

UNIVERSITÉ DE LILLE 1

TRAVAIL ENCADRÉ DE RECHERCHE

Spectre vs Pseudo-spectre

DIRIGÉ PAR B.BECKERMANN

*Présenté par Thibault GUILBERT & Mohamed
NASSIRI*

Mai 2017

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier chaleureusement Monsieur BECKER-MANN pour son aide apportée tout au long de ce semestre. Ses conseils sur les différents programmes utiles à la conception de notre projet et à leur installation (pas toujours si simple...) ont été plus que nécessaires. A lui et à sa motivation qu'il nous a transmise, merci. Merci à Gwenaëlle BOURGOIS pour son aide à l'élaboration de ce TER sur LaTeX.

Table des matières

Introduction	4
1 Définitions & Rappels	7
1.1 Définition du pseudo-spectre	7
1.2 Illustrations	9
1.3 Quelques propriétés	13
2 "La résolvante"	15
2.1 Définition	15
2.2 Continuité	15
2.3 Sous-harmonicité	18
3 "Nine theorems"	21
3.1 0 et le pseudo-spectre	21
3.2 Condition nécessaire : A diagonalisable	22
3.3 Minoration de la résolvante	23
3.4 A diagonalisable, conditionnement et pseudo-spectre	25
3.5 Pseudo-spectre d'une matrice perturbée	27
3.6 Minoration de la norme de A	29
3.7 Disques de Gerschgorin version pseudo-spectre	30
3.8 Sous-espace presque invariant...	32
3.9 ... et sous-espace invariant	32

4	Annexe	34
4.1	Norme spectrale	34
4.2	Conditionnement	35
4.3	Théorème de Van Neumann	36
4.4	Algorithme MatLab	37
	Bibliographie	46

Introduction

Les valeurs propres ont été l'objet d'études et de recherches depuis plus d'un siècle et demi. Elles servent en pratique dans de nombreux cas comme la résolution d'équations différentielles, ou d'équations aux dérivées partielles.

Depuis l'apparition de l'informatique, le calcul des valeurs propres par le biais d'algorithmes implémentés sur ordinateur s'est démocratisé. Ceci a permis d'obtenir des spectres de matrices bien plus simplement. C'est cette utilisation pratique qui a soulevé quelques problèmes sur ces valeurs propres. En effet, le calcul des valeurs propres via un ordinateur génère des erreurs d'arrondis, qui peut donner des valeurs très éloignées des valeurs propres théoriques. L'étude du pseudo-spectre nous permet d'étudier le comportement de ces valeurs (arrondies) et de maîtriser ainsi les erreurs.

Le pseudo spectre est une notion assez récente et a beaucoup été abordée pour répondre à des problèmes pratiques notamment. En 1974, Henry Landau crée l'approximation epsilon des valeurs propres (epsilon approximate eigenvalues). Jim Varah, en 1977, invente l'epsilon-spectre (epsilon-spectrum). C'est dans les années 1980 que Sergei Godunov et le groupe de Novosibirsk introduisent la notion de spectre figuré (spectral portrait). Le mathématicien Nick Trefethen quand à lui, invente en 1988 l'epsilon approximation des valeurs propres. Son travail prend racine dans les observations concernant les valeurs propres instables du spectre de matrices pour les équations différentielles. Enfin, en 1990, Diederich Hinrichsen et Tony Pritchard apportent la notion de lot de valeurs spectrales (spectral value set).

D'autres utilisations plus récentes du pseudo spectre ont inclus Wilkinson et Demmel, qui ont apparemment suivi les définitions de Varah, et Chatelin qui a suivi celles de Godunov. Les thèses de Nicholas N. Trefethen et Karel Pravda-Starov sur l'étude du pseudo-spectre d'opérateurs respectivement non linéaires et non auto-adjoints ont été réalisées respectivement en 1997 et 2006 et sont les deux études approfondies les plus récentes.

Il y a donc sur la notion de pseudo-spectre une littérature très abondante. Nous nous référons ici pour les définitions et les quelques résultats que nous allons rappeler (et démontrer) à l'article [1] de L.N.Trefethen et M.Embree. Indiquons également comme référence le livre paru plus récemment [2] de L.N.Trefethen et M.Embree. Cet ouvrage de synthèse dresse un large panorama de ce sujet et en donne de très nombreuses illustrations.

Biographie de Lloyd Nicholas Trefethen



(Lloyd) Nicholas Trefethen, (né le 30 août 1955) est professeur d'analyse numérique et responsable du Groupe d'analyse numérique au Mathematical Institute, Université d'Oxford .

Trefethen a obtenu sa licence de l'Université de Harvard en 1977 et son master de l'Université de Stanford en 1980. Son doctorat était sur la propagation des ondes et la stabilité pour les schémas aux différences finies sous la supervision de Joseph E. Olinger à l'Université de Stanford.

Après son doctorat, Trefethen a travaillé au Courant Institute of Mathematical Sciences à New York, au Massachusetts Institute of Technology et à l'Université Cornell , avant d'être nommé à une chaire à l' Université d'Oxford et à une Fellowship of Balliol College, à Oxford .

En 2009 , il a publié environ 125 articles de revues couvrant un large éventail de domaines au sein de l' analyse numérique et mathématiques appliquées, y compris les problèmes des valeurs propres des matrices non-normales et ses applications, les méthodes spectrales pour les équations différentielles, l'algèbre linéaire numérique, la mécanique des fluides, calcul en analyse complexe, et la théorie de l'approximation. Il est peut-être mieux connu pour son travail sur le pseudospectre de matrices et d'opérateurs non normaux . Ce travail couvre les aspects théoriques ainsi que les algorithmes numériques et les applications, y compris la mécanique des fluides, la solution numérique des équations aux dérivées partielles, l'algèbre linéaire numérique, le brassage des cartes, les matrices aléatoires, les équations différentielles et les lasers . Trefethen est actuellement un chercheur hautement cité de l' ISI .

Trefethen a écrit un certain nombre de livres sur l'analyse numérique, y compris *Numerical Linear Algebra* avec David Bau, *Spectral Methods in MATLAB*, *Schwarz–Christoffel Mapping* avec Tobin Driscoll et *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators* avec Mark Embree . Il a récemment été fortement impliqué dans la création et le développement du projet de logiciel Chebfun basé sur MATLAB .

En 2013, il a proposé une nouvelle formule pour calculer l'IMC d'une personne :

$$IMC = 1,3 \frac{poids}{hauteur^{2,5}}$$

(Pour le lecteur amusé, qui aimerait calculer "son nouvel IMC" en ligne avec le "New BMI Calculator" écrit par Nick Hale. :

https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/bmi_calc.html)

Biographie de Mark Embree



Mark Embree est professeur de mathématiques informatiques et appliquées chez Virginia Tech à Blacksburg, en Virginie. Jusqu'en 2013, il était professeur de Mathématiques et Informatique à l'Université Rice à Houston, au Texas .

Mark Embree a été désigné "Homme de l'année" et "Etudiant exceptionnel" au Collège des arts et des sciences de Virginia Tech en 1996. Il était également boursier de Rhodes à l'Université d'Oxford, où il a complété son doctorat.

Ses principaux domaines de recherche sont les méthodes de sous espaces de Krylov, les opérateurs non normaux et la théorie des perturbations spectrales, les matrices Toeplitz et les matrices aléatoires.

Chapitre 1

Définitions & Rappels

1.1 Définition du pseudo-spectre

Dans toute la suite, $A \in M_n(\mathbb{C})$, la norme $\|\cdot\|$ est la norme spectrale définie en annexe.

Remarque: La précision du choix de cette norme peut paraître inutile (car toutes les normes sont équivalentes), voire un peu pénible quand on sait que la norme spectrale est égale à la racine carrée de la plus grande valeur propre (en valeur absolue) de A^*A ... Mais en réalité, ce choix est très astucieux ! En effet, pour une matrice unitaire U de taille n , $\|U\| = 1$ et $\text{cond}_2(U) = 1$ (ce qui est fort pratique quand ces matrices apparaissent dans des relations). Ceci n'est pas vrai pour d'autres normes. Exemple : $\|U\|_F = \sqrt{n}$

On rappelle que :

$\Lambda(A) = \{z \in \mathbb{C} / zI - A \text{ n'est pas inversible}\}$ est l'ensemble de ses valeurs propres.

On définit $\Lambda_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} / \|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}\}$

Par convention, si $z \in \Lambda(A)$, $\|(zI - A)^{-1}\| = +\infty$

Définition 1. Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\epsilon > 0$. $z \in \Lambda_\epsilon(A)$ s'il satisfait l'une de conditions équivalentes suivantes :

1. $\|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}$
2. $\sigma_{\min}(z - A) \leq \epsilon$
3. $\|Au - zu\| \leq \epsilon$ pour un certain vecteur u tel que $\|u\| = 1$
4. z est une valeur propre de $A + E$ pour une certaine matrice E tel que $\|E\| \leq \epsilon$

Démonstration. On montre une équivalence puis certaines implications pour montrer l'équivalence de ces définitions.

1. \Leftrightarrow 2.

$$(\sigma_{\min}(z - A))^{-1} = \|(z - A)^{-1}\|$$

En effet, posons $B = (z - A)$.

On a $\|B^{-1}\|^2 = \rho(B^{-1}(B^{-1})^*) = \rho((B^*B)^{-1}) = \max\{\text{vap.de}(B^*B)^{-1}\}$ car B^*B est hermitienne définie positive donc ses valeurs propres sont positives. Or, comme B^*B est hermitienne, B^*B est diagonalisable via une matrice de passage unitaire.

$$\exists U \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } B^*B = UDU^{-1} = UDU^*$$

$$\Rightarrow (B^*B)^{-1} = UD^{-1}U^* \text{ et } D = \text{diag}(\text{vap.de}B^*B)$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{\text{vap.de}B^*B}\right)$$

$$\text{D'où } B = \max\{v.p.\text{de}(B^*B)^{-1}\} = \min\{v.p.\text{de}B^*B\} = \frac{1}{(\sigma_{\min}(z-A))^2}$$

1. \Rightarrow 4.

On suppose que $z \in \mathbb{C} / \|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}$,

$$z \in \mathbb{C} / \|(z - A)^{-1}\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|(z-A)^{-1}u\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|(z - A)^{-1}u\|$$

$\exists u \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|u\| = 1$ qui réalise ce sup (car sur un compact) et on a

$$\|(z - A)^{-1}u\| = \|(z - A)^{-1}\| \cdot \|u\| = \|(z - A)^{-1}\| \quad (\|u\| = 1).$$

$$\exists v \in \mathbb{C}^n \text{ tel que } \|v\| = 1 \text{ et } s = \frac{1}{\|(z-A)^{-1}\|} \text{ tel que : } (z - A)v = su$$

Si l'on pose $E = suv^*$, on a :

$$(A + E)v = (A + suv^*)v = Av + su = zv$$

Donc z valeur propre de $A + E$ associée au vecteur propre $v \neq 0$. De plus,

$$\|E\| = \|suv^*\| \leq s \|u\| \cdot \|v^*\| \leq s \leq \epsilon$$

4. \Rightarrow 3.

