

## LE PARABOLOIDE HYPERBOLIQUE

d'après Félix CANDELA

### I.- INTERET DES SURFACES A DOUBLE COURBURE

La forme de n'importe quelle coque détermine ses qualités structurales. La géométrie est le critère vital à considérer quand on essaie de comprendre comment une coque tient. La géométrie est également le moyen le plus simple de classer les divers types de coques.

Si le mot "membrane mince" est utilisé de manière générale pour désigner une structure de grande surface et de faible épaisseur on doit cependant distinguer entre ce qui peut être dit "membrane propre" et "membrane impropre" (en Anglais "proper shell" et "improper shell"). La première est définie par une surface à double courbure, la seconde par une surface à simple courbure, c'est-à-dire développable.

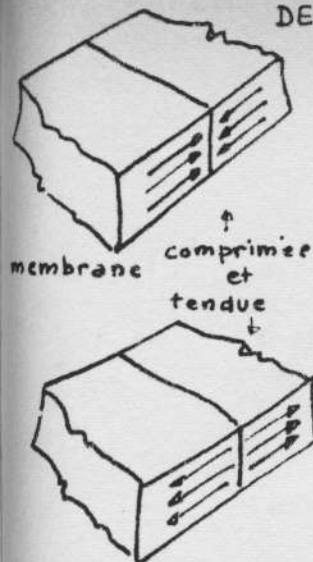
Une "membran propre", à double courbure, travaille principalement par contraintes normales à répartition uniforme dans toute section perpendiculaire à la surface moyenne, les contraintes ne pouvant qu'être parallèles au plan tangent à la surface. Le matériau ne travaille donc qu'en traction ou compression.

Par contre une "membrane impropre" est une structure en lame mince dans laquelle une part importante de la charge est reprise en flexion. Un cas limite en est la plaque mince qui travaille exclusivement en flexion. Une plaque en voûte ou une plaque prismatique est une autre sorte de membrane impropre, où une partie seulement de la charge est supportée par les contraintes normales, l'autre partie créant d'importants moments fléchissants. Dans tous ces cas une épaisseur considérable doit être donnée à la plaque pour résister aux moments de flexion.

Une voûte cylindrique peut travailler exclusivement avec des contraintes normales sous certaines distributions de charge pour lesquelles la ligne de pression coïncide avec la forme de la directrice. Il faut donc que la forme de la voûte corresponde à la ligne funiculaire des charges permanentes. Mais quand une charge accidentelle intervient, la voûte présente des flexions que l'on doit supporter de proche en proche par des renforts rigides (arches) ce qui est loin d'être une solution très élégante.

Par contre les surfaces à double courbure, si leurs supports sont corrects, peuvent travailler avec les seules contraintes normales, quelle que soit la distribution des charges. La flexion ne peut apparaître avant que les contraintes directes n'atteignent de grandes valeurs. Ceci semble évident si l'on essaie d'écraser un petit dôme de n'importe quel matériau non extensible (comme le béton) et que l'on compare le type de rupture obtenu avec celui qui résulte de l'écrasement d'une surface à simple courbure fait en même matériau (cf. fig.).

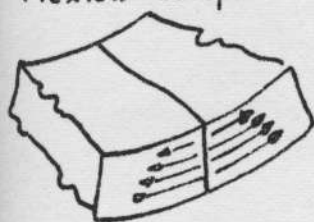
# MEMBRANE et CONTRAINTE DE FLEXION



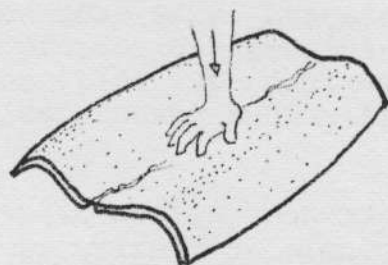
flexion pure



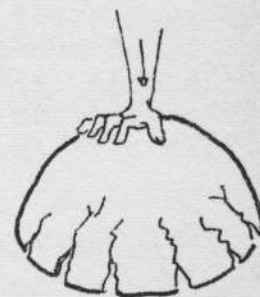
flexion composée



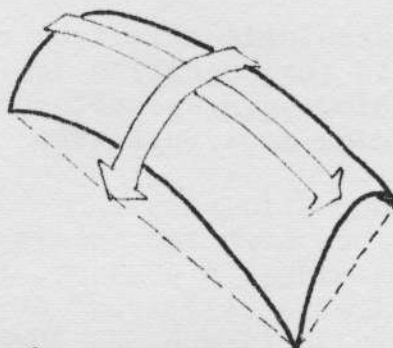
## FIGURES EXPOSANT L'INTERET DU P.H.



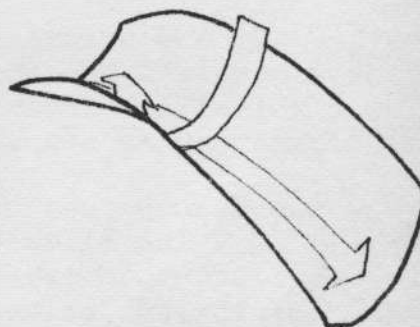
rupture par flexion d'une surface à un seul rayon de courbure



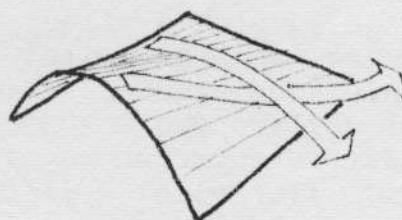
rupture par traction d'une surface à double courbure



