Figure n° 9.1: Exemple de contreplaqué cinq plis.

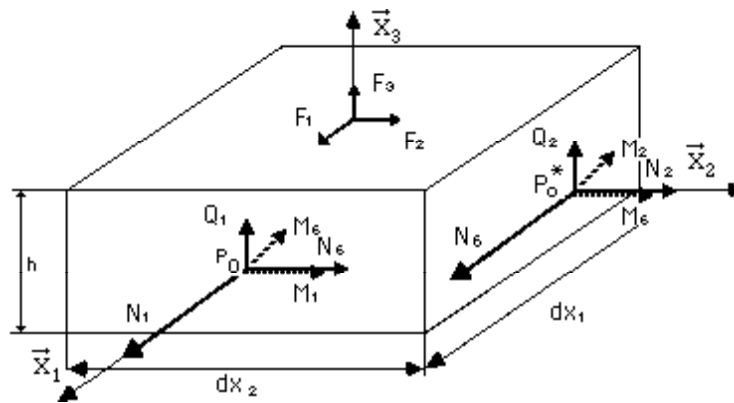


Figure n° 9.2 Coupure élémentaire fermée. (Composantes des torseurs représentées positives)

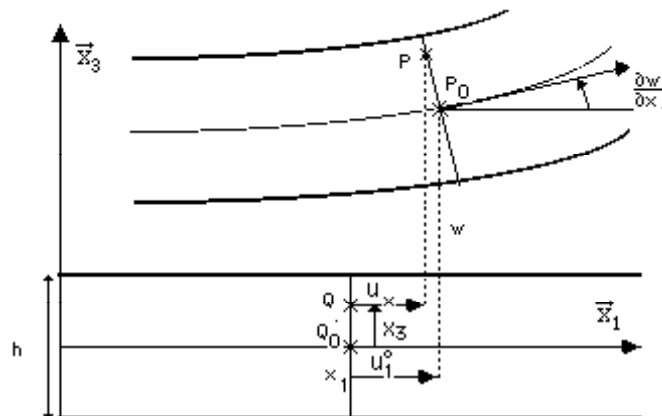


Figure n° 9.3: Schématisation de la déformée

Une résultante de composantes: (Unité : force par unité de longueur)

N_2 effort linéique normal de membrane, compté > 0 suivant \vec{x}_2

N_6 effort linéique tranchant de membrane, compté > 0 suivant \vec{x}_1

Q_2 effort linéique tranchant normal au plan, compté > 0 suivant \vec{x}_3

Un moment de composantes: (Unités: force)

M_2 moment linéique de flexion, compté > 0 suivant $-\vec{x}_1$

M_6 moment linéique de torsion, compté > 0 suivant \vec{x}_2 .

Remarque: les moments linéiques de torsion M_6 sont les mêmes sur chacune des coupures.

Les N_i (pour $i \in (1,2,6)$) sont les efforts linéiques de membrane, exprimés par exemple en Newton par millimètre (Nmm^{-1}), définis à partir des composantes σ_{ij} du tenseur local de contraintes par une intégration dans l'épaisseur de la plaque:

$$(9.1) \quad N_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} dx_3 ; \quad N_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} dx_3 ; \quad N_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} dx_3$$

Les M_i (pour $i \in (1,2,6)$) sont les moments linéiques de flexion-torsion exprimés en Newton (N), définis à partir des composantes σ_{ij} du tenseur local de contraintes par une intégration dans l'épaisseur de la plaque:

$$(9.2) \quad M_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{11} x_3 dx_3 ; \quad M_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{22} x_3 dx_3 ; \quad M_6 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{12} x_3 dx_3$$

Les Q_i sont les efforts linéiques tranchants transverses exprimés en Newton par millimètre (Nmm^{-1}) définis, eux aussi, à partir des composantes σ_{ij} du tenseur local de contraintes par une intégration dans l'épaisseur de la plaque:

$$(9.3) \quad Q_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} dx_3 \quad . \quad Q_2 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{23} dx_3$$

Les efforts agissant sur la coupure fermée de cotés dx_1 et dx_2 doivent vérifier les équations d'équilibre suivantes :

$$(9.4) \quad \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial N_6}{\partial x_2} + F_1 = 0 ; \quad \frac{\partial N_6}{\partial x_1} + \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + F_2 = 0 ; \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} + F_3 = 0$$

$$(9.5) \quad \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_6}{\partial x_2} = Q_1 \quad ; \quad \frac{\partial M_6}{\partial x_1} + \frac{\partial M_2}{\partial x_2} = Q_2$$

F_1 , F_2 et F_3 sont les composantes de la densité surfacique d'efforts extérieurs agissant sur la coupure fermée considérée (dx_1 , dx_2).

