<u>Quelques mots sur : DES FRACTIONS aux DECIMAUX</u>

L'objectif est d'essayer de faire un éclairage sur les connaissances didactiques et de proposer des pistes de réflexion, de progression et d'activités.

Sommaire du document

I. Les Fractions

1. <u>Rappels des programmes 2008</u>

Rappels des connaissances et compétences que les élèves doivent maîtriser

<u>Les fractions</u>

- Nommer les fractions simples et décimales en utilisant le vocabulaire : demi, tiers, quart, dixième, centième.
- Utiliser ces fractions dans des cas simples de partage ou de codage de mesures de grandeurs.
- Encadrer une fraction simple par deux entiers consécutifs
- Ecrire une fraction sous forme de somme d'un entier et d'une fraction < 1
- Ajouter deux fractions décimales ou deux fractions simples de même dénominateur.

2. <u>Ce qu'il convient de savoir</u> (pour les élèves … et pour les maîtres) :

<u>Qu'est-ce qu'une fraction</u> ? du latin FRACTIO, de FRANGERE, « briser »

- *Une première définition extraite de « Les mathématiques expliquées à mes filles » Denis Guedj*
  « Une fraction est composée de deux entiers et d'une *barre.* Par exemple 7/5. Au-dessous de la barre, « celui qui nomme », le *dénominateur*, ici, il s'agit de cinquièmes, cinquième partie de l'unité. Au-dessus, le *numérateur,* « celui qui nombre » : ici 7.
  La fraction nous dit qu'il y a sept cinquième. »
- *Une seconde définition* : Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers relatifs. RATIO en latin signifie « quotient ».
  On appelle fraction l'écriture sous la forme *a/b* du quotient d'un entier relatif *a* par un autre entier relatif non nul *b*.
  Cela signifie que tous les résultats de divisions d'entiers sont des nombres rationnels et tous les rationnels peuvent s'écrire sous forme de fraction.
  L'objet mathématique qui se cache **derrière une « fraction » est le nombre rationnel.**

<u>A l'école primaire</u> :

- En préalable aura été abordée la division euclidienne (*qui ne met en jeu que des nombres entiers*)
- La notion de **fraction fait référence à un partage**. Les fractions font principalement référence à une situation réelle, la fraction partage de la fraction unité.
  Remarques :
  - *Les programmes 2008 parlent de « fractions simples » (un demi, un tiers, un quart) et des autres fractions, dont les « fractions décimales », qui vont permettre d'aborder le nombre décimal.*
  - *Les fractions « simples » (usuelles) ont des caractéristiques semblables :*
    - *elles sont « inférieures » à 1 (l'unité)*
    - *leur numérateur vaut 1*
    - *leur représentation est souvent celle du fromage !!! (attention à cette représentation souvent privilégiée)*
- Si en primaire, la **fraction** est donnée en référence à l'unité (*exemple : 2/3 c'est deux fois 1/3*), <u>au collège</u>, on s'appuie sur la définition première du quotient (*2/3 c'est le nombre qui multiplié par 3 donne 2, c'est aussi le tiers de 2)*
- Les **décimaux sont mis en relation avec les fractions décimales**.
  Cette notion demande un travail approfondi sur la **<u>numération de position des entiers.</u>** (objectif du cycle 2)
- <u>L'**objectif** principalement visé par **l'étude des fractions est de donner du sens aux nombres décimaux**</u> **notés comme fractions décimales**. Ainsi, tant pour les fractions que pour les décimaux, le but premier est la compréhension de ces nouveaux « nombres » (ou représentations de nombres) (de leur écriture et lecture) pour pouvoir écrire certaines quantités non entières.

II. Les nombres décimaux

1. Rappels des programmes 2008

Rappels des connaissances et compétences que les élèves doivent maîtriser

Les nombres décimaux

- Connaître la valeur de chacun des chiffres de la partie décimale en fonction de sa position (jusqu'au 1/100ème - CM2 : jusqu'au 1/10 000ème)
- Savoir les repérer, les placer sur une droite graduée.
- Savoir les comparer, les ranger
- Savoir les encadrer par deux nombres entiers consécutifs.
- Passer d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement
- Produire des décompositions liées à une écriture à virgule, en utilisant 10; 100; 1 000… et 0,1; 0,01; 0,001…
- Donner une valeur approchée à l'unité près, au dixième ou centième près

2. Ce qu'il convient de savoir (pour les élèves … et pour les maîtres) :

Qu'est-ce qu'un nombre décimal ? du latin FRACTIO, de FRANGERE, « briser »