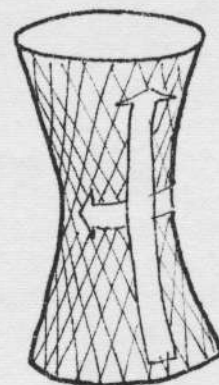
surface synclastique ou ellipsoïdique



surface anticlastique ou hyperboloïdique

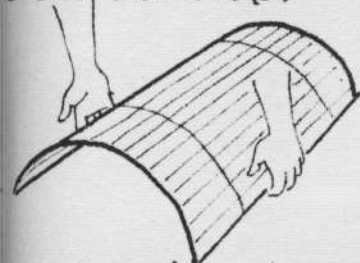


conoïde

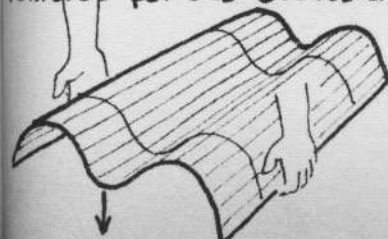


hyperboloïde

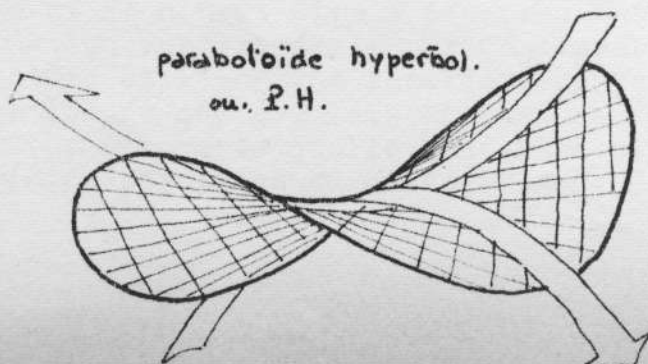
2. Une voûte cylindrique mince et flexible peut être maintenue en équilibre instable aussi longtemps que la ligne des pressions corresp. à la section droite (a)



mais le plus léger changement dans la distribution des charges ou dans la forme de la section droite provoque une rupture due à l'instabilité. Pour éviter ceci, le cylindre doit être renforcé par des arches de rive rigides.



paraboloïde hyperbol. ou, P.H.





Il existe deux sortes de surfaces à double courbure que l'on appelle "synclastiques" et "anticlastiques".

Les surfaces synclastiques ou elliptiques ont leurs deux courbures principales de même sens. Les structures en coque de ce type sont des membranes propres qui peuvent et doivent être construites aussi minces que possible. Cependant elles sont chères à construire car le coffrage ne comprenant aucune ligne droite est très difficile à réaliser.

Les surfaces anticlastiques ou hyperboliques ont leurs deux rayons de courbure principaux de signe différent, "comme une selle". Quelques-unes peuvent être engendrées par des droites, leur définition géométrique est fort aisée. On les dit surfaces réglées. Ce sont entre autres : les conoïdes (à un seul système de génératrices), les hyperboloïdes et les paraboloides hyperboliques (tous deux à deux systèmes de génératrices).

Tous les trois sont plus simples à construire que les surfaces synclastiques car leur coffrage peut être composé d'éléments rectilignes. Cependant conoïdes et hyperboloïdes sont difficiles à calculer en raison de leurs équations mathématiques un peu complexes.

De toutes les formes possibles que l'on peut donner aux voûtes, la plus facile à réaliser est sans conteste celle du P.H. (Paraboloides hyperbolique). Surface à double courbure, non développable (ce qui lui permet de travailler avec les seules contraintes normales), elle a cependant une équation très simple qui permet son calcul au moyen de mathématiques élémentaires.

C'est la qualité principale du P.H. Mais il ne suffit pas seulement d'inventer une nouvelle théorie des structures, il faut calculer ce que l'on veut construire. Il faut utiliser les nombres pour justifier n'importe quelle aventure. Si l'on veut dépasser le stade pédantique des formulaires de construction, il faut défendre son audace avec une impressionnante accumulation de figures et de calculs. Il ne faut cependant pas oublier que les calculs ne sont qu'un moyen de nous donner une modeste connaissance de ce qui se passe dans la structure qu'il a fallu tout d'abord imaginer grâce à une longue expérience et à un solide bon sens. De plus l'analyse mathématique n'apporte que ce qu'on veut bien lui donner au départ. On ne suppose rien sur les qualités élastiques du matériau. Si les résultats donnent comparativement de faibles valeurs aux contraintes, seules de petites elongations ou de petits retraits peuvent se produire dans la structure et l'on peut être à peu près assuré que n'importe quelle déformation restera également négligeable. Donc l'état réel de la structure et l'analyse théorique doivent s'accorder, car la seconde est fondée sur des lois abstraites de la statique logique et non pas sur n'importe quelle hypothèse simplificatrice équivoque des propriétés physiques du matériau.

## II.- DEFINITION DE LA SURFACE DU P.H.

Pour comprendre le comportement sous charge du P.H. il faut d'abord le définir.

Prenons deux droites non parallèles et qui ne se coupent pas : HOD et ABC que l'on appelle provisoirement "directrices". Les droites hn qui coupent HOD et ABC tout en étant parallèles au plan xOy dit plan directeur, définissent une surface. C'est le premier système de génératrices.

Les deux directrices déterminent à leur tour un second plan directeur yOz (qui leur est parallèle). La surface peut être également engendrée par un second système de génératrices in, parallèles à ce plan yOz et coupant chaque génératrice hn du premier système.

Le P.H. contient donc deux systèmes de droites hn et in, chaque système étant parallèle à un plan directeur, les deux plans formant un angle arbitraire :  $w$ . Chaque point de la surface est l'intersection de deux droites contenues dans la surface.

Il est commode de prendre comme axes de coordonnées les deux génératrices passant par le sommet du P.H. et l'axe du P.H. (intersection des deux plans directeurs) qui est toujours normal au plan des deux génératrices.

