

**L'usage de la calculatrice est autorisé**

**Exercice 1 : Suites numériques (5 points)**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} \end{cases}$$

1. a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
b) Démontrer que la suite  $(u_n)$  n'est ni arithmétique, ni géométrique.
2. On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n - 1$  pour tout entier naturel  $n$ .  
a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$ .  
b) Démontre que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3. a) Montrer que  $v_n = 5\left(\frac{1}{5}\right)^n$ . En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .  
b) Calculer  $A_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  et en déduire  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .  
c) Calculer la limite de  $A_n$  puis la limite de  $S_n$ .

**Exercice 2 : Etude d'une fonction comportant ln (6 points)**

La courbe  $(C)$  est la représentation graphique de la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :  
 $f(x) = -x^2 + 10x - 9 - 8 \ln x$ .

1. Déterminer la limite de  $f$  en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2. a) Vérifier que :  $f(x) = x^2\left(-1 + \frac{10}{x} - \frac{9}{x^2} - \frac{8 \ln x}{x^2}\right)$ .  
b) En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
3. Démontrer que, pour tout réel  $x$  de  $]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{-2(x-1)(x-4)}{x}$  où  $f'$  désigne la fonction dérivée de  $f$ .
4. Etudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$  dans l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
5. Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$ .
6. a) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci – après (les résultats seront arrondis à  $10^{-4}$  près).

$x$	6,18	6,19	6,20	6,21
$f(x)$				

- b) L'équation  $f(x) = 0$  admet deux solutions : 1 et  $\alpha$  dans  $]0; +\infty[$ . A l'aide de la question précédente, donner sans justification un encadrement à  $10^{-2}$  près de  $\alpha$ .
7. Tracer la restriction de la courbe  $(C)$  sur l'intervalle  $]0; 8]$  dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$ .

## Problème : Statistiques et probabilités conditionnelles (9 points)

### Les parties A et B sont indépendantes

Tous les élève d'un lycée du Gabon sont abonnés dans l'un des deux clubs suivants ; le club littéraire  $L$  et le club scientifique  $S$ .

On s'intéresse aux membres de ces deux clubs.

### Partie A : Dans le club littéraire $L$ (5 points)

Le tableau suivant donne le nombre de membres du club littéraire  $L$  lors des cinq premiers mois de l'année 2016.

Mois	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai
Rang du mois $x_i$	1	2	3	4	5
Nombre de membres $y_i$	51	49	48	46	44

1. a) Représenter le nuage associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère  $(O; I, J)$ . Unités graphiques : 1 cm pour une unité sur l'axe  $(OI)$  et 1 cm pour dix unités sur l'axe  $(OJ)$ .
- b) Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  du nuage. Placer  $G$  dans le repère précédent.
- c) Un ajustement affine est-il justifié ? Justifier votre réponse.
2. a) Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de  $y$  en  $x$  par la méthode des moindres carrés.
- b) Tracer cette droite dans le repère  $(O; I, J)$ .
- c) A l'aide de cet ajustement, déterminer le nombre de membres que le club littéraire peut estimer avoir au mois de décembre 2016 ? (Arrondir à l'unité près).

### Partie B : Dans les deux clubs (4 points)

On a constaté après une assez longue période d'observation que :

- 65% des élèves sont membres du club  $L$  ;
- Dans le club  $L$ , 60% des membres sont des filles ;
- Dans le club  $S$ ,  $\frac{4}{5}$  des membres sont des garçons ;

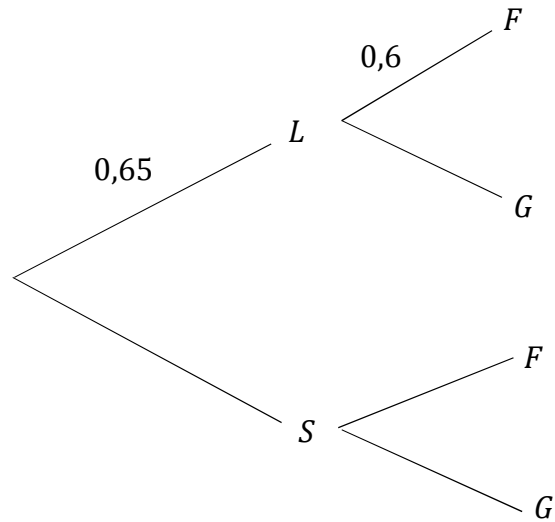
On choisit au hasard un élève de ce lycée.

On considère les événements suivants :

- $L$  : « L'élève choisi est un membre du club littéraire  $L$  »
- $S$  : « L'élève choisi est un membre du club scientifique  $S$  »
- $F$  : « L'élève choisi est une fille »
- $G$  : « L'élève choisi est un garçon »

**Pour toutes les questions, on donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.**

1. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci – dessous :



2. Déterminer la probabilité de l'événement : « L'élève choisi est une fille est dans le club  $L$  ».
3. Calculer la probabilité d l'événement  $F$ .
4. L'élève choisi est une fille. Déterminer la probabilité qu'elle soit membre du club  $L$ .