Supposons que z soit une valeur propre de $A + E$ pour une certaine matrice E avec $\|E\| \leq \epsilon$.

$\exists v \in \mathbb{C}^n, v \neq 0$ tel que $(A + E)v = zv$. On peut imposer $\|v\| = 1$ (quitte à normaliser v).

$$\text{D'où } \|(z - A)v\| = \|Ev\| \leq \|E\| \cdot \|v\| \leq \epsilon \quad (v = u \text{ ici})$$

3. \Rightarrow 1.

On suppose $\exists u \in \mathbb{C}^n, \|u\| = 1$ tel que $\|Au - zu\| \leq \epsilon$.

Par définition, $\|(z - A)^{-1}\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|(zI - A)^{-1}v\|}{\|v\|}$ (la norme matricielle est sub-

bordonnée à la norme vectorielle)

Pour $v = Au - zu \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{\|(zI - A)^{-1}(Au - zu)\|}{\|Au - zu\|} \geq \frac{\| -u \|}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} \quad (\|u\| = 1) \quad \square$$

1.2 Illustrations

Dans cette partie, nous allons illustrer le pseudo-spectre de quelques matrices particulières.

En regardant attentivement la définition du pseudo-spectre, l'étude des ensembles ϵ -pseudo-spectraux d'une matrice se réduit donc à l'étude des lignes de niveau de la norme de sa résolvante (Nous reviendrons plus en détail sur cette fameuse résolvante et sa norme dans le paragraphe suivant) ou par l'étude du spectre d'une matrice perturbée $A + E$ avec $\|E\| = \epsilon$.

Dans un premier temps, l'implémentation (fastidieuse) d'un algorithme (en annexe) nous a permis de réaliser le tracé de quelques courbes de niveaux de la résolvante (pour des matrices de petite taille).

Dans un second temps, l'implémentation (plus simple) d'un autre algorithme (également en annexe) nous a permis de réaliser le pseudospectre en utilisant la définition 4. (pour des matrices de grandes tailles).

- Une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} 1 - i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + i \end{pmatrix}$; $Sp(A) = \{1 - i; 2; 1 + i\}$

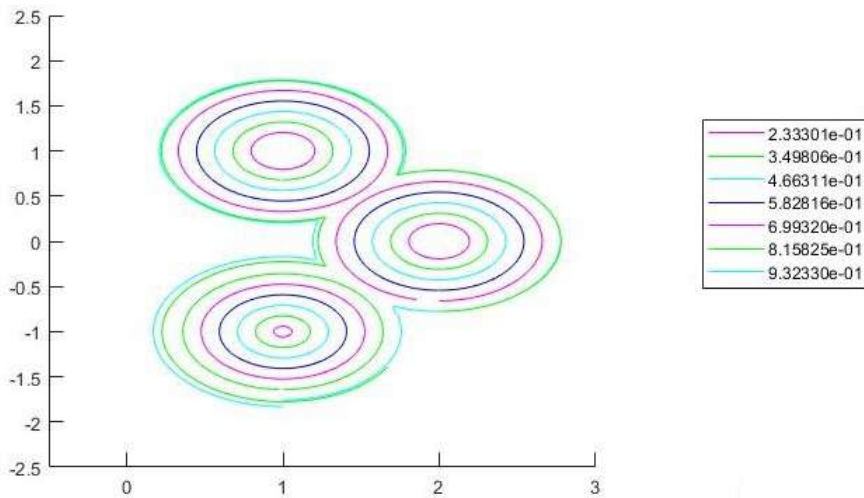


FIG. 1.1 : Pseudo-spectre de la matrice diagonale ci-dessus
La première valeur en légende correspond aux premiers cercles, la deuxième aux cercles concentriques suivants, etc.

- Une matrice hermitienne $A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & -1 & 1 \\ i & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $Sp(A) = \{-2; 1; 2\}$

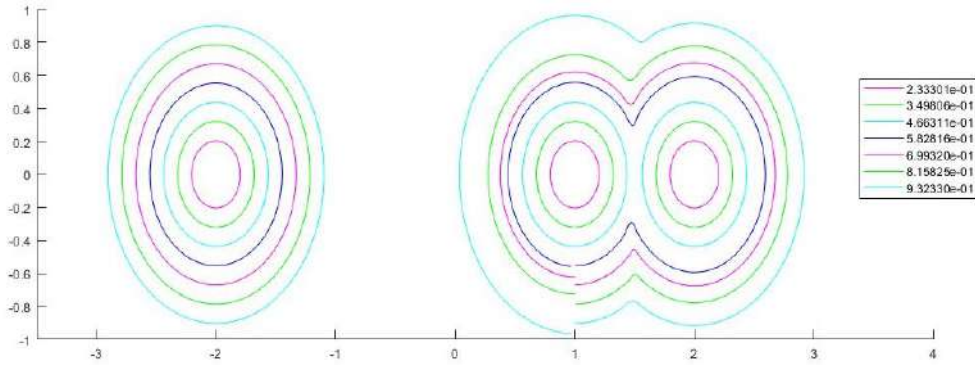


FIG. 1.2 : Pseudo-spectre de la matrice diagonale ci-dessus
La première valeur en légende correspond aux premiers cercles, la deuxième aux cercles concentriques suivants, etc.

- La fameuse matrice du Laplacien $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

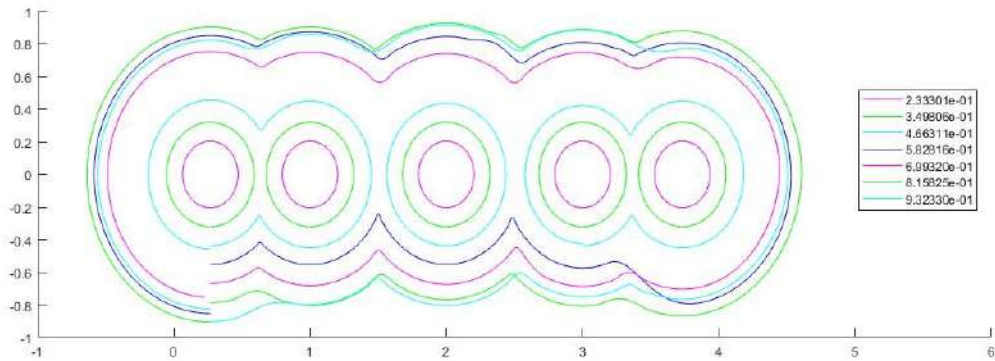


FIG. 1.3 : Pseudo-spectre de la matrice du Laplacien (taille 5x5)
La première valeur en légende correspond aux premiers cercles, la deuxième aux cercles concentriques suivants, etc.

Remarque : on sent que l'on commence à un peu trop à titiller l'algorithme car les tracés des lignes de niveaux deviennent assez irréguliers...

- Matrices de Toeplitz

Définition :

En algèbre linéaire, une matrice de Toeplitz (d'après Otto Toeplitz) ou matrice à diagonales constantes est une matrice dont les coefficients sur une diagonale descendant de gauche à droite sont les mêmes. Par exemple, la matrice suivante est une matrice de Toeplitz :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ f & a & b & c & d \\ g & f & a & b & c \\ h & g & f & a & b \\ j & h & g & f & a \end{pmatrix}$$

Ces matrices sont très intéressantes du point de vue de la complexité du calcul. Par exemple, le produit d'une matrice de Toeplitz par un vecteur peut s'effectuer aussi rapidement que le produit de deux polynômes de degrés au plus $n - 1$ $2n - 2$, c'est-à-dire en $O(n \log n)$ opérations.

Ces matrices sont aussi étroitement liées aux séries de Fourier car l'opérateur de multiplication (en) par un polynôme trigonométrique, comprimé (restreint) à un espace de dimension finie, peut être représentée par une telle matrice.

Comme nous l'avons dit plus haut, nous allons réaliser des spectres d'une matrice perturbée $A + E$ avec $\|E\| = \epsilon$.

Nous allons prendre une matrice de Toeplitz creuse et allons changer la taille de celle-ci et le paramètre ϵ .

Voici la matrice en question :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & * & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & * & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

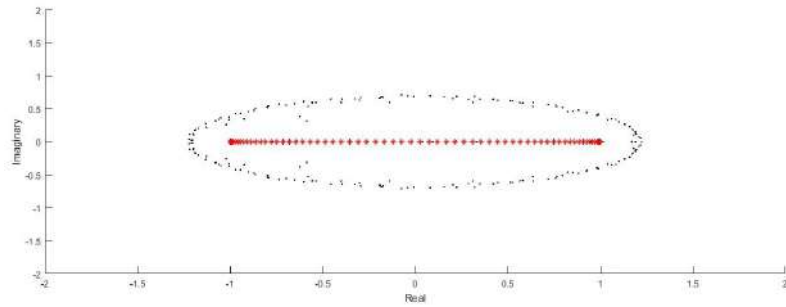


FIG. 1.4 : Matrice de taille $n = 64$, 3 matrices de perturbations, $\epsilon = 10^{-2}$

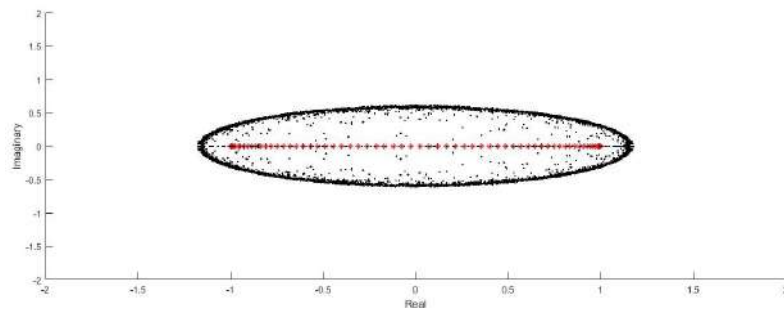


FIG. 1.5 : Matrice de taille $n = 64$, 100 matrices de perturbations, $\epsilon = 10^{-4}$

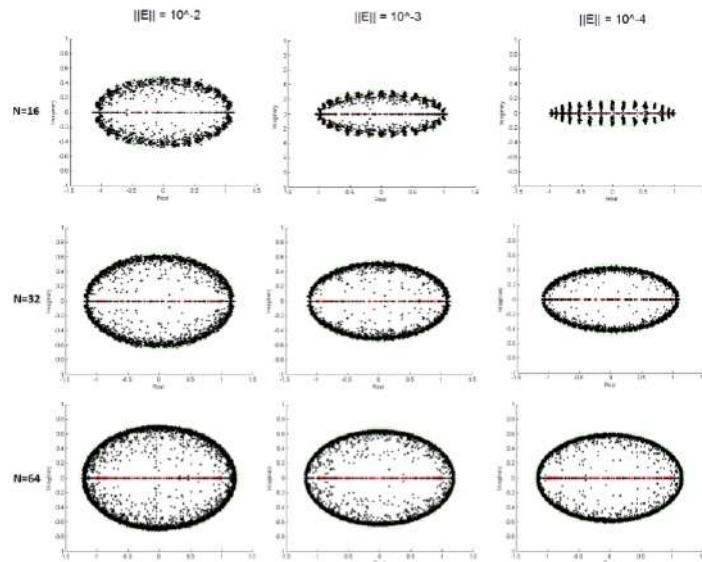


FIG. 1.6 : Ensemble de matrices de taille n , perturbées 100 fois par des matrices E

1.3 Quelques propriétés

Proposition 1. Soient $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$, alors $\Lambda_{\epsilon_1}(A) \subseteq \Lambda_{\epsilon_2}(A)$.