Dans ces coordonnées birectangulaires, l'équation du P.H. est

$$z = kxy$$

$k$  étant une constante qui représente le gauchissement du P.H. soit :

$$k = \frac{A A'}{OB \cdot OH}$$

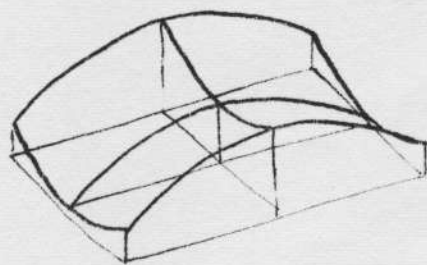
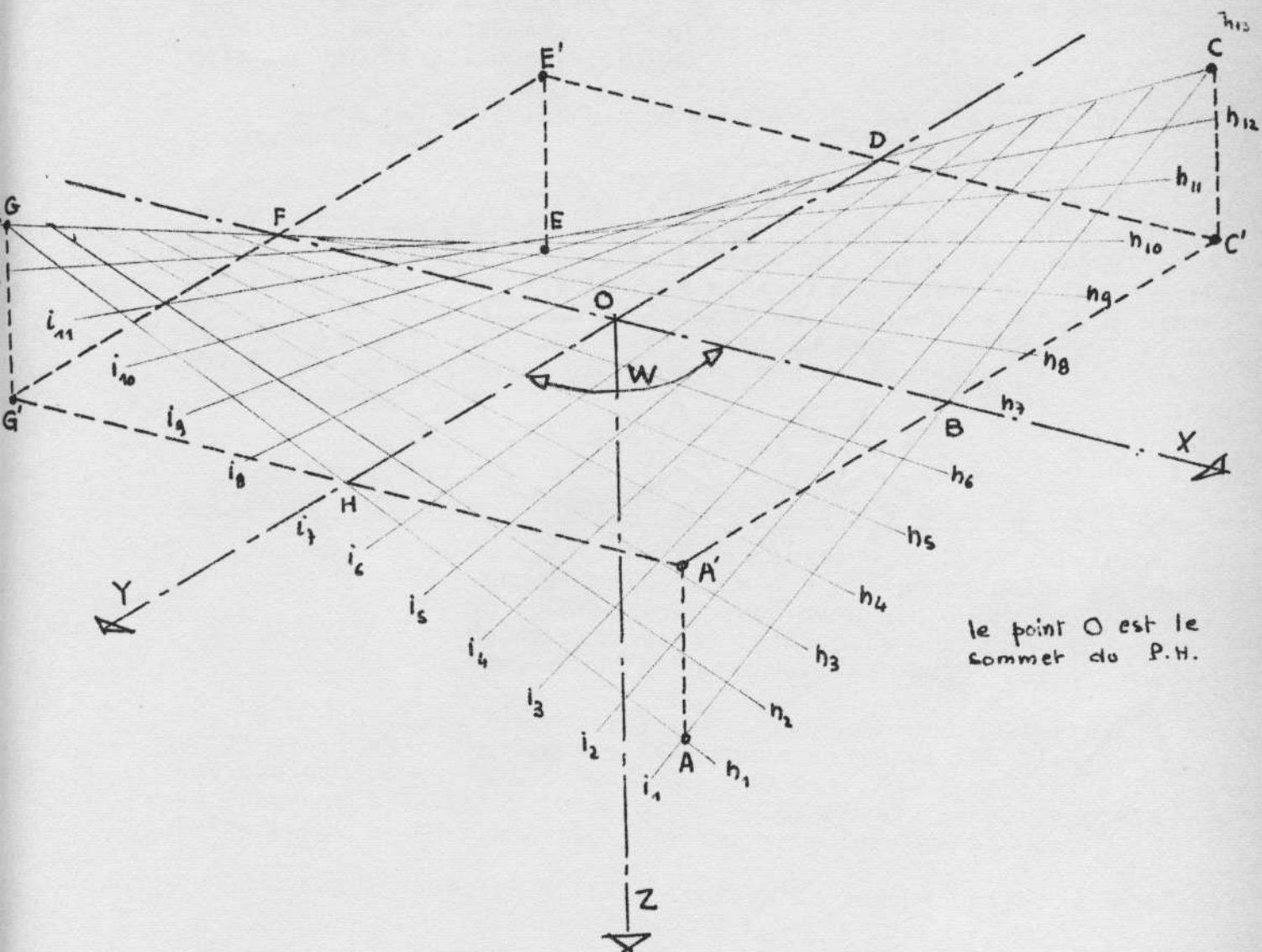
L'angle xOy étant quelconque, les angles xOz et yOz étant droits :

C'est l'équation du second degré liant les trois coordonnées de chaque point la plus simple.

Quand les plans directeurs sont orthogonaux ( $w = 90^\circ$ ) le P.H. est équilatéral ou rectangle. Quand  $w$  est quelconque, le P.H. est oblique. La section parallèle au plan bissecteur du dièdre formé par les plans directeurs d'angle xOy est parabolique. On obtient ainsi deux sortes de paraboles principales de rayon de courbure identique mais de signe inverse.

Toutes les autres sections planes et leurs projections sur le plan xOy sont hyperboliques réelles ou dégénérées, exception faite des sections parallèles à l'axe des  $z$  qui donnent des paraboles et, bien sûr, de celles parallèles aux plans directeurs qui donnent des droites.

Paraboloides hyperbolique  
systèmes de droites  
generatrices



P.H. limité par ses paraboles  
principales



Le P.H. peut être considéré comme engendré par une parabole principale se déplaçant parallèlement à elle-même le long de la parabole principale inverse. Il y a donc deux systèmes de paraboles génératrices. Chaque système est composé de paraboles identiques situées en des plans parallèles.

Toutes ces propriétés géométriques sont utiles pour la construction du coffrage.

Parfois on préfère que l'axe des  $z$  ne soit pas vertical. Dans ce cas, le plan  $xOy$  n'est plus horizontal, aussi les projections horizontales des génératrices ne sont plus parallèles. Les charges auront alors des composantes le long des trois axes du P.H. L'analyse de ce cas général n'a jamais été publiée sous une forme utilisable, aussi se limite t'on au cas du P.H. à axe vertical.

