Retour d'oral : Analyse

Mohamed NASSIRI

Tirage :

☐ 241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.
☒ 250 - Transformation de Fourier. Applications.

Développements :

☐ Base hilbertienne des polynômes orthogonaux
☒ Formule sommatoire de Poisson

Spectateurs :

2

Préparation :

J'ai fait le plan suivant :

I) Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$
  1) Définitions et premiers exemples
  2) Premières propriétés
  3) Transformation de Fourier et dérivation
  4) Convolution et transformation de Fourier
II) Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$
  1) Définitions et premières propriétés
  2) Convolution et transformation de Fourier
III) Applications
  1) Equations différentielles partielles
  2) Polynômes orthogonaux
  3) Formule sommatoire de Poisson

J'avais 39 items. J'ai pu, pendant la préparation, regarder la démonstration de chaque item et noter quelques éléments de démonstration. J'ai seulement admis la formule d'inversion. Il me restait une bonne heure pour faire mes développements.

Défense de plan :

On considère, sans donner de précision sur f, la formule suivante

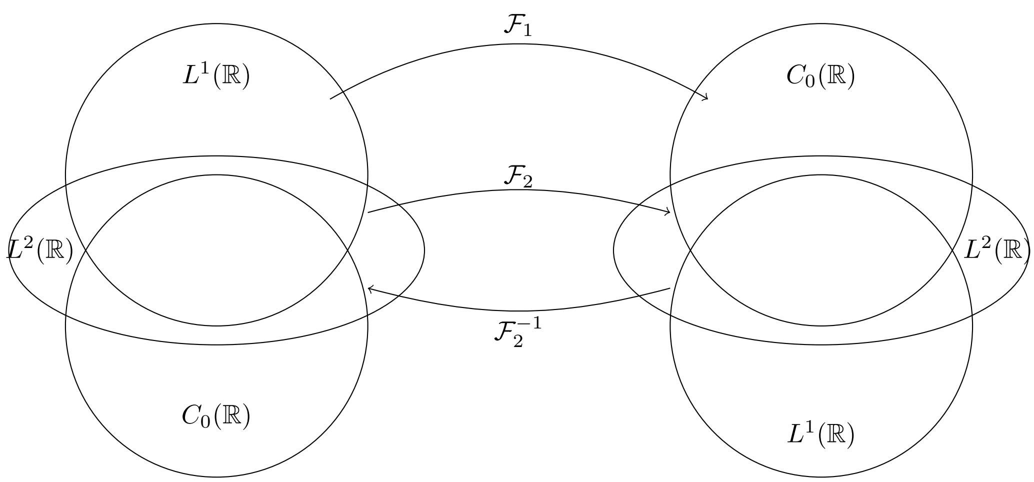
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi}\mathrm{d}x$$

En prenant f dans L^1, la fonction définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \mathrm{d}x$$

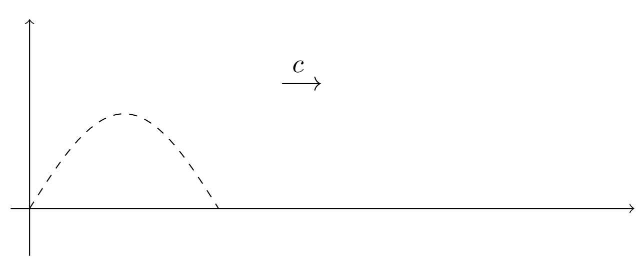
est bien définie. Et c'est ce qu'on va appeler la "transformée de Fourier". Il y a des définitions avec des 2π mais j'ai pris celle-là. Mais de toute façon, on retrouve les 2π dans d'autres résultats.
On n'a même un premier résultat : le lemme de Riemann-Lebesgue. Qui va nous dire que $\widehat{f}$ est dans $C_0(\mathbb{R})$.
Toujours en restant dans L^1, on a grâce notamment à la "formule d'échange", que la transformée (*il faut dire "transformation" !*) de Fourier est injective.
On va notamment avoir plusieurs résultats intéressants : avec la dérivée d'une transformée de Fourier et la transformée de Fourier d'une dérivée. Ce sera notamment, sans trop vous spoiler la suite, pour les équations différentielles partielles.

