PROPORTIONNALITE

I. Les programmes

Au cycle des approfondissements, « l'élève approche la notion de fonction numérique, en particulier dans le cadre des situations de proportionnalité ».

Des situations relevant de la proportionnalité sont proposées et traitées en utilisant des raisonnements personnels, adaptés aux données en jeu dans la situation et aux connaissances numériques des élèves. Les élèves distingueront ces situations de celles pour lesquelles ces raisonnements ne sont pas pertinents (situations de non-proportionnalité).

Ces procédures de résolution concernent également les problèmes relatifs aux pourcentages, aux échelles, aux vitesses moyennes et aux conversions entre unités de longueur, de masse, de contenance, de durée ou d'aire. A partir de cette première approche dont l'importance ne doit pas être sous-estimée, l'étude organisée de la proportionnalité sera mise en place au collège.

La notion d'agrandissement ou de réduction de figures fait l'objet d'une première étude, en liaison avec la proportionnalité, et conduit à une approche de la notion d'échelle.

A l'école primaire, il s'agit d'étendre la reconnaissance de problèmes qui relèvent du domaine multiplicatif. Ces problèmes sont traités en s'appuyant sur des raisonnements qui peuvent être élaborés et énoncés par les élèves dans le contexte de la situation. La mise en œuvre de ces raisonnements suppose que l'élève ait identifié qu'ils étaient pertinents pour la situation proposée.

Il est important que soient proposées aussi bien des situations qui relèvent de la proportionnalité que des situations qui n'en relèvent pas.

Dans tous les cas, on s'appuiera sur des situations concrètes (par exemple, sur des expériences en lien avec le programme de sciences comme l'étalonnement d'un verre doseur conique comparé à un verre doseur cylindrique).

L'utilisation de tableaux de nombres ou de graphiques permet d'organiser des informations dans de nombreuses situations. Ces outils ne doivent pas être associés systématiquement à la proportionnalité.

Les situations faisant intervenir des pourcentages, des échelles, des vitesses moyennes, des conversions d'unités sont traitées avec les mêmes procédés. Aucun procédé expert n'a à être enseigné à ce niveau : ceux-ci seront étudiés au collège. La touche « % » de la calculatrice n'est donc pas utilisée au cycle 3.

II. Quels aspects de la proportionnalité prendre en compte ?

Pour choisir ou construire les activités proposées aux élèves, l'enseignant doit disposer d'un cadre conceptuel, précisant en particulier :

- une classification des situations envisageables ;
- une typologie des problèmes auxquelles elles peuvent donner lieu.

1. La proportionnalité peut être examinée dans trois cadres différents

- Le cadre des grandeurs : utilisation de nombres « concrets », correspondant à des quantités ou à des mesures ; le choix d'unités appropriées permet de se ramener au cadre numérique.
- Le cadre numérique : les nombres sont alors manipulés de manière abstraite, en référence uniquement à des propriétés connues relatives aux suites proportionnelles ou à la fonction linéaire.
- Le cadre graphique : propriétés des représentations graphiques de fonctions linéaires.

2. Situations servant de support à ces problèmes

Il existe plusieurs façons de caractériser les situations qui servent de support aux problèmes de proportionnalité.

- Situations où la proportionnalité intervient par convention sociale, le plus souvent dans des problèmes de nature économique (relation entre quantité et prix, par exemple) :
  - ainsi, pour la poisson, le prix à payer est souvent proportionnel à la masse ;
  - en revanche, le prix à payer pour affranchir une lettre n'est pas proportionnel à la masse.

  Il s'agit le plus souvent de <u>situations de la vie courante</u>.

  Pour ce type de situation (choix de la proportionnalité, par convention), soit les élèves sont préalablement informés (situations familières), soit le fait que la proportionnalité a été retenue doit être annoncée explicitement dans l'énoncé.

- Situations où la proportionnalité permet une modélisation d'un phénomène
  - physique : masse suspendue et allongement du ressort, engrenages, mouvement uniforme, ...