Remarques: L'utilisation ici de notations contractées, à un seul indice, a pour conséquence un allégement effectif d'écriture, mais peut introduire des confusions quant aux conventions de signes des composantes des moments.

En injectant dans la troisième relation (9.4) les expressions de Q_1 et de Q_2 , tirées de (9.5), on obtient l'équation différentielle régissant les seuls moments de flexion-torsion:

$$(9.6) \quad \frac{\partial^2 M_1}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial x_2^2} + F_3 = 0 \quad (\text{Equation d'équilibre de membrane})$$

9.1.2. Grandeurs cinématiques. Déplacements généralisés.

Les hypothèses cinématiques de Love-Kirchhoff sont retenues, à savoir que des points matériels positionnés sur une normale au plan moyen de la plaque avant déformation, restent sensiblement alignés sur une normale à la déformée du plan moyen.

En conséquence, le déplacement d'un point quelconque $Q(x_1, x_2, x_3)$ est entièrement défini par les composantes du champ de déplacement du point homologue $Q_0(x_1, x_2, 0)$ du plan moyen notées:

$$(9.7) \quad U_1^0(x_1, x_2) \quad , \quad U_2^0(x_1, x_2) \quad , \quad w(x_1, x_2)$$

où $U_1^0(x_1, x_2)$ et $U_2^0(x_1, x_2)$ sont respectivement les composantes du déplacement de membrane (dans le plan moyen) suivant \bar{x}_1 et \bar{x}_2 . $w(x_1, x_2)$ est la flèche suivant \bar{x}_3 du plan moyen.

Dans ces conditions, les composantes du déplacement de $Q(x_1, x_2, x_3)$,

développées au premier ordre suivant la côte x_3 , comptées par rapport au plan moyen de plaque (figure n° 9.3), s'écrivent :

$$(9.8) \quad \begin{aligned} U_1(x_1, x_2, x_3) &= U_1^0(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ U_2(x_1, x_2, x_3) &= U_2^0(x_1, x_2) - x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ U_3(x_1, x_2, x_3) &\approx w(x_1, x_2) \end{aligned}$$

En tout point $P(x_1, x_2, x_3)$, transformé de $Q(x_1, x_2, x_3)$, le champ de déformations associées $\varepsilon_{ij} = 1/2 (U_{i,j} + U_{j,i})$, s'écrit :

$$(9.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial U_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} &= \varepsilon_1^0 + x_3 k_1 \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= \varepsilon_2^0 + x_3 k_2 \\ 2\varepsilon_{12} = \gamma_6 &= \frac{\partial U_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_1} - 2x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} &= \gamma_6^0 + x_3 k_6 \end{aligned}$$

Les équations (9.9) traduisent le fait que l'état de déformation locale s'exprime en fonction de l'état de déformation de membrane ($\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \gamma_6^0$), des flexions (k_1 et k_2) et de la torsion k_6 au niveau du plan moyen, compte tenu de la côte x_3 du point considéré.

Les déformations généralisées associées aux efforts généralisés définis au paragraphe précédent sont :

Les déformations de membrane

$$\varepsilon_1^0 = \frac{\partial U_1^0}{\partial x_1} : \text{élongation dans le plan moyen suivant } \bar{x}_1, \text{ associée à } N_1,$$

$$\varepsilon_2^0 = \frac{\partial U_2^0}{\partial x_2} = \text{élongation dans le plan moyen suivant } \bar{x}_2, \text{ associée à } N_2,$$

$$\gamma_6^0 = \frac{\partial U_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2^0}{\partial x_1} = \text{cisaillement dans le plan moyen, associé à } N_6.$$

Les courbures et torsions:

$k_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$ courbure autour de l'axe \bar{x}_2 , associée au moment fléchissant M_1

$k_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}$ courbure autour de l'axe \bar{x}_1 , associée au moment fléchissant M_2

$k_6 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}$ torsion associée au moment fléchissant M_6

9.1.3 Loi de comportement élastique des plaques minces

La loi de comportement purement élastique suppose l'existence d'une fonction densité volumique de potentiel élastique, forme quadratique définie positive des efforts généralisés, ou des déformations généralisées.