- *Une première définition :* un nombre décimal est un nombre appartenant à l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire au moyen de la numération décimale. *(un nombre entier peut être considéré comme un nombre décimal particulier 5 = 5,0 = 5,00 …).*
  Le nombre décimal correspond au quotient d'un entier par une puissance de 10. *(34,567 = 34567/1000 = 34 + 5/10 + 6/100 + 7/1000)*
  Les décimaux peuvent s'écrire comme des sommes de puissances de dix et comme des fractions particulières (numérateur entier et dénominateur puissance de dix)
- *Une seconde définition* extraite *de « Les mathématiques expliquées à mes filles » Denis Guedj :*
  « un nombre décimal est un nombre qui un nombre fini de décimales non nulles… *1/8 = 0,125, par contre 1/3 = 0,333… n'est pas un nombre décimal* »

Comment donc définir un nombre décimal ?

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale. (c'est une façon d'écrire une fraction décimale) ou c'est un nombre à virgule qui se termine.
Donc un nombre entier est un nombre décimal (3,000)

→ ***Attention aux définitions telles*** :

- un décimal est un nombre à virgule.
- la partie décimale n'est pas un nombre plus petit que un.

Exemple :

Dans 123, 42 → *on ne doit pas dire 42 est plus petit que 1*
par contre on pourra dire 42 centièmes est plus petit que 1 ou 0,42 < 1

Exemple :

Montrer qu'il y a des nombres qui ne se terminent jamais. ***Un nombre décimal se termine.***
1/3 pour montrer que cela ne finit pas
5/3 pour introduire Pie qui n'est pas un décimal

III. Les difficultés rencontrées

Quelques-unes des difficultés rencontrées :

- La confusion et l'amalgame entre fraction et décimal *(exemple : 30,6 = 30/6* ou *17 + 5/100 = 17,500)* → le symbole « séparateur » (virgule # barre) n'a pas la même signification.
- Le nombre décimal est perçu comme deux nombres entiers juxtaposés et séparés par une virgule. *(exemple de 567,34 : on a d'un côté 567 et de l'autre 34)*
- Le nombre décimal est perçu comme symétrique par rapport à la virgule.
- Le problème de la comparaison des nombres faite sur la longueur des nombres *(exemple :* 8,9 *perçu comme plus petit que* 8,8999 ou 23,1 *perçu comme plus petit que* 12, 234) → savoir que la taille du nombre n'influe pas sur la quantité qu'il représente.
- Le problème de la perception de la valeur des chiffres selon leur place *(exemple : quel est le nombre le plus proche de 8 entre 7,9 et 8,08)*
- Le problème de la multiplication par 10..100… *(exemple de 14,5 x 100 : perçu comme 1400,5* ou *14,500* ou *1400,500* ou *145)* → la virgule est perçue soit comme une frontière et le 0 se met soit d'un côté soit de l'autre – soit elle disparaît trop tôt…

Quelques raisons à ces difficultés/erreurs :

- **L'écriture même des nombres décimaux** : celle-ci ressemble à celle des nombres entiers, seule la virgule permet de les distinguer.
- Le problème du à la **non(mal)maîtrise de la numération de position** qui empêche de percevoir le « rapport de puissance/valeur » des chiffres des nombres.
- **L'usage social** de ces nombres qui au quotidien revoie le plus souvent à des mesures entières à deux unités « amalgamées » *(exemples : 4,35 € pour 4€ 35c* ou *3,75m pour 3m75cm)* où l'idée de fractionnement disparaît.
- La **manière de les nommer** : pour 4,35 on dit « 4 virgule 35 » voire « quatre trente-cinq » alors qu'on devrait dire « 4 et 35 centièmes » ou « 4 et 3 dixièmes et 5 centièmes » ou encore « 4 virgule 35 centièmes » ou « 4 virgule 3 dixièmes et 5 centièmes ».
- Les **techniques de calcul sont globalement similaires** à celles des entiers.
- La **perception basée uniquement sur la position** pour les termes de « dixième », « centième », « millième » et sans appui sur le concept qu'ils contiennent « dix fois plus petit », « cent fois plus petit », mille fois plus petit »

IV. Une progression possible :

D'une manière générale :

- L'approche se fera par les fractions
- Puis les fractions décimales
- Des décompositions
- Un travail sur la numération de position (nommer le chiffre en fonction de sa position)
- Placements sur une droite graduée
- Par des mesures de bandes
- Par des quadrillages