- géométrique : longueur et diamètre du cercle, côté et diagonale du carré, ...

Dans de telles situations, c'est le recours à l'expérimentation (notamment pour les phénomènes physiques) ou l'utilisation de théorèmes (Pythagore pour le cas du carré) qui permettent de mettre en évidence les relations entre grandeurs.

- Situations où la proportionnalité intervient comme outil pour définir de nouveaux concepts

  La proportionnalité est ici utilisée pour produire de nouvelles notions : échelle, pourcentage, débit, masse volumique, ...

3. Typologie des problèmes posés

- Problèmes de reconnaissance de la proportionnalité, dans les différents cadres, en utilisant des connaissances familières, en procédant à une expérience, en examinant les suites de nombres en correspondance, en réalisant une représentation graphique.

- Problèmes de quatrième proportionnelle avec recherche de l'un des nombres manquants dans une relation qui met en jeu deux couples de nombres, comme par exemple :

a	b
?	c

  Ce type de problèmes peut porter :

  - sur des grandeurs de même nature (par exemple, des longueurs dans le cas d'un agrandissement de figures ou problème d'échelle), exprimées avec la même unité (cm, cm) ou avec des unités différentes (km, cm) ;
  - sur des grandeurs de nature différente (masses et longueurs, par exemple), situées dans le même registre (cm, cm²), ou dans des registres différents (g, cm) ou (km, h).

- Problèmes de comparaison

  Par exemple, dans le cas de mélanges interviennent en général au moins trois quantités : le tout et au moins deux parties complémentaires (boisson composée de sirop de fraise et d'eau, par exemple), et on peut être amené à comparer :

  - une partie par rapport au tout (quantité de sirop par rapport à la quantité de boisson) ;
  - une partie par rapport à l'autre partie (quantité de sirop par rapport à la quantité d'eau).

- Problèmes de double proportionnalité

  Cas d'une variable proportionnelle à deux autres variables qui peuvent être modifiées de manière indépendante.

  Par exemple, l'aire du rectangle est proportionnelle à la largeur et à la longueur du rectangle ; le prix à payer pour un séjour est fonction du nombre de personnes et du nombre de jours.

- Problèmes de passage d'un cadre à un autre : du cadre des grandeurs au cadre numérique, du cadre graphique au cadre numérique, par exemple.

III. Les procédures de résolution

1. Utilisation du coefficient de proportionnalité

La fonction f définie dans de R dans R par : pour tout x, réel, $f(x) = ax$, où a est un réel, est une fonction linéaire, où a est le coefficient de proportionnalité.

Exemple :

Si une voiture consomme 9 litres d'essence aux 100 km, la consommation moyenne d'essence est donnée par : $f(x) = 0{,}09x$ où x est le nombre de kilomètres parcourus. C'est une fonction linéaire de coefficient de proportionnalité 0,09.

La procédure qui consiste à utiliser le coefficient de proportionnalité est une procédure de type fonction. Le coefficient de proportionnalité est un opérateur externe.

2. Utilisation de la propriété multiplicative de la fonction linéaire

Pour une fonction f linéaire, on a, pour k réel, pour tout x réel : $f(kx) = kf(x)$. Ceci signifie que, si on passe de x_1 à x_2 en multipliant par un réel k, on passe de $f(x_1)$ à $f(x_2)$ en multipliant par le même réel k.

Dans l'exemple, si une voiture consomme 9 litres d'essence aux 100 km, pour en faire 300, la consommation d'essence est multipliée par 3 : $f(300) = 3f(100)$

Cette procédure est de type scalaire. On utilise un opérateur interne.

3. Utilisation de la propriété additive de la fonction linéaire

Pour tous x et y réels, on a : $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Ceci signifie que si on reconnaît un nombre x_3 comme somme de 2 autres nombres x_1 et x_2, on obtient $f(x_3)$ comme la somme de $f(x_1)$ et $f(x_2)$.

