PROPORTIONNALITE

I. Suite de nombres proportionnelles

1. Définition

Deux suites de nombres réels (ayant le même nombre de termes) sont proportionnelles si on peut passer de chaque terme de la première suite au terme correspondant de la deuxième par un même opérateur multiplicatif.

L'opérateur multiplicatif qui permet de passer de chaque terme de la première suite à chaque terme de la seconde est aussi appelé coefficient de proportionnalité.

On représente souvent la correspondance entre les deux suites par un tableau.

Exemple :

$\times \frac{5}{2} \downarrow$

2	5	10	12	18
5	12,5	25	30	45

$\uparrow \times \frac{2}{5}$

Cas général :

$\times a \downarrow$

x_1	x_2	x_3	...	x_n
y_1	y_2	y_3	...	y_n

$\uparrow \times \frac{1}{a}$

On a :

$$y_1 = ax_1 \qquad y_2 = ax_2 \qquad y_3 = ax_3 \qquad \dots \qquad y_n = ax_n$$

Le coefficient de proportionnalité entre la deuxième suite et la première est l'inverse du coefficient de proportionnalité entre la première suite et la deuxième.

Les relations de type $y_n = ax_n$ traduisent le fait que si deux suites de nombres sont proportionnelles (a étant le coefficient de proportionnalité entre la première suite et la seconde), il existe une fonction appelée fonction linéaire, $f : R \longrightarrow R$

$$x \longmapsto ax$$

telle que la deuxième suite soit l'image de la première par cette fonction.

2. Propriétés numériques des suites proportionnelles

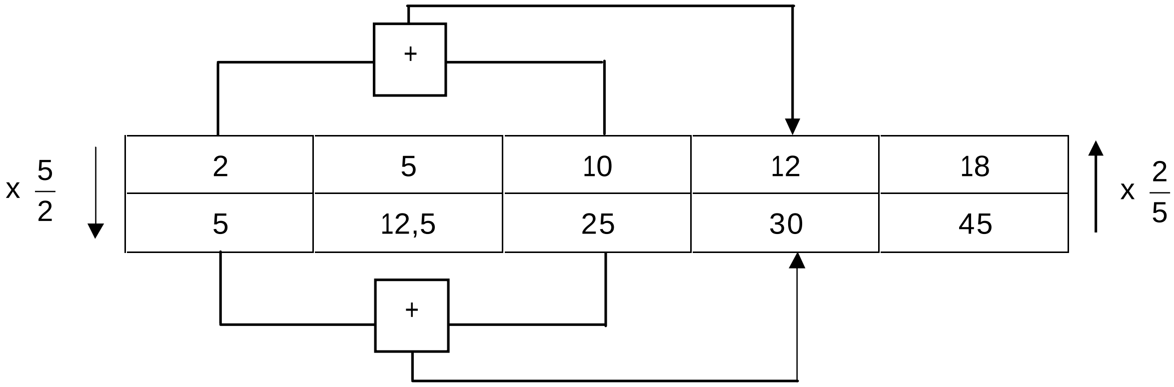
- Propriétés relatives à l'ordre

  Si deux suites proportionnelles sont formées de nombres positifs, l'ordre selon lequel sont rangés les nombres de la première suite est le même que celui selon lequel sont rangés les nombres de la deuxième suite.

  On dit que pour les nombres positifs, la proportionnalité respecte l'ordre ou que, dans R+, toute fonction linéaire est une fonction croissante.