### III.- CONTRAINTES DANS LES MEMBRANES EN COORDONNEES BIRECTANGULAIRES

Pour cette analyse, nous nous servons des formules générales des membranes selon la théorie de PUCHER développée dans son ouvrage "Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten Flächen" (Beton und Eisen - vol. 33 N°19 Berlin -Oct.1934)

Les équations des contraintes d'une membrane de surface d'équation  $z = f(xy)$  représentée dans des coordonnées où l'angle  $xOy$  est quelconque et égal à  $w$ ;  $xOz$  et  $yOz$  étant droits, est obtenue en écrivant l'équilibre des forces agissant sur la surface élémentaire (fig. 2) en projection sur les axes  $Ox$   $Oy$  et  $Oz$ .

En négligeant les différentielles du second ordre, on obtient :

$$(2a) \quad \frac{d v_x}{dx} + \frac{d u}{d y} = - X \sin w$$

$$(2b) \quad \frac{du}{dx} + \frac{d v_y}{dy} = - Y \sin w \quad (\text{dérivées partielles})$$

$$(2c) \quad r v_x + t v_y + 2 s u = (pX + qY - Z) \sin w$$

ou selon les notations de MONGE on a :

$$(3) \quad p = \frac{d z}{d x} \quad q = \frac{d z}{d y} \quad r = \frac{d^2 z}{d x^2} \quad s = \frac{d^2 z}{dx dy} \quad t = \frac{d^2 z}{d y^2}$$

$v_x$   $v_y$   $u$  sont les projections des contraintes réelles  $c_x$   $c_y$  et  $T$  sur le plan  $xOy$ .

soit :

$$v_x = c_x \frac{1 + q^2}{1 + p^2}$$

$$(4) \quad v_y = c_y \frac{1 + p^2}{1 + q^2}$$

$$u = T$$

X Y et Z sont les composantes des forces extérieures par unité de surface projetée sur le plan xOy . Les sens indiqués sur la figure sont les sens positifs.

#### IV.- APPLICATION DE L'EQUATION GENERALE AU P.H.

L'équation du P.H. étant :

$$(1) \quad z = k x y$$

il s'en suit que :

$$(5) \quad p = k y \quad q = k x \quad r = t = 0 \quad s = k$$

et l'équation (2c) devient :

$$(6) \quad 2 k u = ( k y X + k x Y - Z ) \sin w$$

L'équation différentielle (6) où l'on substitue x et y par leurs valeurs prises en (2a) et (2b) donne en intégrant la solution générale pour  $v_x$  et  $v_y$  avec des fonctions arbitraires d'intégration en  $x$  ou  $y$  qui peuvent être déterminées par les conditions aux limites.

L'équation (4) donne la valeur finale des contraintes  $c_x$  et  $c_y$  et u .

On peut noter que  $c_x$  et  $c_y$  sont les composantes obliques de la contrainte, car elles sont parallèles aux côtés  $ds_1$  et  $ds_2$  de la surface élémentaire. Aussi la construction des cercles de MOHR ne peut être employée pour obtenir les contraintes exercées sur une autre section ou les directions et grandeurs des contraintes principales, excepté en première approximation dans le cas d'un P.H. très plat.

L'angle  $a$  formé par l'intersection de deux génératrices est obtenu par la formule :

$$(7) \quad \cos a = \frac{p q + \cos w}{(1 + p^2)(1 + q^2)}$$

de même l'angle  $b$  formé par n'importe quelle section contenue dans le premier quadrant avec la partie positive de la génératrice parallèle à  $Ox$  et passant par ce point est donné par l'équation :

$$(8) \quad \cos b = \frac{p q_b + \cos w_b}{(1 + p^2)(1 + q_b^2)} \quad (\text{fig. 3})$$

dans laquelle  $w_b$  est la projection de l'angle  $b$  sur le plan  $xOy$  et  $q_b$  la tangente de l'angle formé par la droite représentant la section avec le plan  $xOy$ .

Pour éviter toute erreur, on doit observer strictement la convention de signe. Le signe de  $p q_b$  sera positif lorsque les deux côtés de l'angle  $w_b$  seront ascendants ou descendants vers le sommet du P.H. Il sera négatif lorsqu'un côté est ascendant et l'autre descendant.

Les contraintes normales et tangentiellles de n'importe quelle section seront obtenues en considérant les équilibres dans les directions  $c_b$  et  $u_b$  (fig. 2).

$$(9a) \quad c_b = c_x \frac{\sin^2 b}{\sin a} + 2u \frac{\sin b \cdot \sin(b-a)}{\sin a} + c_y \frac{\sin^2(b-a)}{\sin a}$$

$$(9b) \quad u_b = -c_x \frac{\sin b \cdot \cos b}{\sin a} - u \frac{\sin(2b-a)}{\sin a} - c_y \frac{\sin(b-a) \cos(b-a)}{\sin a}$$

Les directions de contraintes principales sont déterminées en écrivant que  $u_b$  est nulle dans l'équation (9b) :

$$(10) \quad \operatorname{tg} 2\theta = \frac{2u \sin a + c_y \sin 2a}{c_x + 2u \cos a + u_y \cos 2a}$$

où  $\theta$  et  $(90^\circ + \theta)$  sont les angles des directions principales avec la partie positive de la génératrice parallèle à  $Ox$  et passant par ce point.



Les valeurs des contraintes principales sont alors :

$$(11a) \quad c_1 = c_x \frac{\sin^2 \theta}{\sin a} + 2u \frac{\sin \theta \sin (\theta - a)}{\sin a} + c_y \frac{\sin^2 (\theta - a)}{\sin a}$$

$$(11b) \quad c_2 = c_x \frac{\cos^2 \theta}{\sin a} + 2u \frac{\cos \theta \cos (\theta - a)}{\sin a} + c_y \frac{\cos^2 (\theta - a)}{\sin a}$$

On peut appliquer cette méthode au cas de charge le plus usuel : celui du poids mort lui-même. Ceci est d'autant plus intéressant que les premiers ouvrages français traitant du P.H. et même PILARSKI semblent vouloir appliquer des formules simplifiées n'ose justifiant que pour des charges et des surfaces très spéciales, à tous les genres de charges et de P.H. Rien n'a été fait pour corriger cette erreur ; et même les ouvrages de semi-vulgarisation persistent à la commettre.