Après, on aimerait bien définir une transformée dans L^2. Alors elle ne sera pas "très bien définie". Elle sera définie comme une limite. On va donc, par la suite, regarder l'espace $L^1 \cap L^2$ et donc dans cet espace, on ne prend pas de risque, car on a une définition dans L^1. On a donc le schéma suivant :



Il se trouve que tout se passe bien : la transformée de Fourier définie comme une limite et celle sur $L^1 \cap L^2$ coïncident bien !
D'ailleurs, toutes les propriétés qu'on avaient dans L^1 seront encore vraies dans L^2 !

En applications, on peut résoudre des EDP, équations différentielles partielles. Par exemple, ici, on a l'équation de transport, que l'on peut résoudre par transformée de Fourier. On dit "qu'on passe l'équation à la transformée de Fourier". Ici la solution dit simplement que le profil de densité se déplace comme ça



On peut également les polynômes orthogonaux, qui est mon premier développement. On connait une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$: ce sont les e^{int}. Mais a priori sur $\mathbb{R}$, on n'en trouve pas facilement. Ce théorème permet d'avoir une base hilbertienne sur $\mathbb{R}$. Même sur $\mathbb{R}_+$.

Finalement, la formule sommatoire de Poisson, qui est mon développement. Il fait le lien entre série de Fourier et transformée de Fourier. Alors ici, j'ai un peu changé la définition de la transformée de Fourier, il y a un 2π ici.

Développement :

Il a duré 12 minutes ... Peut-être un peu court ...
J'ai fait une petite erreur ... Je m'en suis rendu compte après la remarque d'un membre du jury. J'ai écrit

$$\int_0^1 F(t)e^{2i\pi nt}\mathrm{d}t \quad \text{au lieu de} \quad \int_0^1 F(t)e^{-2i\pi nt}\mathrm{d}t$$

Questions du jury :

- Jury 1 : Pourriez-vous me dire ce que vous entendez par la convergence d'une série indexée sur $\mathbb{Z}$?
- Moi : On pose $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si les deux séries du membre de droite converge, alors on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n$.
- Jury 2 : Oui mais là, dans votre développement, vous avez utilisé une autre définition ?
- Moi : Pardon ? (*J'étais étonné de la question*)
- Jury 2 : Il y a plusieurs façons de converger. Et ça veut dire quoi pour vous qu'une série converge ?
- Moi : Une série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge vers S si $\lim\limits_{n\to+\infty}(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S) = 0$.
- Jury 2 : Euh vous êtes sûrs de vos indices ?
- Moi : Ah bah non ! C'est $\lim\limits_{N\to+\infty}(\sum_{n=0}^{N} u_n - S) = 0$. (*Oui j'étais fatigué ... Et je suis un peu con des fois ...*)
- Jury 2 : Du coup, on revient à votre développement. Vous avez utilisé autre chose non ?
- Moi : Ah ! Les sommes partielles symétriques (*J'avais pas compris qu'ils voulaient m'amener là...*)
- Jury 1 : Oui voilà ! Du coup, c'est équivalent à votre définition comme convergence ?
- Moi : Non ! La convergence à partir des sommes partielles symétriques est plus restrictive ... On peut converger en ce sens, sans converger au sens général. Les indices sont quelconques dans la définition de base. Dans les sommes partielles symétriques, on peut avoir des compensations mais pas dans le cas général où l'on met deux indices quelconques. Mais je n'ai pas de contre-exemple qui me vient ...
- Jury 2 : Essayez de chercher !
- Moi : (*Euh il va se calmer ...*) Oui oui, j'essaie de feuilleter le Hauchecorne dans ma tête. J'imagine quelque chose avec $(-1)^n$ ou du $1/n$ et $-1/n$, mais je ne trouve pas ...
- Jury 1 : On va passer à autre chose.

- Jury 1 : Vous dites que la transformée est dans un espace que vous notez $C_0(\mathbb{R})$ ...
- Moi : Oui c'est l'espace des fonctions qui tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 en module.
- Jury 2 : Oui on sait ce que c'est ... *Je pense qu'il ne m'aimait pas ...*
- Jury 1 : Vous pouvez nous montrer que la transformée de Fourier est continue ?
- Moi : Euh oui ! *Je ne sais pas pourquoi, mais au début j'ai compris borné ... et j'avais en tête Riemann-Lebesgue ...* Ah oui ! C'est juste le théorème de continuité sous signe intégral !
- Jury 1 : Oui c'est ça. Vous pouvez détailler ?