Démonstration. Soient $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$,

Soit $z \in \Lambda_{\epsilon_1}(A)$ d'où $\|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon_1} \geq \frac{1}{\epsilon_2}$ donc $z \in \Lambda_{\epsilon_2}(A)$ □

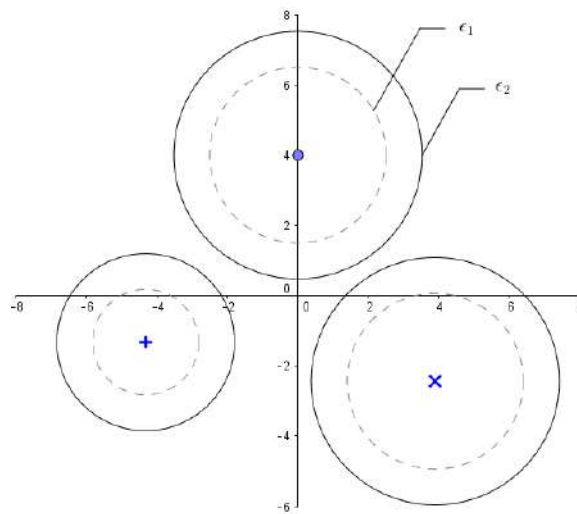


FIG. 1.7 : L'inclusion $\Lambda_{\epsilon_1}(A) \subseteq \Lambda_{\epsilon_2}(A)$ avec $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$,

On y voit les valeurs propres de la matrices (les points), $\Lambda_{\epsilon_1}(A)$ (trait pointillé), et $\Lambda_{\epsilon_2}(A)$ (trait plein)

Avertissement pour le lecteur : Cette figure a été réalisée avec le logiciel Geogebra.

Rappelons le résultat suivant de linéarité pour le spectre :

$$\Lambda(\alpha + \beta A) = \alpha + \beta \Lambda(A) \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Proposition 2. Nous avons un résultat similaire pour le pseudo-spectre :

$$\Lambda_{\epsilon|\beta|}(\alpha + \beta A) = \alpha + \beta \Lambda_{\epsilon}(A) \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. Si $\beta = 0$, trivial.

Sinon, soit $z \in \alpha + \beta\Lambda_\epsilon(A) : \exists \lambda \in \Lambda_\epsilon(A)/z = \alpha + \beta\lambda$.

$$\begin{aligned}\beta(z - (\alpha + \beta A))^{-1} &= ((z - (\alpha + \beta A))\beta^{-1})^{-1} \\ &= (z\beta^{-1} - \alpha\beta^{-1} - A)^{-1} \\ &= (\beta^{-1}(z - \alpha) - A)^{-1} \\ &= (\lambda I - A)^{-1}.\end{aligned}$$

Or, $\lambda \in \Lambda_\epsilon(A)$, d'où

$$\begin{aligned}\|(\lambda I - A)^{-1}\| &\geq \frac{1}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow |\beta| \|(z - (\alpha + \beta A))^{-1}\| &\geq \frac{1}{\epsilon} \\ \Leftrightarrow \|(z - (\alpha + \beta A))^{-1}\| &\geq \frac{1}{\epsilon|\beta|} \\ \Leftrightarrow z \in \Lambda_{\epsilon|\beta|}(\alpha + \beta A).\end{aligned}$$

□

Proposition 3. Soit $\epsilon > 0$, alors $\bigcap_{\epsilon > 0} \Lambda_\epsilon(A) = \Lambda(A)$.

Démonstration. Conséquence directe du théorème 2 !

□

Proposition 4. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ normale (c'est-à-dire $A^*A = AA^*$)
Alors $\forall \epsilon > 0, \Lambda_\epsilon(A) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda(A)} D(\lambda, \epsilon)$.

Démonstration. Comme A normale, $\exists U$ matrice unitaire telle que $U^*AU = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Pour $z \notin \Lambda(A)$,

$$\begin{aligned}\|(zI - A)^{-1}\| &= \|(zUU^* - UDU^*)^{-1}\| \\ &= \|U(zI - D)^{-1}U^*\| \\ &= (zI - A)^{-1}[(xI - A)(xI - A)^{-1} - (zI - A)(xI - A)^{-1}] \\ &= (zI - A)^{-1}[(xI - A - zI + A)(xI - A)^{-1}] \\ &= (zI - A)^{-1}[(x - z)(xI - A)^{-1}] \\ &= f(z)(x - z)f(x)\end{aligned}$$

□

Chapitre 2

”La résolvante”

Nous avons introduit plus tôt la notion de résolvante sans réellement la définir. Il est donc temps de faire les présentations !

Dans ce paragraphe, nous allons montrer quelques propriétés de cette dernière et donner des conséquences sur le pseudo-spectre.

2.1 Définition

Définition 2. Résolvante d’une matrice :

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ qui n’est pas une valeur propre de A , on appelle résolvante de A en z la matrice $(zI - A)^{-1}$.

Posons :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \Lambda(A) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto & (zI - A)^{-1} \end{cases}$$

Nous allons montrer quelques résultats intéressants sur cette fonction et sur la composée avec la norme de cette fonction.

2.2 Continuité

Proposition 5. f est continue.

Démonstration. Soit $\epsilon' > 0$, et $M := \|f(z)\| < \infty$, remarquons que

$$\begin{aligned}
 f(z) - f(x) &= (zI - A)^{-1} - (xI - A)^{-1} \\
 &= (zI - A)^{-1}[I - (zI - A)(xI - A)^{-1}] \\
 &= (zI - A)^{-1}[(xI - A)(xI - A)^{-1} - (zI - A)(xI - A)^{-1}] \\
 &= (zI - A)^{-1}[(xI - A - zI + A)(xI - A)^{-1}] \\
 &= (zI - A)^{-1}[(x - z)(xI - A)^{-1}] \\
 &= f(z)(x - z)f(x)
 \end{aligned}$$

Soit $E = f(z)(x - z)$ et $|x - y| \leq \frac{1}{2M}$, alors $\|E\| \leq \frac{1}{2} (< 1)$ et $f(z) = (I - E)f(x)$.

D'après le théorème de Neumann, on a :

$$\|f(x)\| \leq \|(I - E)^{-1}\| \cdot \|f(z)\| \leq 2M$$

Supposons maintenant que $|x - y| \leq \delta = \min(\frac{1}{2M}, \frac{\epsilon'}{2M^2})$, alors :

$$\begin{aligned}
 \|f(z) - f(x)\| &\leq \|f(z)\| \cdot |x - z| \cdot \|f(x)\| \\
 &\leq M|x - z| \cdot 2M = 2M^2|x - z| \\
 &\leq \epsilon'
 \end{aligned}$$

Donc f est continue en z .

□

Proposition 6. $\Lambda_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} / \|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}\}$ est un compact.

Démonstration. Nous allons montrer que $\Lambda_\epsilon(A)$ est fermé et borné car nous sommes en dimension finie.

- Montrons que $\Lambda_\epsilon(A)$ est bornée
Soit $z \notin \overline{B(0, \|A\| + \epsilon)}$ alors $|z| > \|A\| + \epsilon > \|A\|$

$$\begin{aligned}
 \|z^{-1}\| \cdot \|A\| &< 1 \\
 \|z^{-1}A\| &< 1
 \end{aligned}$$

Ainsi on peut appliquer le théorème de Neumann à $E = z^{-1}A$: si $\|E\| < 1$ alors $I - E$ inversible et $\|(I - E)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|E\|}$.

Comme $I - E$ inversible, on a

$$\begin{aligned} \|(zI - A)^{-1}\| &= \|z^{-1}(I - E)^{-1}\| \\ &\leq \frac{|z^{-1}|}{1 - \|E\|} \\ &\leq \frac{|z^{-1}|}{1 - |z^{-1}| \|A\|} \\ &\leq \frac{1}{|z| - \|A\|} < \frac{1}{\epsilon} \end{aligned}$$

On a donc bien $\Lambda_\epsilon(A) \subset \overline{B(0, \|A\| + \epsilon)}$ (on a utilisé l'inclusion inverse avec les complémentaires.)

Donc $\Lambda_\epsilon(A)$ est bornée.

- Montrons que $\Lambda_\epsilon(A)$ est fermée

On rappelle que $f : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \Lambda(A) & \longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ z & \longmapsto (zI - A)^{-1} \end{cases}$ est continue

Soit $M := \|f(z)\| < \infty$, remarquons que par composition avec la norme (qui est une fonction continue), on a

$g : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \Lambda(A) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ z & \longmapsto \|f(z)\| = \|(zI - A)^{-1}\| \end{cases}$ qui est une fonction continue en z .

Ainsi $\Lambda_\epsilon(A) = g^{-1}([\frac{1}{\epsilon}; +\infty[))$ et $[\frac{1}{\epsilon}; +\infty[)$ est un fermé de \mathbb{R} , donc $\Lambda_\epsilon(A)$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

$\Lambda_\epsilon(A)$ est fermé et borné donc c'est un compact. □

2.3 Sous-harmonicité

Une fonction sous-harmonique est une fonction définie sur un domaine du plan complexe et à valeurs réelles vérifiant certaines conditions d'harmonicité plus faibles que celles vérifiées par les fonctions harmoniques.

Pour plus de détails sur la sous-harmonicité et le principe du maximum, voir [6].

Définition 3. Soit D un domaine de \mathbb{C} . Une fonction $u : D \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est dite sous-harmonique dans D si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- u est continue.
- u possède la propriété de sous-moyenne locale : pour tout point $z_0 \in D$, on peut trouver $r_0 > 0$ tel que $\{z' : |z - z'| \leq r_0\} \subset D$ et :

$$u(z_0) \leq \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it}) \frac{dt}{2\pi}$$

pour tout $r < r_0$.

Parfois, on trouve une autre définition imposant que la fonction u soit semi-continue supérieurement. Ici, la fonction que nous allons considérer est continue.