Une progression depuis le CP :

En CP :	les entiers inférieurs à 100…
En CE1:	les entiers inférieurs à 1 000…
En CE2:	les entiers inférieurs à un million…
En CM1:	les entiers inférieurs à un milliard….
	les fractions
	les fractions décimales.
	les nombres décimaux (jusqu'au centième)
En CM2 :	les nombres entiers
	les fractions
	les fractions décimales.
	les nombres décimaux (jusqu'au dix-millième)

Les points d'appui en classe pour travailler les nombres décimaux en CM :

- calcul mental
- mesure
- fractions
- opérations

V. Des préconisations *(revoir aussi le point III sur les difficultés)* :

- Insister sur la **numération de position des nombres entiers, des décimaux** *(la virgule et sa signification)*, **les fractions** *(la barre et sa signification qui est différente de celle de la virgule).*
- Suivre une **progression** qui débute par **les fractions**, puis **les fractions décimales** et finit par **les décimaux**. (→ voir progression ci avant)
- Il convient de bien faire prendre conscience de l'**idée de fractionnements de plus en plus petits** (dixièmes, centièmes, millièmes…)
- Ne **pas se « figer » sur la partition de l'unité** mais **aussi sur la partition d'une pluralité**. *(exemples pour 2/3 : on a partition de l'unité lorsque la grandeur d'une part correspond à 2/3 de l'unité mais on a partition de la pluralité lorsque 2/3 se considère comme 2 divisé par 3 soit 2 éléments/unités partagés en 3 parts égales)*
- Attention à ne **pas en faire des « automaths »** (Stella Baruk) ou à **un enseignement « à coups de règles »** (Roland Charnay)
  - pour la **comparaison de deux décimaux**, attention à ne pas induire directement la règle selon laquelle il faut écrire des zéros à droite de la virgule jusqu'à ce qu'ils aient le même nombre de chiffres après la virgule
    (ex. : pour comparer 1,015 et 1,05 : un élève qui applique cette règle peut très bien réussir sans, pour autant, comprendre ce que sont des centièmes par rapport à des millièmes)
    Cela masque la nature de fraction des nombres décimaux et peut conduire de nombreux élèves à les assimiler à des entiers.
  - Concernant la **multiplication par 10 – 100 – 1000** *(idem, pour la division par 10, 100…où l'on décale la virgule de 1 ou 2 rangs vers la gauche.)*

    → **les règles « ajouter un 0 ou deux 0 à droite » et « déplacer la virgule d'un ou deux rangs à droite » risquent de générer des erreurs** si on les « pose » trop tôt, sans compréhension de ce qui se passe.

    <u>Exemples :</u>
    *- Afin d'éviter des erreurs de type : 26,34 x 10 = 26,340 ou = 260,34 ou = 260,340 …, il convient que les élèves, dès le travail avec les entiers, comprennent 24 x 10, c'est **« 10 fois plus »** … et qu'on va écrire 240 … car le nombre vaut « 10 fois plus », il passe dans la classe supérieure*
    → on met donc un zéro à droite du 4 (qui devient un 4 de Dizaine)
    → on évitera de dire « on ajoute un zéro à droite de l'unité » car le zéro représente alors les unités.
    *- Si on multiplie par 100, le nombre vaut **« 100 fois plus »**, grandit de « fois 100 », il saute deux classes … 24 x 100 … 2 400 → on met deux zéros à droite du 4 (qui devient un 4 de Centaine)*

    → **Comment expliquer dans** *26,34* ***x 10*** *= 263,4* **ce qui se passe avant de poser la règle ?**
    - D'abord reconnaître 26,34 comme étant 2 dizaines + 6 unités + 3 dixièmes + 5 centièmes
    - Puis savoir que multiplier un nombre par 10 revient à multiplier chacun des termes de sa décomposition par 10
    - Ensuite, savoir que 20 dizaines, c'est 2 centaines (car 10 dizaines c'est 1 centaine) que 60 unités c'est 6 dizaines (car10 unités c'est une dizaine), savoir que 30 dixièmes, c'est 3 unités (car 10 dixièmes c'est une unité)…

    → **En résumé, il faut que les élèves sachent et comprennent que tant pour les entiers que pour les décimaux, « <u>quand on multiplie par 10 »</u> :**
    - **chaque chiffre** du nombre multiplié **prend une valeur « 10 fois plus grande »**