- Moi : Alors :

$$- \forall x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } \xi \mapsto f(x)e^{-ix\xi} \text{ est continue sur } \mathbb{R},$$
$$- \forall \xi \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } x \mapsto f(x)e^{-ix\xi} \text{ est dans } L^1(\mathbb{R}),$$

- Jury 1 : Pourquoi elle est dans L^1 ?
- Moi : On a $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$ et f est dans L^1
- Jury 1 : Ok. Continuez.
- Moi : Puis $|f(x)e^{-ix\xi}| = |f(x)|$ avec f est dans L^1 comme je le disais. Donc ça vérifie bien les hypothèses du théorème de continuité du sous intégral et donc c'est continue.
- Jury 2 : Et d'où vient le théorème de continuité sous intégral ?
- Moi : Du théorème de convergence dominée.
- Jury 2 : D'accord.

- Jury 1 : Est-ce que vous connaissez un autre espace où l'on peut définir la transformée de Fourier ?
- Moi : Oui. L'espace de Schwartz. Mais je n'avais plus de place pour en parler dans la leçon en 3 pages ... Dans cette espace, la transformée de Fourier est stable ...
- Jury 1 : Vous pouvez nous dire ce qu'est l'espace de Schwartz ?
- Moi : $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\underset{|x|\to+\infty}{x^p f(x)} = 0$. En gros, les fonctions doivent tendrent rapidement vers 0, plus vite que n'importe quel polynôme.
- Jury 1 : Mais vos fonctions, vous les prenez où ?
- Moi : Ah oui, c'est vrai ! Euh ... Bah j'ai un doute entre C^0 ou C^∞ ...
- Jury 2 : Bon en fait, vous connaissez pas la définition ?
- Moi : (*Oula ... Ma tête ne lui revient pas ...*) Bah sur ce point, j'ai un doute ...
- Jury 1 : Il faut aussi que toutes les dérivées ça.
- Moi : Ah oui ... C'est ça : $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underset{|x|\to+\infty}{x^p f^{(n)}(x)} = 0$.
- Jury 1 : Oui c'est ça ...

- Jury 1 : Vous avez parlé de transformée de Fourier et équations différentielles. Pouvez-vous résoudre l'équation $y'' - y = f$ avec $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$?
- Moi :

$$\begin{aligned} y''(x) - y(x) &= f(x) \\ \mathcal{F}(y''(x) - y(x))(\xi) &= ... \end{aligned}$$

- Jury 2 : Ecrivez peut-être pas les x dans la transformée ...
- Moi : Ah oui ! D'ailleurs, ça me fait penser que j'ai fait un petit abus de langage dans mon plan quand je note $\mathcal{F}(xf)$ ...
- Jury 2 : Oui oui, c'est bon, allez, continuez !
- Moi : (*Sympathique jusqu'au bout ...*) Alors

$$\begin{aligned} y''(x) - y(x) &= f(x) \\ \mathcal{F}(y'' - y)(\xi) &= \mathcal{F}(f)(\xi) \\ \mathcal{F}(y'')(\xi) - \mathcal{F}(y)(\xi) &= \mathcal{F}(f)(\xi) \end{aligned}$$

Je peux regarder mon plan ? J'ai toujours un doute entre "dérivée d'une transformée de Fourier et transformée de Fourier d'une dérivée au niveau des formules ?
- Jury 1 : Oui oui, allez-y !

- Moi : Ah voilà ! Je vais changer de notation pour que ce soit moins lourd aussi ...

$$\mathcal{F}(y'')(\xi) - \mathcal{F}(y)(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi)$$
$$-\xi^2\widehat{y}(\xi) - \widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)$$
$$\widehat{y}(\xi)(-\xi^2 - 1) = \widehat{f}(\xi)$$

(*Et là comme un débile, j'écris* $\xi \neq \pm 1$ *et après un bruit bizarre du jury, je me rends que c'est stupide ... J'avais lu* $\xi^2 - 1$)
On a donc

$$\widehat{y}(\xi) = \frac{-\widehat{f}(\xi)}{\xi^2 + 1}$$

Et là, on applique l'inversion de Fourier pour retrouver y.
- Jury : Euh ouais attendez ! Vous avez quand même $\frac{\widehat{f}(\xi)}{\xi^2+1}$ dans l'autre côté ...
- Moi : Ah oui c'est vrai ! On écrit

$$\widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\frac{1}{\xi^2 + 1}$$

(*J'ai perdu un signe "-" dans la bataille... Mais ils ne m'ont rien dit...*)
De là, on utilise la formule $\widehat{fg} = \frac{1}{2\pi}\widehat{f} * \widehat{g}$ et comme dans mon plan il y a $\mathcal{F}(\frac{1}{2}e^{-|x|})(\xi) = \frac{1}{\xi^2+1}$.
- Jury 3 : (*Ah il parle enfin !*) Vous êtes sûr que c'est cette formule qu'on utilise ?
- Moi : Ah non ! C'est l'autre pardon ! $\widehat{f * g} = \widehat{f}.\widehat{g}$. On a donc

$$\widehat{y}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathcal{F}\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)(\xi)$$