Considérons la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \Lambda(A) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ z & \longmapsto \|f(z)\| = \|(zI - A)^{-1}\| \end{cases}$$

Proposition 7. g est sous-harmonique

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $\mathbb{C} \setminus \Lambda(A)$ est bien un domaine (car il est connexe par arcs dans un espace vectoriel normé \mathbb{C})

Par ailleurs, nous avons déjà montré que la fonction g est continue.

Il ne reste plus qu'à démontrer le deuxième point de la définition.

Grâce à la notion d'intégrale de matrice (que l'on peut définir comme limite d'intégrales de sommes partielles en utilisant le fait que l'on peut se ramener à une intégrale de valeurs scalaires mais que nous ne détaillerons pas ici), on peut écrire :

$$(A - zI)^{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w-z|=r} (A - wI)^{-1} \frac{dw}{w - z}$$

pour r assez petit (r dépend de z).

Ainsi,

$$\begin{aligned} g(z) = \|(zI - A)^{-1}\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{|w-z|=r} (A - wI)^{-1} \frac{dw}{w - z} \right\| \\ &\leq \frac{1}{2i\pi} \int_{|w-z|=r} \|(A - wI)^{-1}\| \frac{dw}{w - z} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|w-z|=r} g(w) \frac{dw}{w - z} \\ w &= z + re^{it} \\ dw &= rie^{it} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} g(z + re^{it}) dt \end{aligned}$$

□

Il existe un principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques.

Proposition 8. Soit $D \subset \mathbb{C}$ domaine,

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continue et sous-harmonique,

Soit $\bar{D}' \subset D$ et $M = \sup_{z \in \bar{D}'} f(z) = \max_{z \in \bar{D}'} f(z)$

Alors $\forall z \in D' : f(z) \leq M$

avec égalité pour un $z \in D'$ si et seulement si f est constante sur D .

Démonstration. Supposons qu'il existe $z_0 \in D'$ tel que $f(z_0) = M$, par sous-harmonicité, on a :

$$M = f(z_0) \leq \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

pour r suffisamment petit, et pour z tel que $|z - z_0| = r$. Par conséquent, on a $f(z_0 + re^{it}) = M$ presque partout (et partout par continuité).

Donc f est constante sur $B(z_0, r)$ pour r suffisamment petit. Par connexité, il existe un chemin reliant z_0 à n'importe quel point de D' , puis par prolongement analytique, on en déduit que $f(z) = M, \forall z \in D'$. □



FIG. 2.1 : Prolongement analytique par des disques "qui se chevauchent"

Proposition 9. $\partial\Lambda_\epsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} / \|(zI - A)^{-1}\| = \frac{1}{\epsilon}\}$

Par conséquent, $\text{Int}(\Lambda_\epsilon(A)) = \{z \in \mathbb{C} / \|(zI - A)^{-1}\| > \frac{1}{\epsilon}\}$

Démonstration. Montrons que $\Delta = \{z \in \mathbb{C} / \|(zI - A)^{-1}\| = \frac{1}{\epsilon}\} = \{z \in \mathbb{C} / g(z) = \frac{1}{\epsilon}\}$ est d'intérieur vide.

Sinon, $\exists z_0 \in \Delta$, $\exists \delta > 0$ tel que $\overline{B(z_0, \delta)} \subset \Delta$

Posons $D' = B(z_0, \delta)$, $\max_{z \in \partial D'} g(z) = M = \frac{1}{\epsilon}$.

On a égalité en z_0 et donc par le principe du maximum, g est constante sur $\mathbb{C} \setminus \Lambda(A)$

Or, $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, donc $M = 0$, impossible car $\|(z_0I - A)^{-1}\| \neq 0$

Par des arguments de topologie, on en déduit que $\Delta = \partial\Lambda_\epsilon(A)$. \square

Chapitre 3

”Nine theorems”

Pour que le lecteur apprécie d’autant plus la notion de pseudo-spectre, nous avons rappelé pour chaque résultat pseudo-spectral son équivalent spectral (que nous ne démontrerons pas ici mais qui se trouve dans tout bon livre d’analyse numérique).

Remarque : Il est possible de passer des théorèmes pseudospectraux aux théorèmes spectraux en utilisant le fait que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Lambda_\epsilon(A) := \bigcap_{\epsilon > 0} \Lambda_\epsilon(A) = \Lambda(A)$$

3.1 0 et le pseudo-spectre

Théorème 1.

- $\forall \epsilon > 0, \|A\| \geq \epsilon^{-1} \Leftrightarrow 0 \in \Lambda_\epsilon(A)$.
- En particulier,
 A est singulière $\Leftrightarrow 0 \in \Lambda(A)$.

Démonstration. $0 \in \Lambda_\epsilon(A) \Leftrightarrow \|0 * I - A\|^{-1} \geq \frac{1}{\epsilon} \Leftrightarrow \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}$ □

3.2 Condition nécessaire : A diagonalisable

Théorème 2.

- Si $\Lambda_\epsilon(A)$ a n composantes connexes distinctes alors A est diagonalisable.
- En particulier,
 A a n valeurs propres distinctes $\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Démonstration. Soit F une composante connexe de $\Lambda_\epsilon(A)$.

Montrons que $\Lambda(A) \cap F \neq \emptyset$.

Dans le cas contraire,

Soit D' un voisinage ouvert borné de F tel que $\Lambda(A) \cap D' \neq \emptyset$ et $\partial D' \cap \Lambda_\epsilon(A) = \emptyset$ (c.f.figure ci-dessous)

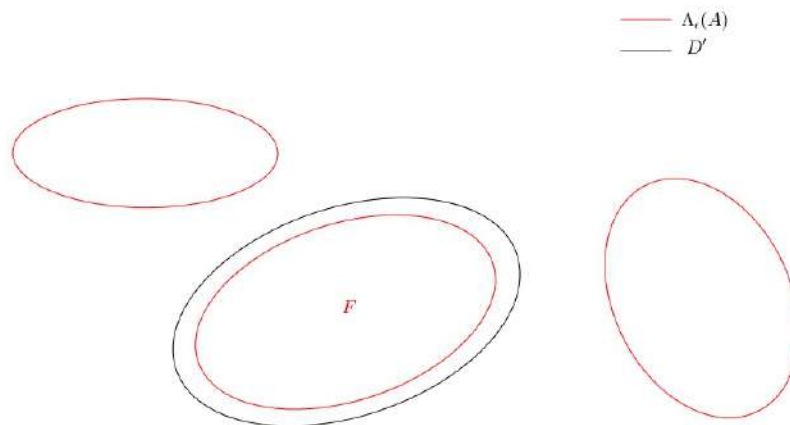


FIG. 3.1 :

Par ailleurs, on sait que g est sous-harmonique dans D' . On peut donc lui appliquer le principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques.

Par construction, $\Lambda(A) \cap D' \neq \emptyset$,

$$\max_{z \in \partial D'} = M < \frac{1}{\epsilon}$$

et par le principe du maximum, on a :

$$\forall z \in F, g(z) < \frac{1}{\epsilon}$$

Or $F \neq \emptyset, \exists z_0 \in F \subset \Lambda_\epsilon(A)$. et donc $g(z_0) \geq \frac{1}{\epsilon}$. Contradiction !

Ainsi chaque composante contient au moins une valeur propre, et dans l'hypothèse du théorème, $\Lambda_\epsilon(A)$ a n composantes connexes distinctes et comme

A a au maximum n valeurs propres, on en déduit qu'il y a exactement une valeur propre par composante connexe et donc A est diagonalisable. \square

- Illustration.

Nous allons illustrer le fait que la réciproque n'est pas vraie.

Prenons la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 + i/2 \end{pmatrix} ; \quad Sp(A) = \{1, 1/2, 1/2 + i/2\}$$

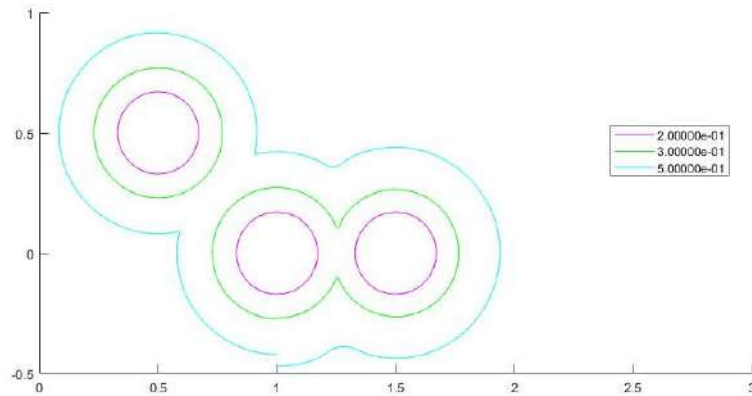


FIG. 3.2 : Pseudo-spectre de la matrice A

Cette matrice est diagonalisable (car diagonale) mais son pseudo-spectre a au maximum 3 composantes connexes.

3.3 Minoration de la résolvante

Théorème 3.

- $\forall \epsilon > 0, \|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\text{dist}(z, \Lambda_\epsilon(A)) + \epsilon}$
- En particulier,
 $\|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\text{dist}(z, \Lambda(A))}$

Démonstration. Posons $\epsilon' = \text{dist}(z, \Lambda_\epsilon(A)) + \epsilon$.

Montrer cette égalité est équivalent à montrer que $z \in \Lambda_{\epsilon'}(A)$

Cas 1: $z \in \Lambda_\epsilon(A)$.

On pose $\epsilon = \epsilon'$, trivial.

Cas 2: $z \notin \Lambda_\epsilon(A)$.

$\exists z' \in \Lambda_\epsilon(A)$ avec $|z - z'| = \text{dist}(z, \Lambda_\epsilon(A))$

$\exists F$ avec $\|F\| \leq \epsilon$ et $z' \in \Lambda(A + F)$

Ainsi $z \in \Lambda(A + E)$ avec $E = (z - z')I + F$ et $\|E\| \leq \|(z - z')I\| + \|F\| \leq \epsilon'$

Donc $z \in \Lambda_{\epsilon'}(A)$ \square

- Illustration.