De dangereuses erreurs peuvent résulter de l'inexpérience de projeteurs qui essaient de calculer les contraintes indistinctement sans un sain jugement de la portée limitée des expressions simplifiées qu'ils emploient.

#### V.- CAS D'UNE CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE (POIDS MORT), L'AXE DES z AYANT UNE POSITION ARBITRAIRE (NON VERTICALE)

Posons  $g$  = charge par unité de surface ayant trois composantes :  $X_1$   $Y_1$   $Z_1$  le long des axes  $x$   $y$  et  $z$  du P.H.

Ces trois composantes de la charge sont liées aux trois forces  $X$   $Y$  et  $Z$  (par unité de surface projetée sur  $xOy$ ) comme il apparaît aux équations (2a) (2b) et (2c) par la relation liant la surface réelle de la surface élémentaire à la surface de sa projection sur  $xOy$  :

$$(12) \quad X dx dy \sin w = X_1 ds_1 ds_2 \sin a$$

$$\sin^2 a = \frac{1 + p^2 + q^2 + p^2 q^2 - p^2 q^2 - \cos^2 w - 2 pq \cos w}{(1 + p^2)(1 + q^2)}$$

$$(13) \quad \sin a = \left( \frac{\sin^2 w + p^2 + q^2 - 2 pq \cos w}{(1 + p^2)(1 + q^2)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et de même (fig. n° 2)

$$(14a) \quad \frac{ds_1}{dx} = (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \sec \alpha F$$

$$(14b) \quad \frac{ds_2}{dy} = \sec \beta = (1 + q^2)^{\frac{1}{2}}$$

La substitution des équations (13) (14a) (14b) dans l'équation (12) donne :

$$(15a) \quad X \sin w = X_1 (\sin^2 w + p^2 + q^2 - 2 pq \cos w)^{\frac{1}{2}} = X_1 (F)^{\frac{1}{2}}$$

où :  $F = \sin^2 w + p^2 + q^2 - 2 pq \cos w$

$$(16) \quad = \sin^2 w + k^2 y^2 + k^2 x^2 - 2 k^2 xy \cos w$$

de même :

$$(15b) \quad Y \sin w = Y_1 F^{\frac{1}{2}}$$

$$(15c) \quad Z \sin w = Z_1 F^{\frac{1}{2}}$$

et finalement les équations (2a, 2b, 2c) sont transformées en :

$$(17a) \quad \frac{dv_x}{dx} + \frac{du}{dy} = - X_1 F^{\frac{1}{2}} \quad \text{diff. partielle.}$$

$$(17b) \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv_y}{dy} = - Y_1 F^{\frac{1}{2}} \quad \text{" "}$$

$$(17c) \quad r = \left( \frac{y}{2} X_1 + \frac{x}{2} Y_1 - Z_1 \cdot \frac{1}{2k} \right) F^{\frac{1}{2}}$$

L'équation (17c) est une expression algébrique qui donne d'une manière univoque la valeur de  $u$  en chaque point. L'équation différentielle (17c) en considérant  $X$  et  $Y$  et en substituant ces équ. diff. en (17a) et (17b) puis en intégrant l'expression résultante par rapport respectivement à  $x$  et  $y$ , donne des équations en  $v_x$  et  $v_y$  :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} = & \frac{1}{2} X_1 F^{\frac{1}{2}} + k^2 X_1 \frac{y(y - x \cos w)}{2 F^{\frac{1}{2}}} + k^2 Y_1 \frac{x(y - x \cos w)}{2 F^{\frac{1}{2}}} \\ & - k Z_1 \frac{y - x \cos w}{2 F^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

que l'on substitue en (17a) et que l'on intègre.

$$v_x = -\frac{1}{2} \left\{ \left( 3 X_1 F^{\frac{1}{2}} + \frac{k^2 X_1 y^2 - k Z_1 y}{F^{1/2}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{k^2 Y_1 y - k^2 \cos w X_1 y + k \cos w Z_1}{F^{1/2}} \right) x \right. \right. \\ \left. \left. - k^2 \cos w Y_1 \frac{x^2}{F^{1/2}} \right) dx \right.$$

qui donne après intégration :

$$(18a) \quad v_x = (A_1 x + A_2 y + A_3) F^{1/2} + (A_4 y^2 + A_5 y + A_6) \text{Log}_n(X_7) + f_1(y)$$

$$\text{avec} \quad A_1 = \frac{1}{4} (\cos w Y_1 - 3 X_1)$$

$$A_2 = \frac{5}{4} \cos w X_1 - \frac{1}{2} Y_1 + \frac{3}{4} \cos^2 w Y_1$$

$$A_3 = -\frac{1}{2k} \cos w Z_1$$

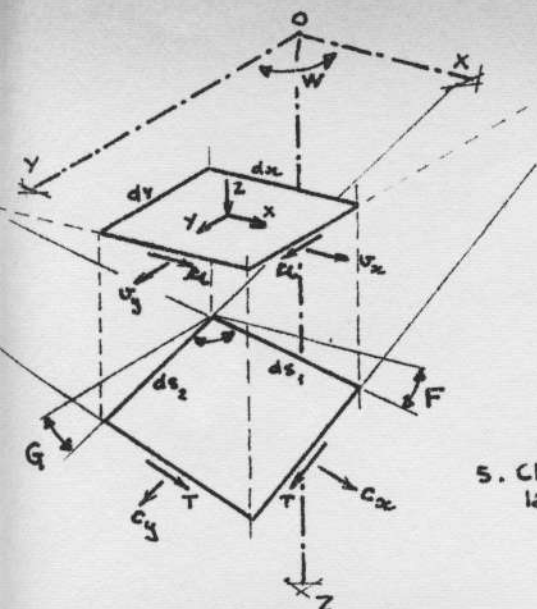
$$A_4 = -\frac{5}{4} k \sin^2 w X_1 - \frac{3}{4} k \cos w \sin^2 w Y_1$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \sin^2 w Z_1$$