Dans l'exemple, la distance 400 km est reconnue comme la somme des distances 100 km et 300 km dont on a calculé les consommations d'essence correspondantes. D'où : $f(400) = f(100) + f(300)$.

4. Utilisation de la « propriété des écarts constants »

C'est une conséquence de la propriété énoncée précédemment.

Elle consiste à remarquer que, si une série de nombres est donnée en rajoutant toujours le même nombre au précédent, alors leurs images par f sont également obtenues en rajoutant toujours le même nombre à l'image précédente.

En effet, si f est une fonction linéaire de coefficient de proportionnalité a, si k est réel, pour tout x_1 et x_2 de R, on a :

$$f(x_2) = f(x_1) + f(x_2 - x_1)$$

d'où : $$f(x_2) = f(x_1) + k(x_2 - x_1)$$

Supposons que $x_2 - x_1 = d$ (constante réelle), alors $f(x_2) = f(x_1) + kd$, ce qui montre bien que $f(x_2)$ est obtenu à partir de $f(x_1)$, en rajoutant une constante.

Exemple :

Kilomètres parcourus	Consommation d'essence
100 + 100 200 + 100 300 + 100 400	9 + 9 18 + 9 27 + 9 36

5. Retour à l'unité (règle de trois)

Il s'agit de raisonner en se ramenant à une unité : on obtient avec les notations précédentes $f(1) = a$.

Exemple : pour 100 km, la consommation d'essence est de 9 litres, pour 1 km elle est de 0,09 litre.

On retrouve bien le coefficient de proportionnalité a. Il est alors possible de calculer la consommation pour n'importe quelle distance parcourue ($f(x) = ax$).

La règle de trois est dérivée de ce raisonnement.

6. Le « produit en croix »

Dans une proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens : a, c étant de réels, b et d des réels non nuls, on a :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc}$$

On obtient donc ainsi une « quatrième proportionnelle », quand on connaît trois termes d'une proportion.

Exemple : si, pour 500 km, la consommation est de 45 litres d'essence, pour 850 km elle sera de :

$$\frac{45}{500} \times 850 = 75 \text{ litres}$$

Il est donc possible de trouver la consommation d'essence pour 850 km sans repasser par la consommation aux 100 km.

Trois types de procédures peuvent être mises en œuvre par les élèves de l'école primaire :

- utilisation des propriétés additives et multiplicatives de la linéarité (avec le cas particulier du passage par l'unité) ;
- mise en évidence et utilisation du coefficient de proportionnalité ;
- recours à une représentation graphique.

Le recours à ces diverses procédures dépend du choix, dans l'énoncé, des valeurs choisies pour les variables de la situation évoquée, notamment les variables numériques. Les autres procédures seront travaillées au collège.

IV. Les outils

Il s'agit de savoir comment un élève résout un problème de proportionnalité, avec quel traitement et quels sont les savoirs en jeu.

1. Tableaux

Les tableaux sont des moyens commodes de noter les nombres afin d'effectuer les calculs.

En utilisant l'opérateur externe :

x_1	x_2
y_1	...

x a

En utilisant l'opérateur interne :

$\times k$

x_1	x_2
y_1	...

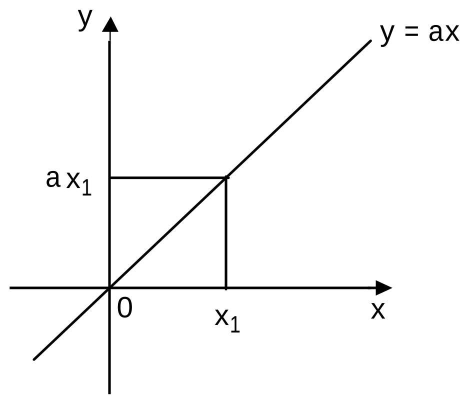
En utilisant le produit en croix :

x_1	x_2
y_1	...