Pour bien comprendre l'illustration, nous rappelons au lecteur que dans la démonstration des définitions équivalentes du pseudospectre, nous avons $(\sigma_{\min}(z - A))^{-1} = \|(z - A)^{-1}\|$, le théorème peut donc se réécrire : $\forall \epsilon > 0, \text{dist}(z, \Lambda_\epsilon(A)) + \epsilon \geq \sigma_{\min}(z - A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & -3/2 - i \\ 1 + i & 2 & 1 + i \\ -3/2 - i & 0 & 5/2 \end{pmatrix} ; Sp(A) = \{1 - i, 2, 4 + i\}$$

$$z_1 = 4 - 0.5i ; \sigma_{\min}(z_1 - A) = \sqrt{0.25} = 0.5$$

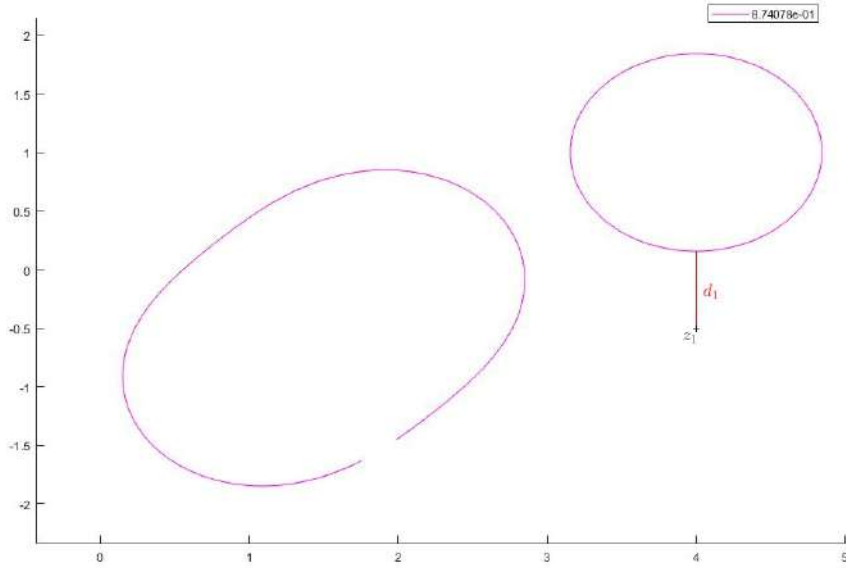


FIG. 3.3 : Illustration de $\Lambda_\epsilon(A + E)$

On en déduit facilement que $d_1 = 0.374078$, donc on a bien :

$$0.374078 + 0.874078 = 1.2482 = \text{dist}(z, \Lambda_\epsilon(A)) + \epsilon \geq \sigma_{\min}(z - A) = 0.5$$

3.4 A diagonalisable, conditionnement et pseudo-spectre

Théorème 4.

- $\forall \epsilon > 0$, on suppose qu'il existe S , une matrice de passage (carrée complexe), telle que $A = SBS^{-1} \Rightarrow \Lambda_\epsilon(A) \subseteq \Lambda_{\text{cond}(S)\epsilon}(B)$.
- En particulier,
 $A = SBS^{-1} \Rightarrow \Lambda(A) = \Lambda(B)$.

Démonstration. Soit $z \in \Lambda_\epsilon(A)$ c'est à dire $\|(z - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}$.

$$\begin{aligned} (zI - A)^{-1} &= (zI - SBS^{-1})^{-1} \\ &= (zSS^{-1} - SBS^{-1})^{-1} \\ &= ((Sz - SB)S^{-1})^{-1} \\ &= (S(zI - B)S^{-1})^{-1} \\ &= S(zI - B)^{-1}S^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\|(z - A)^{-1}\| = \|S(zI - B)^{-1}S^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon}$.

Or, $\|S(zI - B)^{-1}S^{-1}\| \leq \|S\| \|(zI - B)^{-1}\| \|S^{-1}\|$

D'où, $\|S(zI - B)^{-1}S^{-1}\| \geq \frac{1}{\epsilon \|S\| \|S^{-1}\|}$ □

- Illustration

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & -3/2 - i \\ 1 + i & 2 & 1 + i \\ -3/2 - i & 0 & 5/2 \end{pmatrix} ; \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 - i & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 + i \end{pmatrix}$$

$\text{cond}(S) = 4.73872$

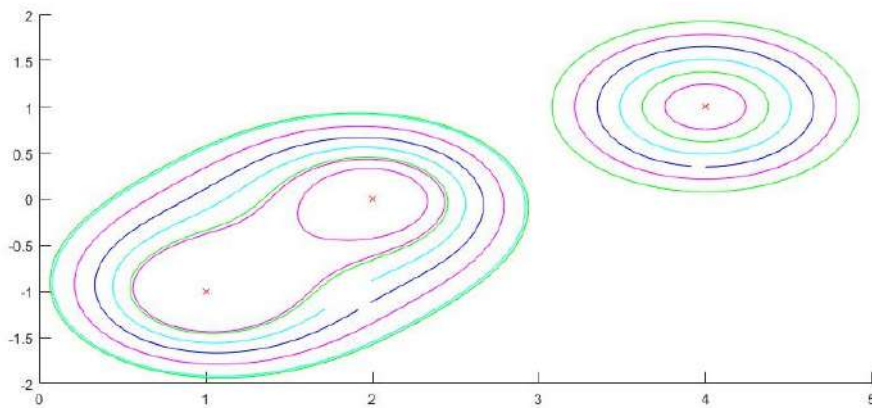


FIG. 3.4 : Pseudo-spectre de la matrice A

Pour illustrer le théorème, nous allons réduire le nombre de paramètres ϵ pour plus de clarté.

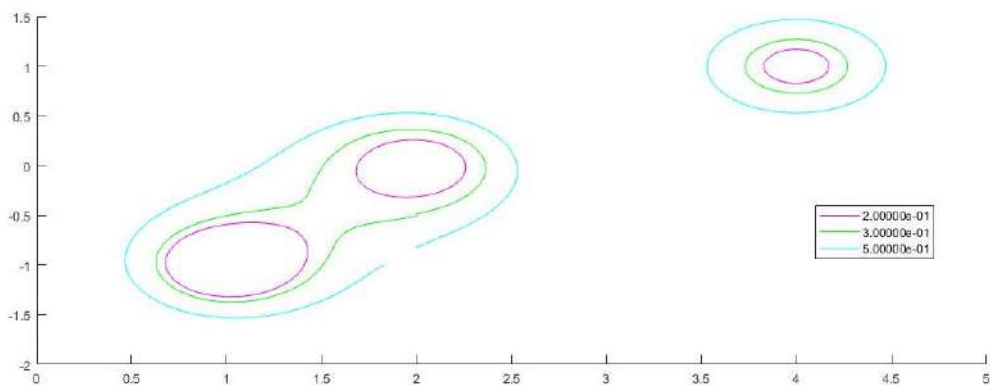


FIG. 3.5 : Pseudo-spectre de la matrice A avec un nombre réduit de ϵ (ici $\epsilon = 0, 2$, $\epsilon = 0, 3$ et $\epsilon = 0, 5$)

Le lecteur attentif remarquera que la matrice B est diagonale et se souviendra que la proposition 4 nous disait que pour une matrice normale (donc en particulier diagonale...), le pseudo-spectre est une union de disques. Donc ici, notre pseudospectre sera contenu dans des disques centrées en $1 - i$, 2 et $4 + i$ et de rayon $\text{cond}(S)\epsilon$ (pour les différents ϵ susmentionnés). Place au dessin !

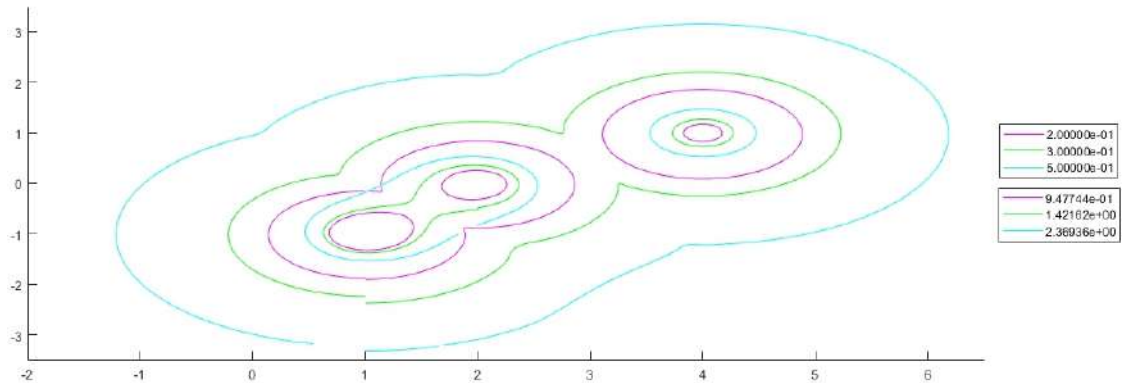


FIG. 3.6 : Illustration de $\Lambda_\epsilon(A) \subseteq \Lambda_{cond(S)\epsilon}(B)$

Arrêtons nous un peu sur cette figure pour bien comprendre l'inclusion ! Par exemple, pour la première valeur de ϵ (qui vaut 0,2) le pseudo-spectre de la matrice A est constitués de trois petits patatoïdes (les plus petits sur la figure). Et c'est trois petits patatoïdes sont inclus dans l'union des disques de rayon $cond(S)\epsilon$ (qui vaut $4.73872 \times 0,2 = 0.947744$) qui correspond aux quatrième lignes de niveaux sur la figure (et qui forme le pseudo-spectre de B). On a cette inclusion pour chaque valeur de ϵ .

3.5 Pseudo-spectre d'une matrice perturbée

Théorème 5.

- $\forall \epsilon > 0, \Lambda_\epsilon(A + E) \subseteq \Lambda_{\epsilon + \|E\|}(A)$.
- En particulier,
 $\Lambda(A + E) \subseteq \Lambda_{\|E\|}(A)$.

Démonstration. Soit $z \in \Lambda_\epsilon(A + E)$ alors il existe une matrice F telle que $\|F\| \leq \epsilon$.

Par suite, $\exists u \neq 0$ tel que $(A + E + F)u = zu$.

Par ailleurs, $\|E + F\| \leq \|E\| + \epsilon$.

Donc $z \in \Lambda_{\epsilon + \|E\|}(A)$. □

- Illustration.
 Il faut comprendre ce théorème dans le sens suivant : On peut encore contrôler le pseudo-spectre d'une matrice perturbée !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 + i \end{pmatrix} ; \quad Sp(A) = \{1, 3/2, 3/2 + i\}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad \|E\| = 0.15$$

Afin que le lecteur comprenne plus facilement la dernière illustration, nous avons fait apparaître les pseudospectres $\Lambda_\epsilon(A + E)$ et $\Lambda_{\epsilon+\|E\|}(A)$ séparément avant superposition.