(*en me tournant vers le jury 2*) Ca ne vous embête pas que je mette x dans $\mathcal{F}()$?
- Jury 2 : Non non ...
- Moi : Du coup, on a

$$\widehat{y}(\xi) = \widehat{f * \frac{1}{2}e^{-|x|}}(\xi)$$

par l'inversion de Fourier, on a donc $y(x) = f(-x) * \frac{1}{2}e^{-|x|}$ (*Alors que c'est l'injectivité et non l'inversion ... Mais ils ne m'ont rien dit non plus ... Bref ...*)
- Jury 1 : Pourquoi on pourrait appliquer l'inversion de Fourier à $\widehat{f}$?
- Moi : Parce que f est dans l'espace de Schwartz.
- Jury 1 : Oui mais a priori mais vous avez défini ça dans L^1.
- Moi : Oui mais une fonction de l'espace de Schwartz est dans L^1.
- Jury 1 : Pourquoi ?
- Moi : Elle vérifie que $\forall p \in \mathbb{N}$, $x^p f(x)$ tend vers 0 lorsque $|x| \to +\infty$. En particulier c'est un $O(1/x^2)$.
- Jury 1 : D'accord.

- Jury 1 : Est-ce que vous pourriez nous calculer la transformée de Fourier de la gaussienne ?
- Moi : Oui bien sûr ! Il y a plusieurs méthodes. La plus connu, c'est avec une équation différentielle, mais je ne l'aime pas trop, je préfère celle avec le prolongement analytique. Alors on a Soit $f(t) = e^{-t^2/2}$, alors

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t = e^{-\xi^2/2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi)}\mathrm{d}t$$

- Jury 3 : Euh vous êtes sûr là ?
- Moi : Euh oui ... Attendez ... Ah non, il manque un carré :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t = e^{-\xi^2/2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{1}{2}(t+i\xi)^2}\mathrm{d}t$$

Bon l'erreur ici, ça serait de considérer un changement de variables mais il serait complexe ... Donc ça ne marche pas. On n'a pas dit notre dernier mot. On va considérer

$$F(z) = e^{z^2/2}\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-\frac{1}{2}(t+z)^2}\mathrm{d}t, \quad z \in \mathbb{R}$$

Donc, comme z est dans $\mathbb{R}$, on a

$$F(z) = e^{z^2/2}\sqrt{2\pi} := G(z)$$

Ainsi, on a $F(z) = G(z)$ sur $\mathbb{R}$ où tous les points sont d'accumulations, donc d'après le théorème de prolongement, on a $F = G$ sur $\mathbb{C}$. En particulier, $\widehat{f}(\xi) = F(i\xi) = G(i\xi)$ ...
- Jury 2 : Attendez, pourquoi votre fonction F est analytique ?
- Moi : En fait, $z \mapsto e^{z^2/2}$ est holomorphe et la fonction définie par une intégrale est holomorphe par le théorème d'holomorphie sous signe intégrale.
- Jury 2 : C'est quoi ce théorème ?
- Moi : *J'ai juste écrit au tableau "g(z,x)" et j'ai dit*

$$\begin{aligned} &- \forall z \in \mathbb{C}, \text{ la fonction } x \mapsto g(z,x) \text{ est mesurable sur } \mathbb{R}, \\ &- \forall x \in \mathbb{R}, \text{ la fonction } z \mapsto g(z,x) \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C}, \\ &- |g(z,x)| \text{ bornée par une fonction de } L^1 \end{aligned}$$

- Jury 2 : D'accord.
- Moi : Et on n'a pas besoin de majorer les dérivées, car c'est automatiquement fait avec les inégalités de Cauchy.
- Jury 3 : Oui d'accord.

- Jury 2 : Vous avez beaucoup utilisé la convolution. Vous pouvez la définir pour deux fonctions de L^1 ?
- Moi : $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\mathrm{d}t$.
- Jury 2 : Pourquoi c'est bien défini ?
- Moi : Alors ...