- Propriétés de linéarité

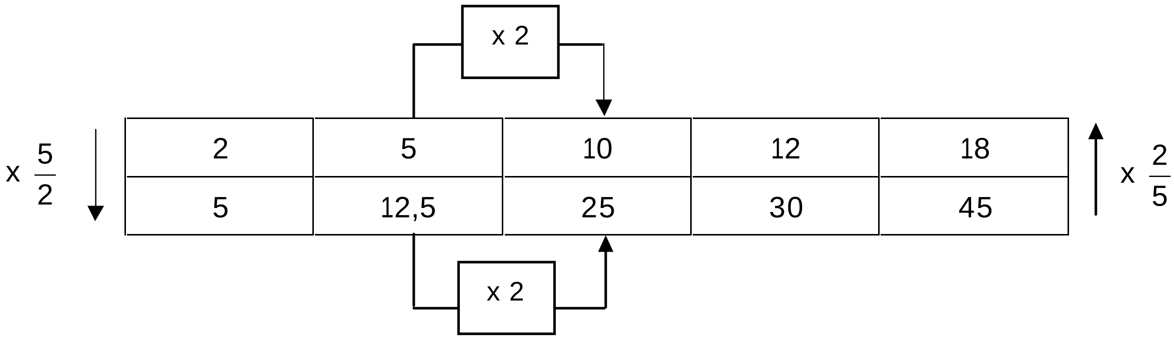
- Propriété additive



2	5	10	12	18
5	12,5	25	30	45

Quels que soient les nombres x_1 et x_2, $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

- Propriété multiplicative



2	5	10	12	18
5	12,5	25	30	45

$f(kx) = k \,.\, f(x)$

k est appelé coefficient scalaire.

- Propriété des rapports égaux

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = \frac{y_n}{x_n} = a$$

(à condition qu'aucun des nombres x_i ne soit nul).

- Propriété dite « du produit en croix »

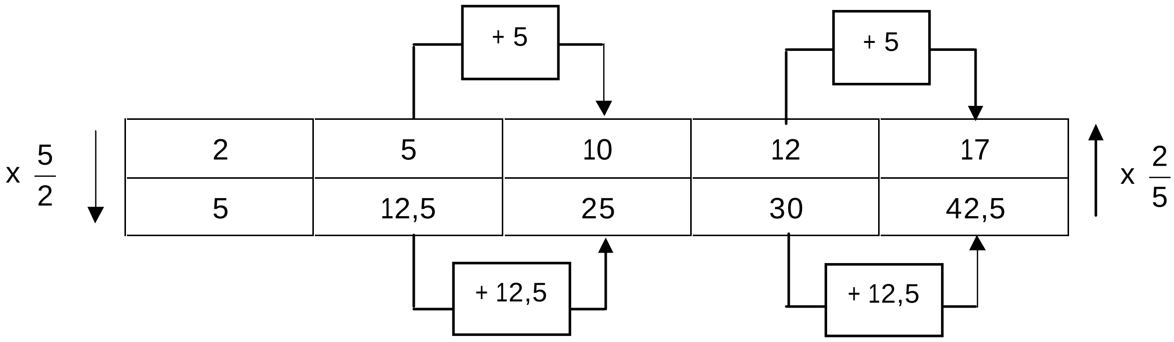
A partir de l'égalité des rapports $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \ldots = \frac{y_n}{x_n} = a$, il est facile de déduire les égalités du type :

$x_1\,y_2 = x_2\,y_1$ ou $y_1\,x_3 = x_1\,y_3$ …

Deux suites proportionnelles vérifient donc cette propriété dite « du produit en croix ».

- Propriété des écarts

Pour deux suites proportionnelles, à des écarts égaux entre nombres de la première suite correspondent des écarts égaux entre les nombres correspondants de la deuxième suite.



2	5	10	12	17
5	12,5	25	30	42,5

- Propriété graphique des suites proportionnelles

Soit deux suites proportionnelles, on considère les couples de nombres formés par un nombre de la première suite et son image dans la deuxième (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; ….

Soit un système d'axes gradués régulièrement à partir de 0 (repère du plan), les points correspondants à ces couples sont alignés sur une droite qui passe par l'origine des axes. Cette propriété est caractéristique des suites proportionnelles et des fonctions linéaires.

II. Situations de proportionnalité

1. Vitesse

- Exemple

Le car assurant la liaison de Clermont-Ferrand à Mende parcourt les 180 km en 3 heures. Pour ce qui suit, bien que cela ne corresponde pas à la réalité, on fera l'hypothèse qu'il roule partout à la même vitesse. Avec cette hypothèse, on peut dire qu'en 1 heure, il fait 60 km. Sa vitesse est de v = 60 km/h.

Si le car roulait pendant 2 h, il ferait 120 km. En 4 h, il ferait 240 km. Pour 5 h ce serait 5 fois plus soit 300 km et pour 1 h 30 min, ce serait 90 km (60 km pour 1 h et 30 km pour la demi-heure supplémentaire).