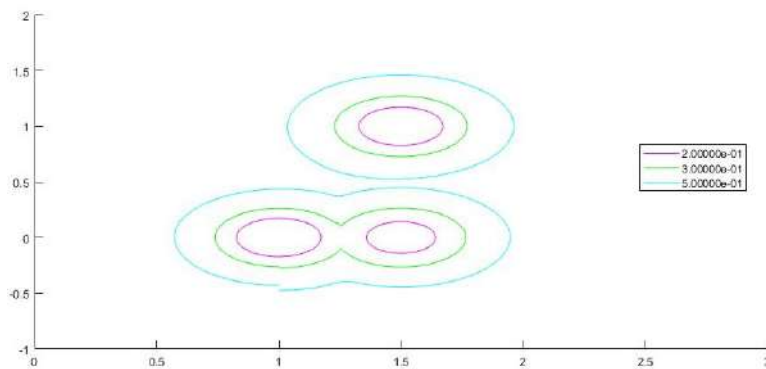


FIG. 3.7 : Illustration de $\Lambda_\epsilon(A + E)$

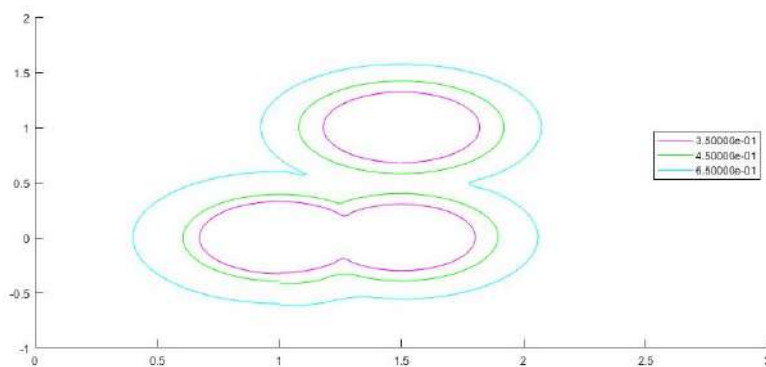


FIG. 3.8 : Illustration de $\Lambda_{\epsilon+\|E\|}(A)$

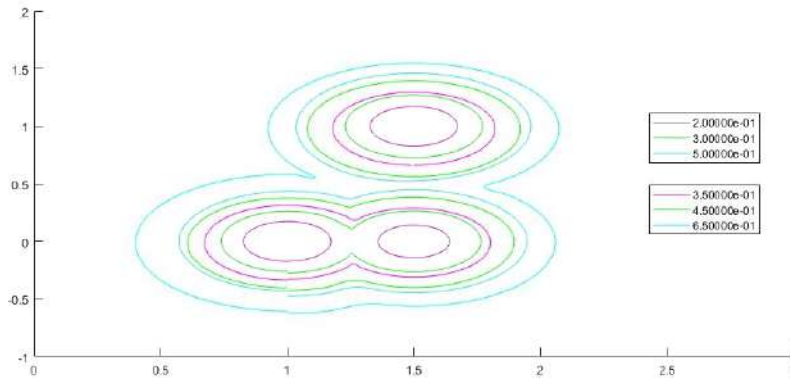


FIG. 3.9 : Superposition des deux précédents pseudospectres illustrant $\Lambda_\epsilon(A + E) \subseteq \Lambda_{\epsilon+\|E\|}(A)$

3.6 Minoration de la norme de A

Théorème 6.

- $\forall \epsilon > 0, \lambda_\epsilon \in \Lambda_\epsilon(A) \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda_\epsilon| - \epsilon$
- En particulier,
 $\lambda \in \Lambda(A) \Rightarrow \|A\| \geq |\lambda|$.

Démonstration. Si $\lambda_\epsilon \in \Lambda_\epsilon(A)$, d'après la caractérisation (Déf.3),
 $Au = \lambda_\epsilon u + \epsilon v$ avec $u, v \in \mathbb{C}^n$ tel que $\|u\| = \|v\| = 1$.

$$\|A\| = \|A\| \|u\| \geq \|Au\| = \|\lambda_\epsilon u + \epsilon v\| \geq \|\lambda_\epsilon u\| - \|\epsilon v\| = |\lambda_\epsilon| \|u\| - \epsilon \|v\| = |\lambda_\epsilon| - \epsilon$$

□

- Illustration.

Il faut comprendre ce théorème dans le sens suivant : On peut encore contrôler le pseudo-spectre d'une matrice perturbée !

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix} ; \quad \|A\| = 3 \quad ; \quad \epsilon = 0.835243$$

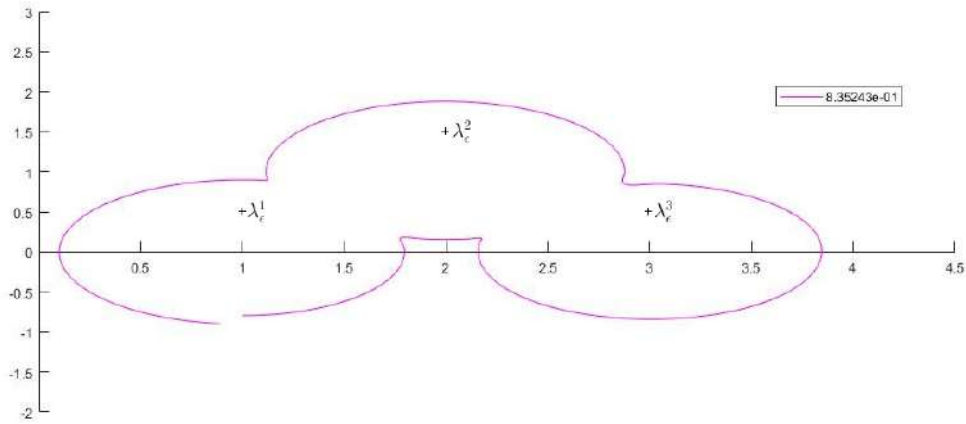


FIG. 3.10 : $\Lambda_\epsilon(A)$, et quelques points $\lambda_\epsilon^1 = 1+0.5i$, $\lambda_\epsilon^2 = 2+1.5i$, $\lambda_\epsilon^3 = 3+0.5i$

On remarque que l'on a bien :

$$3 = \|A\| > |\lambda_\epsilon^1| - \epsilon = |1 + 0.5i| - 0.835243 = 0.2828$$

$$3 = \|A\| > |\lambda_\epsilon^2| - \epsilon = |2 + 1.5i| - 0.835243 = 1.6648$$

$$3 = \|A\| > |\lambda_\epsilon^3| - \epsilon = |3 + 0.5i| - 0.835243 = 2.2061$$

3.7 Disques de Gerschgorin version pseudo-spectre

Théorème 7.

- $\forall \epsilon > 0, \Lambda_\epsilon(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^n D(d_j, r_j + \sqrt{n}\epsilon)$.
- En particulier,

$$\Lambda(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^n D(d_j, r_j).$$

Démonstration. On applique le théorème de Gerschgorin à la matrice $A+E$, $\|E\|_2 \leq \epsilon$. D'où

$$\begin{aligned} \Lambda_\epsilon(A) = Sp(A + E) &\subset \bigcup_{j=1}^n D(a_{jj} + e_{jj}, \sum_{k \neq j} |a_{jk} + e_{jk}|) \\ &\subset \bigcup_{j=1}^n D(a_{jj} + e_{jj}, \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| + \sum_{k=1}^n |e_{jk}|) \end{aligned}$$

Or, $\sum_{k=1}^n |e_{jk}| \leq \|E_j\|_\infty \leq \sqrt{n} \|E_j\|_2 \leq \sqrt{n} \|E\|_2 = \sqrt{n}\epsilon.$

Notation:

$a_{jj} = d_j$ et $\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| = r_j.$

On en conclut donc : $\Lambda_\epsilon(A) \subset \bigcup_{j=1}^n D(d_j, r_j + \sqrt{n}\epsilon).$ □

- Illustration

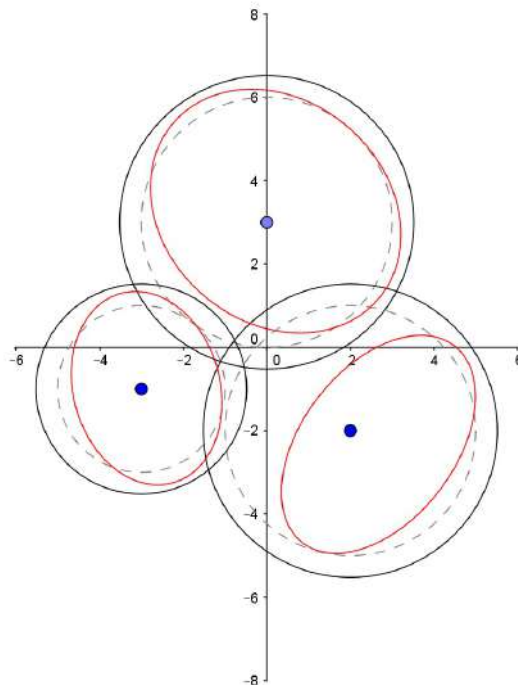


FIG. 3.11 : Disques de Gerschgorin version pseudo-spectre

On y voit :

- Les valeurs propres de la matrices (les points)
- Les "vrais" disques de Gershgorin de la matrice (traits pointillés)
 - Les ϵ -disques de Gershgorin (traits pleins)
- Le pseudo-spectre (l'ensemble des patatoïdes)

Avertissement pour le lecteur : Cette figure a été réalisé à l'aide du logiciel Geogebra.

3.8 Sous-espace presque invariant...

Théorème 8. Soient V une matrice rectangulaire de taille $n \times k$ ($n > k$) avec colonnes orthonormées et H une matrice carrée de taille $k \times k$

- $\forall \epsilon > 0, AV = VH \Rightarrow \Lambda_\epsilon(H) \subseteq \Lambda_\epsilon(A)$.
- En particulier,
 $AV = VH \Rightarrow \Lambda(H) \subseteq \Lambda(A)$.

Démonstration. Soit $z \in \Lambda_\epsilon(H)$, alors $\|Hu - zu\| \leq \epsilon$ pour un certain u avec $\|u\| = 1$.

D'où $\|Avu - Vzu\| = \|VHu - Vzu\| \leq \|V\| \|Hu - zu\| \leq \epsilon$ (car $\|V\| = 1$).

Donc $z \in \Lambda_\epsilon(A)$.

On a donc $\Lambda_\epsilon(H) \subseteq \Lambda_\epsilon(A)$. □

3.9 ... et sous-espace invariant

Théorème 9. On pose $H = V^*AV$

- $AV = VH + R \Rightarrow \Lambda(H) \subseteq \Lambda_\epsilon(A)$ pour $\epsilon = \|R\|$.
- En particulier,
 $AV = VH \Rightarrow \Lambda(H) \subseteq \Lambda(A)$.

Démonstration. On considère la matrice carrée $E = -RV^*$.

On a donc $(A + E)V = AV - R = VH$ et par le second point du théorème 9, les valeurs propres de H sont des valeurs propres de $A + E$ et par suite, elles appartiennent au pseudospectre $\Lambda_\epsilon(A)$ avec $\epsilon = \|-RV^*\| = \|R\|$ car V est une matrice unitaire. □

- Interprétation

On peut remarquer qu'il y a un lien avec la décomposition d'Arnoldi :
 $AV_m = V_{m+1}\underline{H}_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1}(0, \dots, 0, 1)$.