On a alors : $y_2 = \dfrac{x_2 y_1}{x_1}$

2. <u>Graphiques</u>

La fonction linéaire peut se représenter graphiquement dans un repère par une droite passant par l'origine.



V. Les principales variables didactiques dans les problèmes de proportionnalité

1. <u>Les relations entre les nombres donnés</u>

- Le coefficient de proportionnalité entre les grandeurs en jeu peut ou non être choisi pour favoriser le recours aux procédures qui s'appuient sur son identification : entier (simple ou non), décimal (simple ou non), fractionnaire.
- Les rapports de linéarité (rapports entre nombres relevant d'une même grandeur) peuvent également être ou non choisis pour favoriser le recours aux procédures de type « linéarité » : entier (simple ou non), décimal (simple ou non), fractionnaire ; de même, les relations entre les nombres relevant d'une même grandeur peuvent ou non faciliter l'obtention de certains nombres par combinaison linéaire.

2. Les types de nombres

   Le choix des nombres peut ou non favoriser le recours au calcul mental (à mettre en relation avec les variables précédentes).

3. Le nombre de couples donnés

   Il peut favoriser la multiplicité des combinaisons linéaires pour obtenir un nombre déterminé ou faciliter la mise en évidence du coefficient de proportionnalité.

4. Le type de situation

   Il permet ou non une validation par le milieu.

VI. Les difficultés des élèves

- L'élève doit identifier les grandeurs en relation dans la situation proposée. Il est nécessaire que cette tâche soit le plus souvent assumée par les élèves, et donc que la situation ne soit pas déjà schématisée sous forme de tableau. La réalisation du tableau est, en effet, une manière pour l'élève de prendre conscience des grandeurs en relation.
- L'élève doit identifier que la situation relève bien du modèle proportionnel : cela est rarement dit explicitement dans l'énoncé et l'élève doit donc faire appel à des connaissances extérieures (expérience sociale, par exemple)... ou deviner l'intention du maître qui lui a proposé le problème (contrat didactique). Il appartient donc à l'école non seulement d'enseigner les procédures relatives au traitement des problèmes relevant du modèle proportionnel, mais également de doter les élèves de situations de référence suffisamment nombreuses, issues soit du domaine socio-économique (achats, échanges, ...), soit d'autres disciplines (physique, géographie, ...), ou encore du domaine mathématique (géométrie, mesure). Il est important que les situations étudiées ne relèvent pas toutes du modèle proportionnel, afin d'exercer la vigilance des élèves sur le choix du modèle et des procédures.

- Les situations de proportionnalité font apparaître une « augmentation » ou une « diminution » dans le passage de la première grandeur à la deuxième (exemple des situations d'agrandissement ou de réduction de figures). Or, pour de nombreux élèves, les idées d'augmentation et de diminution sont liées aux notions d'addition et de soustraction, ce qui constitue un obstacle à la reconnaissance du modèle proportionnel.

  Cet obstacle devra être traité par des situations didactiques appropriées.

- L'élève doit ensuite choisir une procédure de résolution parmi toutes celles qui sont possibles. Les domaines numériques dans lesquels sont choisis les nombres de l'énoncé et les relations entre ces nombres (notamment, rapport entre les 2 grandeurs, rapport entre les nombres relatifs à une même grandeur) jouent un rôle déterminant dans le choix d'une procédure : ce sont des variables didactiques décisives. Il appartient à l'enseignant d'en déterminer les valeurs avec soin pour favoriser, chez les élèves, le recours à tel ou tel type de procédure.

- La mise en œuvre de la procédure choisie est également source de nombreuses difficultés. Par exemple, comment combiner les nombres dans le cas de l'utilisation des propriétés de linéarité, comment déterminer le coefficient de proportionnalité si celui-ci n'est pas calculable mentalement, … ? L'exécution des calculs peut aussi être source de difficultés (décimaux et fractions, par exemple).