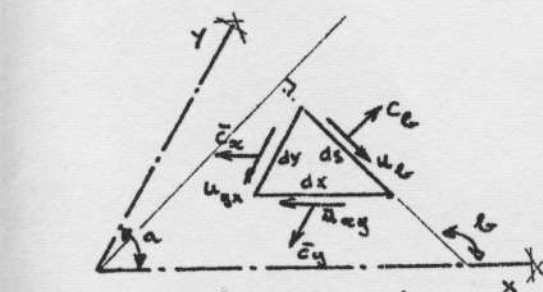
$$A_6 = -\frac{1}{4k} \sin^2 w (3 X_1 + \cos w Y_1)$$

$$X_7 = \frac{k x - k y \cos w + F^{1/2}}{\sin w (1 + k^2 y^2)^{1/2}}$$

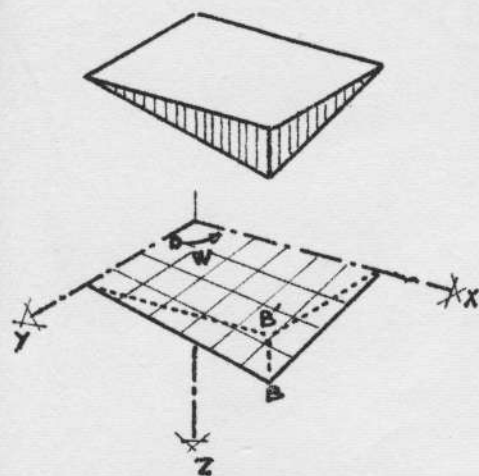




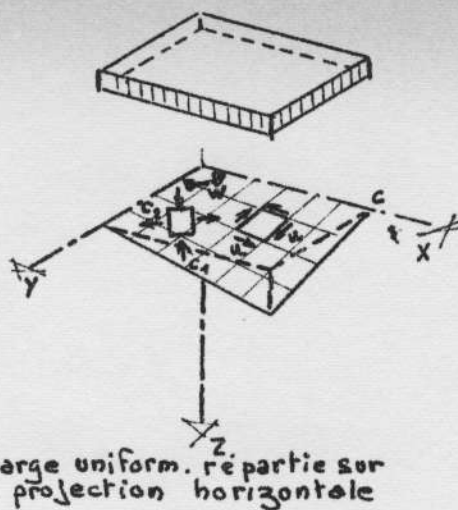
1. Forces et contraintes agissant sur la surface élémentaire



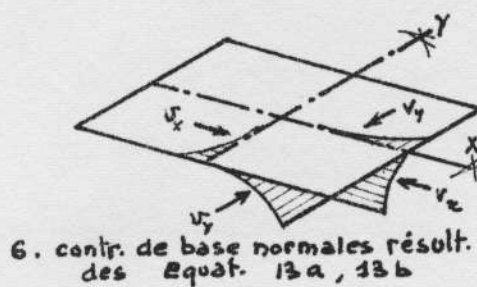
2. Conditions d'équilibre



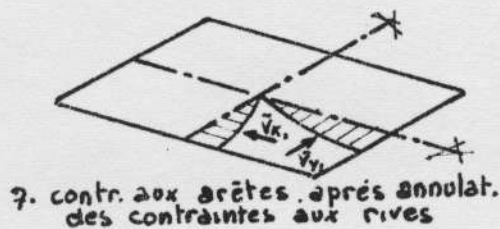
3. Pleine Charge



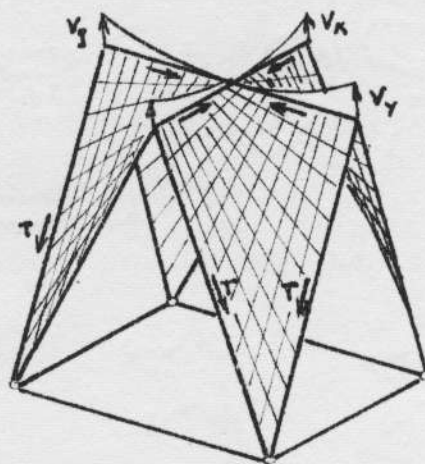
4. Charge uniform. répartie sur la projection horizontale



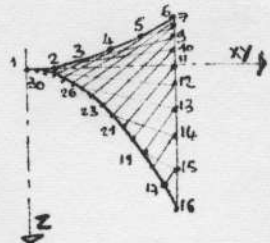
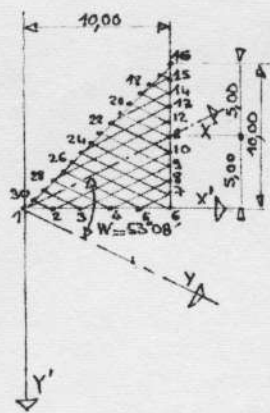
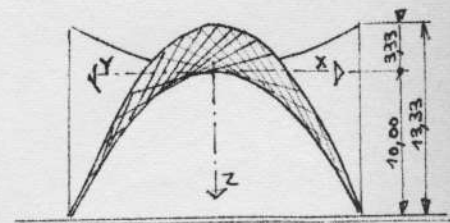
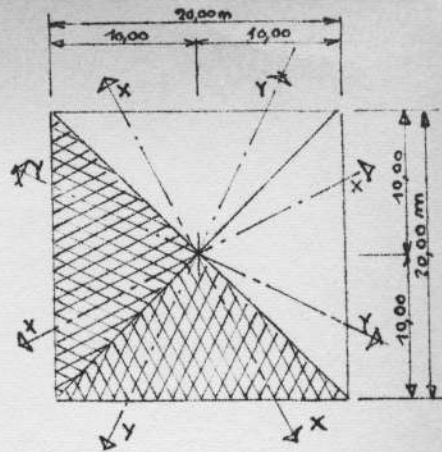
5. contr. de base normales résult. des Equat. 13a, 13b