On en déduit que les valeurs propres de H_m sont incluses dans le pseudospectre de A , avec $\epsilon = \|h_{m+1,m} v_{m+1}(0, \dots, 0, 1)\|$. *i.e.*

$\Lambda(H_m) \subseteq \Lambda_\epsilon(A)$ pour $\epsilon = \|h_{m+1,m} v_{m+1}(0, \dots, 0, 1)\|$.

Quand $h_{m+1,m} = 0$, on a $AV_m = V_m H_m$, et donc $\Lambda_\epsilon(H_m) \subseteq \Lambda_\epsilon(A)$, $\forall \epsilon > 0$.

Conclusion

Ce TER nous a permis d'apprendre beaucoup de propriétés intéressantes sur le pseudo-spectre et son lien avec le spectre. En effet, dès le début nous avons compris que le pseudo-spectre d'une matrice n'est autre que le spectre de cette matrice que l'on perturbe en fonction d'un certain paramètre. Ensuite, nous avons remarqué que si l'on prend plusieurs paramètres, et que l'on intersecte tous ces pseudo-spectres, on obtient le spectre. De plus, on sait dorénavant que dans chaque composante connexe du pseudo-spectre (pour un certain paramètre) il y a une unique valeur propre.

Le pseudo-spectre est encore aujourd'hui un sujet sur lequel on s'intéresse beaucoup dans la recherche en analyse numérique. C'est pourquoi, nous découvrirons probablement d'autres résultats très utiles dans l'avenir.

Chapitre 4

Annexe

4.1 Norme spectrale

Définition 4. La norme spectrale d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est la norme d'opérateur associée aux structures hermitiennes canoniques de \mathbb{C}^n et \mathbb{C}^m :

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$$

avec

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Théorème 10. La norme spectrale d'une matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ est égale à la racine carrée du rayon spectral de A^*A :

$$\|A\|_2^2 = \rho(A^*A)$$

et, lorsque A est hermitienne,

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

Démonstration. Remarquons que A^*A est une matrice hermitienne et que ses valeurs propres sont positives. En effet, $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ et si $A^*Ax = \lambda x$ avec $x \neq 0$ on obtient, en multipliant à gauche par x^* ,

$$\|Ax\|_2^2 = x^*A^*Ax = \lambda x^*x = \lambda \|x\|_2^2$$

de sorte que $\lambda \geq 0$. En vertu du théorème spectral on peut décomposer $A^*A = UDU^*$ avec U unitaire et $D = \text{diag}(\lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs

propres (≥ 0) de A^*A . Revenons à la définition de la norme spectrale. On a :

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2^2 = \max_{\|x\|_2=1} x^* A^* A x = \max_{\|x\|_2=1} x^* U D U^* x = \max_{\|x\|_2=1} y^* D y$$

avec $y = U^*x$. Mais puisque U est unitaire, lorsque x décrit la sphère unité dans \mathbb{C}^n il en est de même pour y de sorte que

$$\|A\|_2^2 = \max_{\|y\|_2=1} y^* D y$$

. Le maximum de $y^* D y = \sum_{i=1}^n \lambda_i |y_i|^2$ sur la sphère unité est égal à $\lambda_i = \max_i \lambda_i = \rho(A^*A)$, il est atteint lorsque $y = e_i$ le vecteur dont les coordonnées sont nulles sauf celle d'indice i égale à 1. Ceci établit la première identité. Pour la seconde on note que :

$$\rho(A^*A) = \rho(A^2) = \rho(A)^2$$

lorsque A est hermitienne. □

Remarque. Ici, on note $\|A\|_2$ par $\|A\|$.

4.2 Conditionnement

Définition 5. On appelle conditionnement d'une matrice $A \in \mathbb{GL}_n$ le nombre $cond(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$. Ce conditionnement dépend de la norme considérée sur $\mathbb{C}^{n \times n}$. On note $cond_2$, $cond_1$ et $cond_\infty$ le conditionnement associé à la norme spectrale, aux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque. Ici, on note $cond_2$ par $cond$.

Théorème 11. Pour toute matrice $A \in \mathbb{GL}_n$, on a :

1. $cond(A) = cond(A^{-1})$ avec égalité si et seulement si A est un multiple scalaire d'une matrice unitaire.
2. $cond(A) \geq 1$.
3. Quelles que soient les matrices unitaires U et $V \in \mathbb{U}_n$, $cond(UAV) = cond(A)$.
4. Si $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n > 0$ sont les valeurs singulières de A (i.e. la racine carrée des valeurs propres de A^*A) alors $cond(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$.

Démonstration. 1. est évident. 2. est une conséquence de 4 ; 3 aussi parce que les valeurs singulières de A et celles de UAV sont les mêmes. Pour prouver le 4., on utilise le théorème 12 qui donne $\|A\| = \sigma_1$ et $\|A^{-1}\| = \sigma_n^{-1}$ □

4.3 Théorème de Van Neumann

Proposition 10. Notons $\|\cdot\|$ une norme multiplicative sur $\mathbb{C}^{n \times n}$. Si $\|A\| < 1$ alors $I_n - A$ est inversible et son inverse est la somme de la série absolument convergente

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

De plus,

$$\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Démonstration. La série est absolument convergente parce que $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ qui est le terme général d'une série convergente. Pour calculer sa somme on passe à la limite dans l'identité

$$I_n - A^{p+1} = (I_n - A) \sum_{k=0}^p A^k$$

en remarquant que $A^{p+1} \rightarrow 0$ puisque c'est le terme général d'une série convergente. On a enfin

$$\|(I_n - A)^{-1}\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

□

4.4 Algorithme MatLab

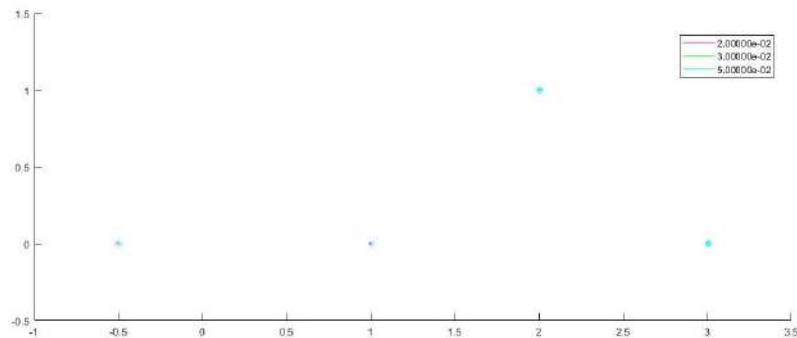
Il existe un package créé par Tom Wright (disponible sur [3]) qui trace les pseudospectres sur Matlab. Cependant, son installation n'a ni fonctionné sur les ordinateurs de l'Université, ni sur nos ordinateurs personnels (malgré plusieurs tentatives d'installations de différentes versions de Matlab et du package).

Voici l'algorithme Matlab, réalisé par Bernhard BECKERMANN, et utilisé pour le tracé des pseudo-spectres via les lignes de niveaux de la norme de la résolvante dans ce document.

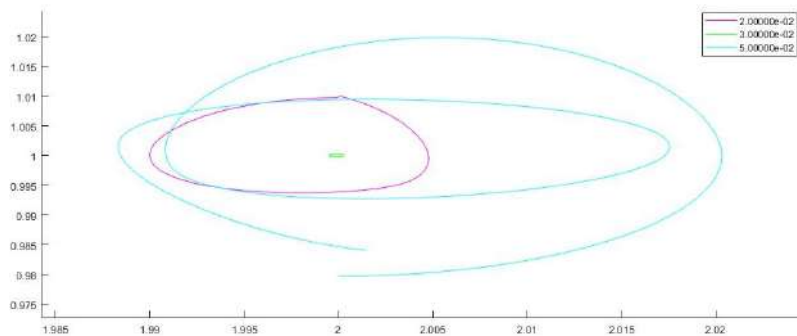
Cependant, nous avons rencontré une autre difficulté avec cet algorithme, pour des petites valeurs de ϵ , l'algorithme renvoie des résultats incohérents... Comme l'illustre l'exemple ci-dessous :

Pour la matrice (pourtant très simple) : $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}$

Voici la réponse de l'algorithme pour des valeurs petites de ϵ



Et en zoomant sur un des tracés, c'est le drame...



C'est pourquoi, dans tout ce document, les ϵ sont de l'ordre de 10^{-1} afin que les tracés ne soient pas aussi chaotiques.

Pour le lecteur soucieux de comprendre cet algorithme dans les moindres détails, nous avons pris soin de laisser les commentaires.

Il se décompose en deux fichiers : un fichier source et un fichier d'exécution :

FICHER SOURCE :

```
function []=pseudo(A,varargin)
% [] = pseudospectrum(A,option1,value1,option2,value2,....)
% draws level lines for spseudospectrum for "small" matrices.
% A is a square matrix for which we draw the pseudospectrum
%
% optionj is an optional string (in quotation '..'), valeurj the argument
% we have the following possibilities :
% option='figure' value=n : chooses figure n>=0
% option='clear' value=1 : clears the figure before drawing (default : yes)
% option='window' value=[xmin+%i*ymin,xmax+%i*yymax] :
% draws level lines for pseudo-spectrum within [xmin,xmax]+ %i * [ymin,yymax]
% option='drawspectrum' value=colorcode : if defined draws eigenvalues
% with given matlab color code, does not draw eigenvalues if value=[];
% option='drawlegend' value=location : if defined draws legend with dif-
ferent
% parameters for the displayed level lines. See help legend for the values of
parameter
% option='parameter' value=scalar or row vector : draws level lines for the
indicated
% parameters. A scalar gives number of level lines
nb=length(varargin);
if nb/2 == floor(nb/2)
    disp('[pseudo] : Arguments should be A,option1,value1,option2,value2,....');
end;

nb=floor(nb/2);
% choose the default parameters
spectrum=eig(A).'; % row vector
default-clear=1;
default-figure=-1;
```

```

default-drawspectrum='kx';
default-legend='';
legend-string=[];
colors='bmgc';
param=6;
xmin=min(real(spectrum)); xmax=max(real(spectrum));
ymin=min(imag(spectrum)); ymax=max(imag(spectrum));
h=(xmax-xmin+ymax-ymin)/10;
xmin=xmin-h;xmax=xmax+h;
ymin=ymin-h;ymax=ymax+h;

% read from input the new parameters
for j=1 :nb
    if strcmp(varargin(2*j-1),'clear'), default-clear=cell2mat(varargin(1,2*j));
    elseif strcmp(varargin(2*j-1),'figure'), default-figure=cell2mat(varargin(2*j));
    elseif strcmp(varargin(2*j-1),'window')
        s=cell2mat(varargin(2*j));
        xmin=min(real(s));
        xmax=max(real(s));
        ymin=min(imag(s));
        ymax=max(imag(s));
        disp([xmin,xmax,ymin,ymax])
    elseif strcmp(varargin(2*j-1),'drawspectrum'),
default-drawspectrum=cell2mat(varargin(2*j));
    elseif strcmp(varargin(2*j-1),'drawlegend'),
default-legend=cell2mat(varargin(2*j));
    elseif strcmp(varargin(2*j-1),'parameter'),
param=cell2mat(varargin(2*j));
    end;
end;
% adjust the new parameters, mainly for plot
if default-figure>=0, figure(default-figure); end;
if default-clear==1, clf; end;
hold on;
if size(param,2)==1
    nb-param=param;param=[];
else
    nb-param=size(param,2);
end;

% draw lines perpendicular to each level curve from each eigenvalue, length