En conséquence, les relations linéaires entre efforts et déformations généralisées peuvent s'écrire sous la forme suivante:

Rigidités de plaque

$$(9.10) \quad \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \gamma_6^0 \\ k_1 \\ k_2 \\ k_6 \end{bmatrix}$$

Les composantes A_{ij} , avec $i,j \in (1,2,6)^2$ sont les *rigidités de membrane*.

Les composantes D_{ij} , avec $i,j \in (1,2,6)^2$ sont les rigidités de *flexion-torsion*

Les composantes B_{ij} , avec $i,j \in (1,2,6)^2$ sont les rigidités de *couplage* entre les effets de membrane et de flexion-torsion.

Remarque: Les termes de couplage ne sont généralement pas évoqués dans les présentations simplifiées des propriétés élastiques des stratifiés (contre-plaqués).

Ces termes s'éliminent en effet en concevant des *multicouches équilibrés*, tels que les B_{ij} soient tous nuls. Toutefois, au delà de la conception, les incertitudes de fabrication entraînent des écarts aux prévisions dont les incidences ne peuvent être chiffrées, faute de modèle prévisionnel, que par une évidence expérimentale à posteriori, néfaste à la productivité. Un des buts de ce travail est de doter l'ingénieur d'un modèle prévisionnel adapté.

Souplesse de plaque:

Après inversion de la matrice des rigidités définie en (9.10), la loi de comportement élastique linéaire donne les déformations en fonction des efforts.

Les composantes a_{ij} , avec $i,j \in (1,2,6)^2$ sont les *souplesse de membrane*.

Les composantes d_{ij} , avec $i,j \in (1,2,6)^2$ sont les *souplesse de flexion-torsion*.

Les composantes b_{ij} , avec $i,j \in (1,2,6)^2$ sont les *souplesse de couplage*.

L'objectif, de ce qui suit, est de se doter d'un moyen de calcul des différentes rigidités dans le cas des contreplaqués (multicouches) soumis en particulier à des variations spatiales de taux d'humidité.

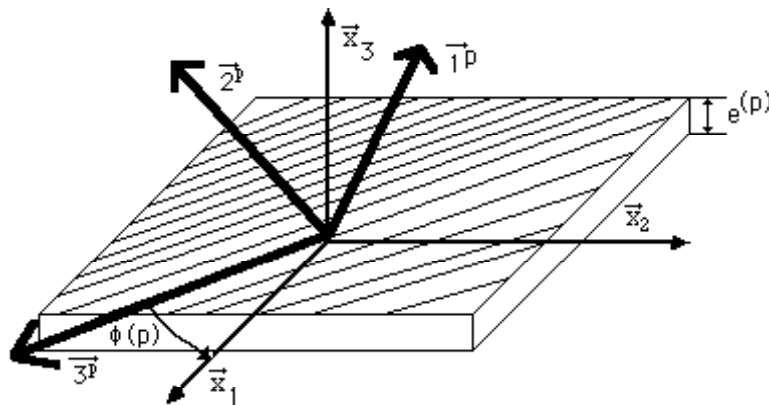


Figure n° 9.4: Orientation du pli de rang p par rapport à la plaque.

9.2 DEFINITION D'UNE PLAQUE STRATIFIEE

Le produit souhaité, ou réalisé, est un multicouche caractérisé par le collage d'un nombre "n" de plis constituant la plaque stratifiée.

Si $e^{(p)}$ désigne l'épaisseur du pli de rang $p \in (1, \dots, n)$, l'épaisseur totale "h" du contreplaqué vaut:

$$(9.11) \quad h = \sum_{p=1}^n e^{(p)}$$

La côte $z^{(p)}$ du plan moyen du pli de rang p, par rapport au plan moyen de la plaque de contreplaqué s'exprime par

$$(9.12) \quad z^{(p)} = -\frac{h}{2} + \sum_{k=1}^p e^{(k)} - \frac{e^{(p)}}{2}$$

à la condition que comme sur la figure n° 9.1, le rang p des plis soit donné dans un ordre croissant suivant l'axe \bar{x}_3 .

h_{p-1} et h_p désigneront dans la suite les côtes selon \bar{x}_3 des plans supérieur et inférieur du pli de rang p avec en particulier: $e^{(p)} = h_p - h_{p-1}$.