6. contr. aux arêtes après annulat. des contraintes aux rives



7. contr. verticales nonéquilibrées aux arêtes après avoir annulé les contra. des deux cotés



8. CALCUL D'UNE VOÛTE À ARÊTES

de même :

$$(18b) \quad v_y = (B_1 y + B_2 x + B_3) F^{1/2} + (B_4 x^2 + B_5 x + B_6) \text{Log}_n(Y_7) + f_2(x)$$

avec :

$$B_1 = \frac{1}{4} (\cos w X_1 - 3 Y_1)$$

$$B_2 = \frac{5}{4} \cos w Y_1 - \frac{1}{2} X_1 + \frac{3}{4} \cos^2 w X_1$$

$$B_3 = -\frac{1}{2k} \cos w Z_1 = A_3$$

$$B_4 = -\frac{5}{4} k \sin^2 w Y_1 - \frac{3}{4} k \cos w \sin^2 w X_1$$

$$B_5 = \frac{1}{2} \sin^2 w Z_1 = A_5$$

$$B_6 = -\frac{1}{4k} \sin^2 w (3 Y_1 + \cos w X_1)$$

$$Y_7 = \frac{k y - k x \cos w + F^{1/2}}{\sin w (1 + k^2 x^2)^{1/2}}$$

Les équations (17c) (18a) et (18b) donnent les valeurs de base des contraintes en n'importe quel point de la surface. Mais l'indétermination sur les contraintes obliques  $c_x$  et  $c_y$  ou sur leur projection  $v_x$  et  $v_y$  est représentée par l'introduction de fonctions d'intégration arbitraire :  $f_1(y)$  et  $f_2(x)$  dans les équations (18a) et (18b). Ceci permet de satisfaire à n'importe quelle condition aux limites.

On peut remarquer que l'intégration directe du système d'équations aux dérivées partielles a été rendue possible par l'extrême simplicité du P.H. Si on essayait d'employer cette méthode avec une autre équation du second degré, le système ne serait plus directement intégrable et dans chaque cas, il faudrait trouver la solution particulière du système qui satisfait simultanément toute une série de conditions aux limites données.

## VI.- CAS PARTICULIERS

(a)  $w = 90^\circ$  P.H. rectangulaire

$$\sin w = 1 / \cos w = 0 / A_3 = B_3 = 0$$

$$F^{1/2} = (1 + k^2 y^2 + k^2 x^2)^{1/2}$$

$$(19a) \quad u = \left( \frac{1}{2} X_1 y + \frac{1}{2} Y_1 x - \frac{1}{2k} Z_1 \right) F^{1/2}$$

$$(19b) \quad v_x = \left( -\frac{3}{4} X_1 x - \frac{1}{2} Y_1 y \right) F^{1/2} + \left( -\frac{5}{4} k X_1 y^2 + \frac{1}{2} Z_1 y - \frac{3}{4k} X_1 \right) \text{Log}_n \frac{kx + F^{1/2}}{(1+k^2 y^2)^{1/2}} + f_1(y)$$

$$(19c) \quad v_y = \left( -\frac{3}{4} Y_1 y - \frac{1}{2} X_1 x \right) F^{1/2} + \left( -\frac{5}{4} k Y_1 x^2 + \frac{1}{2} Z_1 x - \frac{3}{4k} Y_1 \right) \text{Log}_n \frac{ky + F^{1/2}}{(1+k^2 x^2)^{1/2}} + f_2(x)$$

(b) Charge uniformément répartie, l'axe z étant vertical (fig. 4)

$$X_1 = Y_1 = 0$$

$$(20a) \quad u = -\frac{1}{2k} Z_1 F^{1/2}$$

$$(20b) \quad v_x = -\frac{1}{2k} Z_1 \cos w F^{1/2} + \frac{1}{2} \sin^2 w Z_1 y \text{Log} \frac{kx - ky \cos w + F^{1/2}}{\sin w (1+k^2 y^2)^{1/2}} + f_1(y)$$

$$(20c) \quad v_y = -\frac{1}{2k} Z_1 \cos w F^{1/2} + \frac{1}{2} \sin^2 w Z_1 x \text{Log} \frac{ky - kx \cos w + F^{1/2}}{\sin w (1+k^2 x^2)^{1/2}} + f_2(x)$$

(c) Charge uniformément répartie sur un P.H. rectangulaire à axe vertical

$$X_1 = Y_1 = 0 \quad w = 90^\circ$$

$$(21a) \quad u = -\frac{1}{2k} Z_1 F^{1/2}$$

$$(21b) \quad v_x = \frac{1}{2} Z_1 y \text{Log} \frac{kx + F^{1/2}}{(1+k^2 y^2)^{1/2}} + f_1(y)$$

$$(21c) \quad v_y = \frac{1}{2} Z_1 x \text{Log} \frac{ky + F^{1/2}}{(1+k^2 x^2)^{1/2}} + f_2(x)$$



(d) Charge uniformément répartie sur la projection horizontale, l'axe z étant vertical

$$X_1 = Y_1 = 0 \quad Z_1 = Z = g = \text{cste}$$

$$(22a) \quad q = - \frac{g \sin w}{2 k} = \text{cste}$$

$$(22b) \quad v_x = f_1(y)$$

$$(22c) \quad v_y = f_2(x)$$

$f_1(y)$  et  $f_2(x)$  étant des fonctions arbitraires d'intégration qui peuvent avoir n'importe quelle valeur, y compris zéro, qui donne  $v_x = 0 = v_y$ .