Les distances parcourues sont reliées aux durées par une fonction linéaire dont le coefficient est la vitesse.

- Généralisation

Si un mobile se déplace à la vitesse constante v (exprimée en km/h ou km.h^{-1}), il parcourt pendant une durée t (en heures) la distance d = v x t (kilomètres).

S'il a parcouru la distance d, la durée du trajet a été de $t = \frac{d}{v}$.

Si d est la distance parcourue pendant une durée t, la vitesse moyenne est $v = \frac{d}{t}$.

2. Agrandissement, réduction

- Exemple

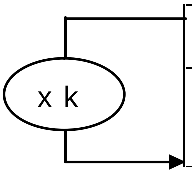
On considère une figure que l'on souhaite agrandir.

Si on la veut double, toutes ses dimensions doivent être multipliées par 2. Si on la veut une fois et demie plus grande, toutes ses dimensions doivent être multipliées par 1,5…

Le nombre utilisé, coefficient multiplicateur, permet de passer des dimensions initiales aux nouvelles dimensions. Ce même coefficient multiplicateur doit être appliqué à toutes les dimensions.

- Généralisation

Supposons qu'on dispose d'une figure dont les dimensions sont inscrites dans la première ligne du tableau suivant et qu'on veuille la transformer (l'agrandir ou la réduire) dans un rapport k (k réel positif). Les dimensions de la nouvelle figure se trouvent à la seconde ligne du tableau.



Dimensions initiales	d_1	d_2	d_3	...
Dimensions de la nouvelle figure	k x d_1	k x d_2	k x d_3	...

Si k >1, il s'agit d'un agrandissement dans la mesure où les dimensions de la figure augmentent.

Si $0 < k < 1$ il s'agit d'une réduction (les dimensions diminuent).

3. Echelle

La notion d'échelles relève elle aussi de la proportionnalité. On représente une réalité physique (terrain, voiture, ...) par un dessin ou une maquette établie en respectant les proportions. Il y a donc proportionnalité entre les dimensions dans la réalité et les dimensions sur la représentation de cette réalité.

- Exemples :
  - Dans une échelle de « 2 cm pour 5 m », 5 m dans la réalité sont représentés par 2 cm.
  - Dans une échelle de 1/25 000, 25 000 cm sont représentés par 1 cm. 1/25 000 représente le coefficient de proportionnalité entre les dimensions réelles et les dimensions représentées. Dans ce cas les unités des dimensions doivent être les mêmes.

- Généralisation

  Les échelles sont couramment exprimées par des rationnels de la forme $\frac{1}{a}$ où a est un entier naturel non nul simple comme 2, 10, 100 000 ...

  On écrit par exemple 1/125 000 (et on lit « un vingt-cinq millième »).

  Le double principe d'utilisation des échelles est toujours le même :

  - pour faire une carte ou un plan ou un dessin technique à l'échelle 1/a on prend les mesures réelles et on les divise par a ;
  - pour utiliser un plan à l'échelle 1/a, c'est-à-dire pour connaître les dimensions réelles d'un objet, on multiplie ses dimensions sur le plan par a.

  L'utilisation d'échelles conduit souvent à effectuer des conversions d'unités.

4. Pourcentage

- Calcul d'un pourcentage

Soit A un ensemble fini ayant a éléments et B une partie de A comportant b éléments.

Pour trouver le pourcentage que représente B de A, on commence par chercher le taux $\frac{b}{a}$ d'éléments de B parmi ceux de A.

Le pourcentage que B représente dans A est obtenu en imaginant que A comporte 100 éléments et que le taux d'éléments de B parmi ceux de A reste égal à $\frac{b}{a}$. Le pourcentage que représente B dans A est $\frac{b}{a}$ x 100.

- Prendre un pourcentage

Soit E un ensemble fini ayant n éléments et a un réel ($0 \leq a \leq 1\,00$). Pour prendre a % des éléments de E, on commence par faire comme si E avait 100 éléments. On en prendrait alors a.

Prendre a % d'un nombre, c'est le multiplier par $\frac{a}{100}$.

- Augmentation, diminution de a%

Augmenter de a %, c'est multiplier par $1 + \frac{a}{100}$.

Diminuer de a %, c'est multiplier par $1 - \frac{a}{100}$.