9.2.1 Comportement hygro-élastique du pli de rang (p)

Dans le cas particulier des contreplaqués, les plis de bois sont le plus souvent obtenus par déroulage d'une grume. Pour des raisons esthétiques les plis de parement inférieur (rang 1) et supérieur (rang n) sont parfois usinés par tranchage.

Ces mêmes plis externes peuvent encore être constitués d'un autre matériau, du type plastique, éventuellement renforcé par des fibres de verre ou autre (Kevlar ou Carbone).

Dans tous les cas, chaque pli de rang p est supposé anisotrope et admet une symétrie matérielle orthotrope suivant les trois principales directions $\bar{1}(P)$, $\bar{2}(P)$, $\bar{3}(P)$. Ces axes sont à définir par rapport au référentiel de structure de la plaque. \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 .

9.2.1.1 Dans le référentiel de symétrie matérielle

Dans le référentiel matériel $\bar{1}(P)$, $\bar{2}(P)$, $\bar{3}(P)$ associé aux coordonnées x, y, z, le comportement élastique du matériau constituant le pli p est décrit par les neuf complaisances élastiques S_{ijkl} linéairement indépendantes, conformément à la loi

de comportement donnée au § 3.1.4 formule (3.3) rappelée ci-dessous.

$$(9.13) \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{yx} \\ 2\varepsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4S_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4S_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}$$

Remarque: La première colonne introduit une notation conventionnelle à un seul indice pour les composantes du tenseur des déformations.(c.f. Chap. 3.)

9.2.1.2 Dans le référentiel de plaque.

D'une façon générale, désignons par $\varphi_{ij}^{(p)}$ les composantes de la matrice de changement de base, pour le pli de rang p , qui fait passer du référentiel de grume $(\vec{R}, \vec{T}, \vec{L})$ au référentiel de structure $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

Les propriétés élastiques dans cette nouvelle base sont alors données par:

$$(9.14) \quad S_{ijkl}^{(p)} = S_{pqrs} \varphi_{pi}^{(p)} \varphi_{qj}^{(p)} \varphi_{rk}^{(p)} \varphi_{sl}^{(p)}$$

Pour chacun des plis la matrice $\varphi_{ij}^{(p)}$ constitue l'une des données du problème.

9.2.1.3 Propriétés hygro-élastiques

On envisage ici l'introduction de matériaux hygroscopiques, chaque pli est le siège d'une variation spatiale de taux d'humidité $\Delta H(x_i)$ depuis une valeur H_0 . L'état total de déformation tiendra compte de la variation dimensionnelle liée à la fluctuation du taux d'humidité. Le tenseur des coefficients de retrait, connu dans le référentiel de symétries matérielles, est à exprimer dans le référentiel de plaque:

$$(9.15) \quad \alpha_{ij}^{(p)} = \alpha_{kl} \varphi_{ki}^{(p)} \varphi_{lj}^{(p)} \quad (\text{Coefficients de retrait hydrique})$$

La déformation totale est le cumul de déformations d'origine purement élastique et de retraits liés à la variation locale du taux d'humidité $\Delta H(x_1, x_2, x_3)$.

$$(9.16) \quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkl}^{(p)} \sigma_{kl} + \alpha_{ij}^{(p)} \Delta H(x_1, x_2, x_3)$$

En introduisant le tenseur des rigidités élastiques $C_{ijkl}^{(p)}$, inverse du tenseur

des complaisances $S_{ijkl}^{(p)}$, les contraintes locales s'expriment alors par:

$$(9.17) \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}^{(p)} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij}^{(p)} \Delta H(x_1, x_2, x_3), \quad \text{avec } \beta_{ij}^{(p)} = C_{ijkl}^{(p)} \alpha_{kl}^{(p)}$$

On désignera, avec certains auteurs, $\beta_{ij}^{(p)}$ tenseur des coefficients de contrainte. Il s'agit d'un tenseur matériel qui intègre des propriétés élastiques et des propriétés de retrait aux variations de taux d'humidité. La variation de taux d'humidité est susceptible d'affecter les propriétés élastiques. Il en sera tenu compte.

9.2.2 Conditions aux interfaces et aux frontières.

Pour déterminer l'état mécanique d'un panneau multicouche ou d'une plaque stratifiée, il faut fixer l'ensemble des conditions nécessaires tant au contour du domaine de matière considéré, qu'aux interfaces entre plis.