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\mathrm{d}t$$

...
- Jury 1 : Dans quel espace vous aimeriez que ces fonctions soient pour que ce soit bien défini ?
- Moi : Dans L^2. Avec Schwarz, on a l'inégalité qui va nous dire que c'est borné en norme 2.
- Jury 2 : Cauchy-Schwarz !
- Moi : (*Oui bon Cauchy, c'est pas ton père non plus !*) Oui oui, Cauchy-Schwarz ! (*Je bloque un peu ...*)
- Jury 1 : Pourquoi vous bloquez ?
- Moi : J'aimerais ajouter une intégrale pour appliquer Fubini-Tonelli ...
- Jury 1 : Bah faites le.
- Moi :

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

(*Je bloque un petit moment car je réfléchis à la suite et je ne vois plus ...*)
- Jury 3 : Vous n'arrivez pas à appliquer Fubini ?
- Moi : Si si ! Je réfléchissez à la suite. Donc on a

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)||g(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t)|\mathrm{d}x\right)|g(t)|\mathrm{d}t \leq ||f||_1.||g||_1 < +\infty$$

- Jury 2 : C'est égal en fait !
- Moi : (*La prochaine fois, il se lève et il me met un coup de tête j'ai l'impression ...*) Oui oui c'est égal bien sûr ! Du coup, on a $||f * g||_1 < +\infty$.
- Jury 2 : Non !! Vous ne pouvez pas écrire ça car on ne sait toujours pas si c'est défini.
- Moi : Ah oui !
- Jury 2 : Vous voyez bien qu'il y a un problème ?
- Moi : Oui oui ! On a juste montrer qu'une certaine intrégale était finie ...
- Jury 1 : Mais c'est pour quelles valeurs de x ?
- Moi : Pour presque tout x car on n'a juste montré qu'une intrégale était finie ...
- Jury 1 : Avec ce que vous avez montré, vous ne pouvez pas en déduire quelque chose ...
- Moi : Je ne vois pas non ... *Alors en fait ! C'est Fubini bien sûr ! Mais j'étais complétement à côté ... En fait, en montrant que* $\int_{\mathbb{R}} |f * g(x)| \mathrm{d}x < +\infty$*, Fubini donne automatiquement que* $x \mapsto f(x-t)g(t)$ *est intégrable ...*

- Jury 1 : J'aimerais revenir sur vos applications. Vous avez parlé de l'équation de transport. Comment on résout ça par transformation de Fourier car il y a deux variables là ?
- Moi : Alors, ici on va la transformée de Fourier par rapport à la variable x qu'on peut noter $\mathcal{F}_x$. On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) &= 0 \\ \mathcal{F}_x\left(\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x} u(x,t)\right) &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{u}(\xi,t) + i\xi c\widehat{u}(\xi,t) &= 0 \end{aligned}$$

Et ça, on sait le résoudre, c'est quelque chose en exponentiel.
- Jury 1 : Et du coup, u_0 vous la prenez où ?
- Moi : Au moins dans L^1 pour pouvoir parler de transformée de Fourier.
- Jury 1 : D'accord. Et les polynômes orthogonaux, ça fait quoi dans cette leçon ?
- Moi : Dans la démonstration, ça utilise la transformée de Fourier. Je vous l'explique rapidement ?
- Jury 3 : Oui il reste 2 minutes.
- Moi : Alors on prend $f \in L^2(I,\rho)$. On pose la fonction :

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre que cette fonction est dans L^1 et on pourra regarder sa transformée de Fourier que l'on prolonger holomorphiquement sur un connexe. Puis après on aura un résultat sur la dérivée n-ième ...
- Jury 2 : Oui bon ok c'est bon ! C'est fini.

Ressenti :

Une petite erreur qui aurait pu être évité sur le développement ... Mais surtout deux gros points négatifs sur l'espace de Schwartz et la convolution. De plus il est écrit dans le rapport du jury : *La leçon nécessite une bonne maîtrise de questions de base telle que la définition du produit de convolution de deux fonctions de* L^1.
Quelques petites erreurs d'étourderies car je voulais répondre vite ... mais je me corrigeais rapidement.
J'ai trouvé le jury plutôt "fermé" et pas vraiment sympathique, et dont un qui était très rabaissant ... On n'est pas là pour se faire des amis, mais quand même ...

Note :	**14.25/20**

Commentaire du jury :
Analyse et probabilités : transformation de Fourier, 57/80. Plan correct, partiellement maîtrisé cependant. Développement bien mené. Des connaissances inégales, avec des lacunes étonnantes (espace S par exemple).