- **ce n'est pas la virgule qui se déplace mais les chiffres qui « changent de valeur, donc de place ».**

- Tant pour les écritures fractionnaires que pour les nombres décimaux, faire prendre **appui sur la langue** et ce qu'elle dit pour mieux **percevoir les concepts de « dixièmes », de « centièmes »** … que les élèves ne soient pas que sur des significations spatiales « place par rapport à la virgule » mais sur des signification conceptuelles « dix fois plus petit »… → **oraliser et faire oraliser de manière systématique** lors des dictées de nombres (enseignant) ou des lectures de nombres (élèves).
- On peut enseigner le passage de l'écriture en fractions décimales à l'écriture à virgule des nombres décimaux comme un **changement de codage, une nouvelle écriture.** *L'utilisation de la calculette peut aider et renforcer cette perception…dans le cadre de recomposition de nombres… (Jeu à deux où le premier écrit une séquence de calcul 7 + 0,4 + 0,6 et l'autre doit trouver le résultat, la calculette permet de vérifier…)*
- Avant d'introduire l'addition de fractions, il convient de veiller à ce que les élèves :
    - maîtrisent l'écriture de type a/b
    - sachent produire des écritures équivalentes
    - sachent comparer des fractions

  On pourra ensuite mettre en évidence la spécificité de l'addition des fractions et l'usage du signe « + ».
- **L'utilisation des grandeurs et des mesures est intéressante**. Cependant, il faut veiller :
    - A d'abord travailler sur des **grandeurs « sans mesure avec des unités de mesures conventionnelles**, *m, cm, mm* », mais avec des unités non conventionnelles, *bande de papier, stylos qui représentent l'unité.* Cela facilitera l'appropriation de l'idée de fractionnement et évitera la confusion avec les entiers.

      En effet, dans un système conventionnel de mesure (longueur avec le mètre ou masse avec le gramme), les 1/10, les 1/100 … de l'unité ont des noms spécifiques (décimètre, centimètre…décigramme, centigramme…) et fonctionnent « comme des unités entières ».

      Il y a le risque de faire disparaître l'idée de fractionnement et l'idée de décimal.
    - **Ensuite, on peut travailler avec les unités conventionnelles** et notamment le Mètre, à l'appui notamment de la grande règle « jaune » graduée (présente dans la plupart des classes).

      → il conviendra de bien expliciter ce que disent les mots, les préfixes (déci, centi, milli, déca…), le rapport à la base dix « 10 fois moins », « 10 fois plus »…

      → lors de situations de mesures d'objet à l'aide d'un bande/unité, il conviendra de veiller à rester en base dix si on souhaite écrire sous forme de fractions décimales ou décimales le résultat de la mesure…
- Pour éviter que le nombre décimal ne soit perçu comme deux nombres entiers juxtaposés et séparés par une virgule. *(exemple de 567,34 : on a d'un côté 567 et de l'autre 34)*, veillez dans les « petites » classes à **ne pas utiliser la virgule comme élément de séparation entre les nombres** (comme c'est son usage en français entre les mots) *Préférez mettre un tiret, un point virgule… bref un signe qui ne soit pas un signe mathématique existant…même s'il est inconnu à ce niveau de classe.*
- Veiller à la **manière de nommer** les nombres : pour 4,35 **dire** « 4 et 35 centièmes » ou « 4 et 3 dixièmes et 5 centièmes » ou encore « 4 virgule 35 centièmes » ou « 4 virgule 3 dixièmes et 5 centièmes » au lieu dire « 4 virgule 35 » voire « quatre trente-cinq »
- Il faudrait aussi **travailler sur les zéros inutiles…**

En résumé

- **On débute le travail sur les « fractions » au primaire, dans le cadre bien précis des programmes. En particulier, on doit veiller à essayer d'installer solidement cette « notion », sachant que le collège assume la part importante liée aux opérations et au reste.**
- **<u>Quelques pistes pour que les élèves possèdent une bonne représentation des « fractions » (et des nombres décimaux)</u> :**

1. **S'appuyer sur les grandeurs et leurs mesures.**
2. **Changer de registre de travail, en particulier, favoriser le repérage d'une « fraction » (ou d'un nombre décimal) par rapport à d'autres nombres.**
3. **Ne pas focaliser tout l'enseignement sur les « fractions » inférieures à l'unité.**
4. **Pour donner un statut de nombre aux « fractions », il convient de réserver un moment important pour établir et consolider les techniques de calcul.**