```



```

% such that the last point is out of the window, or of value < min(param)
% store positions and values.
position=zeros(length(spectrum),100);
value=zeros(length(spectrum),100);
phase=1;
if length(param)==0
    % we do not know yet the parameters to be plotted, aim is do have
    % curves starting at eigenvalue which leave the window
    for j=1 :length(spectrum)
        lambda=spectrum(j);
        Tmax=1;Tstep=1/103;Tspan=Tmax*[0 :Tstep :1];
        Z0=lambda+i/100;
        [T,Z] = ode45(@(t,z) fonc(t,z,A,phase),Tspan,Z0);
        while (real(Z(100))>xmin) & (real(Z(100))<xmax) && ...
            (imag(Z(100))>ymin) & (imag(Z(100))<ymin)
            Tmax=2*Tmax;Tspan=Tmax*[0 :Tstep :1];
            [T,Z] = ode45(@(t,z) fonc(t,z,A,phase),Tspan,Z0);
        end;        % plot(real(Z),imag(Z),'r');
        for k=1 :100
            position(j,k)=Z(k);
            value(j,k)=1/norm(inv(position(j,k)*eye(size(A,1))-A),2);
        end;
    end;    % deduce vector param from longest path
    [toto,j]=min(value(:,100));
    m=floor(100/(nb-param+2));
    param=value(j,2*m :m :100);
else
    % parameters are given, we must have to take care that our curves are
    % sufficiently long
    for j=1 :length(spectrum)
        lambda=spectrum(j);
        Tmax=1;Tstep=1/103;Tspan=Tmax*[0 :Tstep :1];
        Z0=lambda+i/100;
        [T,Z] = ode45(@(t,z) fonc(t,z,A,phase),Tspan,Z0);
        while 1/norm(inv(Z(100)*eye(size(A,1))-A),2) < max(param)
            Tmax=2*Tmax;Tspan=Tmax*[0 :Tstep :1];
            [T,Z] = ode45(@(t,z) fonc(t,z,A,phase),Tspan,Z0);
        end;
        for k=1 :100
            position(j,k)=Z(k);
            value(j,k)=1/norm(inv(position(j,k)*eye(size(A,1))-A),2);
        end;
    end;
end;

```

```

end ;
disp('[pseudo] : orthogonal trajectories done...');

    % for checking whether curve did already encircle this eigenvalue
do-plot=ones(length(spectrum),length(param));
    % draw level lines

counter=1 ;
for j=1 :length(spectrum) % for each eigenvalue

    lambda=spectrum(j) ;
    for p=1 :length(param)
        % find starting point z0 of level line
        % we look for index k (if possible) such that param(p) is in
        % [value(j,k+1),value(j,k)]
        k=1 ;
        while (param(p)<value(j,k+1)) & (k<99)
            k=k+1 ;          end ;

legend-string=[legend-string ;num2str(param(p),'%10.5e')] ;
    if param(p) >= value(j, k + 1) & do_plot(j, p) == 1
        % draw level line
        t=(param(p)-value(j,k))/(value(j,k+1)-value(j,k)) ;
        z0=t*position(j,k)+(1-t)*position(j,k+1) ;
        % partant de z0 on trace une courbe de niveau, mais on ne sait pas
a
        % quel temps la courbe est fermee. On verifie que l'argument passe
bien de 0 a 2*pi
        Tspan2=[0] ;Th2=0.1 ;
        tourner=0 ;
        while tourner==0
            b=Tspan2(length(Tspan2)) ;
            Tspan2=[Tspan2,[b+Th2 :Th2 :b+1]] ;
            [T,Z] = ode45(@ (t,z)
                % refinement strategy : two succeeding points on curve should
have
                % distance less than tolerance and less than the max of the
                % distances to lambda
fonc(t,z,A,i*phase),Tspan2,z0) ;
            tol1=min([xmax-xmin,ymax-ymin]/100) ;
            tol2=1/2 ;

```

```

    np=size(Z,1)-1;
    succ1=max(abs(Z(2 :np+1)-Z(1 :np)));
    succ2=max(abs(Z(2 :np+1)-Z(1 :np))...
        ./ (abs(Z(2 :np+1)-lambda)+abs(Z(1 :np)-lambda)));
    if (succ1>tol1) | (succ2>tol2)
        Th2=Th2/10;
        Tspan2=[0];
    else
        tourner=closed((Z-lambda).');
    end;
%disp([succ1/tol1,succ2/tol2,Th2,max(Tspan2),tourner]);
end;
plot(real(Z(1 :tourner, :)),imag(Z(1 :tourner, :)),
    colors(1+mod(p,length(colors))));

% check whether this curve also encircles further eigenvalues

for j2=j+1 :length(spectrum)
    if closed((Z-spectrum(j2)).') > 0
        do-plot(j2,p)=0;
        disp(['pseudo] : levelcurve encircles also ',
            num2str([spectrum(j2),param(p)],4,']...']);
    end;
end;
disp(['pseudo] : levelcurve ',int2str(counter),' done,
[, num2str([lambda,param(p)],4,']...']);
counter=counter+1;
end; % draw level line
end;% parameter
if (j==1) & (length(default-legend)>0)
    legend(legend-string,'Location',default-legend)
end;
end;% eigenvalue
xlim([xmin,xmax]);
ylim([ymin,ymax]);
if length(default-drawspectrum)>0,
    plot(real(spectrum),imag(spectrum),default-drawspectrum);
end;
%for lambda=spectrum(1)
% [T,Z] = ode45(@(t,z) fonc(t,z,A,phase),Tspan,lambda+i/100);%options);
% plot(real(Z),imag(Z),'r');
% disp(['T';Z'])
% m=floor(length(Z)/6);zlist=Z(2*m :m :length(Z), :).';
% for z0=zlist

```

```

    % end;
%end;
%xlim([xmin,xmax]);
%ylim([ymin,ymax]);

function [index]=closed(row)
% for a row vector of numbers in complex plane different from 0,
% check whether these values are samplings of closed curve.
% Returns index=0 if not, and else the index of the element which closes
turning=0;
phi=0;j=1;
%tt=[];
%figure(3);plot(real(row),imag(row));hold on;figure(1);
while (abs(phi)<6) & (j<length(row))
    phiold=phi;
    phi=angle(row(j)/row(1));
    % take care to continue angle
    while phiold>phi+pi
        phi=phi+2*pi;
    end;
    while phiold<phi-pi
        phi=phi-2*pi;
    end;
    j=j+1;
    %tt=[tt,phi];
end;
%figure(2);plot(tt);hold on;figure(1);
if abs(phi)<6
    index=0;
else
    [toto,index]=min(abs(row(j:length(row))-row(1)));
    index=index(1)+j-1;
end; %if length(row)>50 %index=1; %end;

```

```

function dz=fonc(t,z,A,phase)
d=size(A,1);
[U,S,V]=svd(z*eye(d)-A);
y=V(:,d);
h=y'*(z*eye(d)-A)*y;
dz=phase*h/abs(h);

```

FICHER D'EXECUTION :

```
% taper 'help pseudo' pour plus d'explications
A=[% on entre une matrice ici]
%on efface la fenetre actuelle et on trace le spectre et 6 courbes de niveau
pseudo(A,'clear',[1],'drawspectrum','rx','parameter',5)
% le seul argument obligatoire est A
toto=input('appuyer sur une touche','s');
% on efface la fenetre actuelle et on trace le spectre avec autre couleur et 3
courbes de niveau
pseudo(A,'clear',[1],'drawspectrum','ko','parameter',2)
toto=input('appuyer sur une touche','s');

% avec une autre matrice
A=[% on entre une matrice ici]
% on efface la fenetre actuelle , mais on ne trace pas le spectre
% on ajoute une legende
% pour le parametre de la legende voir 'help legend'
pseudo(A,'clear',[1],'drawspectrum',' ','drawlegend','Eastoutside')
toto=input('appuyer sur une touche','s');
% meme chose avec des parametres prescrits, et on precise egalement
% la fenetre pour laquelle on veut voir le dessin
pseudo(A,'clear',[1],'drawspectrum',' ','drawlegend','Eastoutside','parameter',
        [2/100,3/100,5/100],'window',[-1-i,i])
toto=input('appuyer sur une touche','s');
```

Voici le second algorithme Matlab et utilisé pour le tracé des pseudo-spectres via les matrices de perturbations par nos soins.

```
n=64;
epsilon=0.01;
c=1; %coeff de la diagonale supérieure
d=1/4; %coeff de la diagonale inférieure
```

```
nbEps=100; %nombre de matrice epsilon
minX=-3; maxX=5; minY=-3; maxY=3; %bornes du graphique
```

```
A=c*diag(ones(n-1,1),1)+d*diag(ones(n-1,1),-1);
sigma=eig(A);
```

```
%représentation graphique
close all
figure(1)
hold on
plot(real(sigma),imag(sigma),'r*')
for k=1 :nbEps
    Eps=epsilon*(2*rand(n,n)-ones(n,n));
    sigmaEps=eig(A+Eps);
    plot(real(sigmaEps),imag(sigmaEps),'k.');
```

end
xlabel('Real')
ylabel('Imaginary')
axis([minX,maxX,minY,maxY]);

Bibliographie

- [1] Mark Embree & Lloyd N.Trefethen : *Generalizing eigenvalue theorems to pseudospectra theorems*, SIAM J.SCI Comput., Vol.23, No.2,pp.583-590, 2001 Society for Industrial and Applied Mathematics.

- [2] L.N.Trefethen & M.Embree : *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press (2005).

- [3] Mark Embree & Lloyd N.Trefethen : *Pseudospectra Gateway*, <http://www.comlab.ox.ac.uk/pseudospectra>, 2000.

- [4] Luca Amodei, Jean-Pierre Dedieu. *Analyse numérique matricielle : cours et exercices corrigés*. Dunod, 316 p., 2008, Sciences Sup

- [5] Bernhard Beckermann : <http://math.univ-lille1.fr/~bbecker/ssmf2013>

- [6] Edward B. Saff Vilmos Totik : *Logarithmic Potentials with External Fields*, Springer Berlin Heidelberg. p-18-20