9.2.2.1. Conditions de collage des plis

Le collage est ici supposé parfait. Ceci implique des conditions cinématiques de continuité du champ de déplacement aux interfaces. A la côte h_p interface entre les plis de rang p et $p+1$, il faut :

$$(9.18) \quad U_i^p(x_1, x_2, h_p) = U_i^{p+1}(x_1, x_2, h_p) \text{ pour } i \in (1, 2, 3)$$

On remarque que ces conditions sont automatiquement satisfaites par la forme du champ de déplacement adoptée en (9.7) § 9.1.2. La continuité des contraintes de cisaillement doit être assurée aux mêmes interfaces. Ceci implique :

$$(9.19) \quad \sigma_{i3}^p(x_1, x_2, h_p) = \sigma_{i3}^{p+1}(x_1, x_2, h_p) \text{ pour } i \in (1, 2, 3)$$

Cette dernière proposition sera discutée dans les cas particuliers envisagés plus loin.

9.2.2.2 Conditions aux frontières du panneau

Les composantes de la densité surfacique d'effort extérieur $F_i(x_1, x_2)$, évoquées dans les relations (9.4), doivent être fixées.

Les efforts de membrane et de flexion-torsion ou les déplacements généralisés doivent traduire les conditions de liaisons externes imposées au

contour du panneau. Dans le cas d'un panneau rectangulaire de longueur L suivant \bar{x}_1 et de largeur l suivant \bar{x}_2 , il conviendra de fixer :

soit les efforts :		soit des déformations :	
(9.20)	$N_i(\pm \frac{L}{2}, x_2), M_i(\pm \frac{L}{2}, x_2)$	(9.22)	$\varepsilon_i^o(\pm \frac{L}{2}, x_2), k_i(\pm \frac{L}{2}, x_2)$
(9.21)	$N_i(x_1, \pm \frac{L}{2}), M_i(x_1, \pm \frac{L}{2})$	(9.23)	$\varepsilon_i^o(x_1, \pm \frac{L}{2}), k_i(x_1, \pm \frac{L}{2})$

Soit toute combinaison cohérente de *conditions mixtes en efforts et en déformations* assurant des conditions nécessaires et suffisantes pour identifier la solution appropriée du système différentiel à résoudre.

9.2.2.3 Conditions de déplacement solide

Dans le cas d'une résolution par une méthode des déplacements, il ne faudra pas oublier d'éliminer le déplacement global de corps solide, lorsque celui-ci n'est pas déjà fixé par les conditions en déplacement aux frontières (§ 5.4.1) . A savoir, déplacements et rotations nuls autour, par exemple, du point pris comme origine fixe :

$$(9.23) \quad U_i(0,0,0) = 0 \quad , \quad \Omega_i(0,0,0) = 0$$

9.2.2.4 Conditions sur le champ d'humidité.

La distribution spatiale de variation de taux d'humidité $\Delta H(x_1, x_2, x_3)$ ne fera pas l'objet d'une évaluation en terme de transfert de masse. Elle sera, ici, une donnée du problème.

A noter que la variation de taux d'humidité conduira d'une part à une variation dimensionnelle de la matière, et d'autre part à une modification des propriétés élastiques qui sera prise en compte dans la suite.

9.3 CONCLUSIONS

La donnée du nombre n de plis et l'épaisseur $e(p)$ de chacun permet, comme indiqué en début de § 9.2 de préciser la définition géométrique transverse du panneau.

La définition de l'orientation matérielle de chaque pli résulte du procédé et des imperfections d'élaboration des monocouches. La matrice de changement de

base $\varphi_{ij}^{(p)}$ sera une donnée complémentaire indispensable pour évaluer, comme indiqué en §.9.2.1.2, les propriétés hygro-élastiques du pli dans le référentiel de plaque.

Enfin les conditions aux frontières devront soigneusement être précisées, comme indiqué en §.9.2.2.2, pour résoudre sans ambiguïté le système différentiel (9.4) (9.5), moyennant les définitions (9.1) (9.2) (9.3) des efforts généralisés.

Il faut noter qu'à ce stade de l'exposé, il n'a pas été fait d'allusion directe et déterminante à la nature des matériaux constituant le multicouche. Les propositions qui précèdent sont applicables à tout matériau composite multicouche constitué de plis hygro-élastiques orthotropes.