Dans ce cas  $\theta \neq \frac{w}{2}$  et les deux contraintes principales ont la même valeur absolue :  $u$  en chaque point de la surface, et sont dirigées en gros suivant la bissectrice de l'angle  $w$ .

$$(23) \quad c_1 = -c_2 \neq /u/$$

Ce cas très particulier est le plus communément connu, mais on doit se rappeler que - comme il s'agit d'une solution approximée de la formule générale qui suppose  $g$  pratiquement constant et  $a$  presque égal à  $w$  en chaque point de la surface - on ne peut l'appliquer que dans un nombre très limité de cas, où l'axe des  $z$  est vertical et la surface assez plate pour considérer la charge réelle comme uniformément répartie sur le plan  $xOy$ . Dans tous les autres cas il faut employer la formule générale.

## VII.- CONDITIONS AUX LIMITES

On doit se rappeler que dans tous les cas la valeur de  $u$  est définitivement fixée par l'équation (17c), mais que les valeurs de  $v_x$ ,  $v_y$  et  $c_x$ ,  $c_y$  peuvent varier suivant le choix des fonctions arbitraires  $f_1(y)$  et  $f_2(x)$  qui apparaissent en (18a) et (18b).

Ceci veut dire que les contraintes obliques dans une surface indéfinie sont statiquement indéterminées (hyperstatiques). Pour les fixer il faut recourir aux conditions aux limites. Ceci nous donne quelques libertés dans le choix des limites ou des supports du voile.

a) P.H. limité par des génératrices droites

En donnant des valeurs convenables aux fonctions arbitraires d'intégration, on peut laisser deux côtés contigus de n'importe quel quadrilatère gauche libre de toute contrainte oblique. Mais, bien sûr, les contraintes des deux côtés opposés sont alors déterminées, et les forces obliques agissant sur ces côtés doivent être reprises par des supports continus.

C'est-à-dire qu'en pratique il suffit de trouver les valeurs numériques que l'on doit ajouter aux contraintes le long de chaque génératrice (du treillis que l'on considère) pour se conformer aux conditions de support sur un certain côté. Nous pouvons par exemple annuler la composante oblique de la contrainte le long d'un bord, introduisant, comme  $\underline{A} v_x = f_1(y)$  ou  $\underline{A} v_y = f_2(x)$ , une série de contraintes égales et opposées à celles résultant à ce bord des équations (18a) ou (18b). Mais ceci implique l'introduction des mêmes contraintes additionnelles au bord opposé, comme si chaque génératrice était une traverse ou une entretoise et ceci produit bien sûr des changements dans l'état des contraintes aux points intérieurs de la surface.

Grâce à ces considérations, il est clair qu'un simple quadrilatère gauche sous ce type de charge (poids mort) ne peut être en équilibre, sans au moins que deux côtés contigus n'aient des supports capables de résister à des forces de n'importe quelle direction. Des considérations de symétrie dans l'association de plusieurs quadrilatères gauches peut conduire à des simplifications des conditions nécessaires aux supports, mais il restera toujours des composantes non équilibrées des contraintes le long de certains côtés (cf. fig. n° 5).

Puisque les contraintes de cisaillement le long des génératrices sont déterminées, les contraintes tangentielles résultant de l'addition des contraintes de cisaillement le long du bord doivent être reprises par ce bord travaillant en tension ou en compression. Dans ce dernier cas, on doit prévoir une membrure de bord capable de résister aussi bien à son poids propre qu'à la force de compression transmise par le voile.

La déflexion ou la déformation de cette membrure si on la laisse en support, peut troubler l'état des contraintes de la membrure dans la partie voisine du voile et produire une courbure secondaire de la lane.

Cependant cet effet est négligeable dans la plupart des cas, mais peut se produire lorsque l'épaississement de la lane dans la petite zone proche de la membrure est nécessaire en même temps que des renforts additionnels normaux aux bords.

b) P.H. ayant des bords arbitrairement courbes

(cf. fig.)

Puisque dans les formules (9a) et (9b) des contraintes normales et tangentielles de n'importe quelle section non parallèle aux génératrices,  $c_x$  et  $c_y$  peuvent avoir n'importe quelle valeur arbitraire, il est possible avec un bord courbe, (mais pas un bord dont la tangente soit parallèle à une génératrice) de donner n'importe quelle valeur optimale à  $c_b$  et  $u_b$  y compris zéro.

Lorsque  $c_b$  et  $u_b$  sont annulés le long de chaque bord, il est clair que ce bord, libre de contrainte, ne réclame aucun renfort. Ceci peut donner un bord extrêmement gracieux. Les valeurs de  $c_x$  et  $c_y$  nécessaires pour annuler  $c_b$  et  $u_b$  sont obtenues en annulant les équations (9a) et (9b) soit :

$$(24a) \quad \overline{c}_x = -u \frac{\sin(b-a)}{\sin b}$$

$$(24b) \quad \overline{c}_y = -u \frac{\sin b}{\sin(b-a)}$$

D'un autre côté, si nous fixons d'avance les valeurs de  $c_b$  et  $u_b$  en tout point du bord (comme par exemple lorsque l'on essaie de les égaliser avec quelque composante du poids mort d'une membrane de rive, la valeur de  $c_x$  et de  $c_y$  pour les équilibrer est donnée par :

$$(25a) \quad \overline{c}_x = c_b \frac{\cos(b-a)}{\sin b} + (u_b - u) \frac{\sin(b-a)}{\sin b}$$

$$(25b) \quad \overline{c}_y = - (u_b + u) \frac{\sin b}{\sin(b-a)} - c_b \frac{\cos b}{\sin(b-a)}$$

Une fois les valeurs de  $\overline{c}_x$  et de  $\overline{c}_y$  déterminées aux points limites, leurs valeurs le long des génératrices rencontrant ces bords sont alors fixées. Quand ces génératrices coupent un autre bord, les contraintes résultant sur ce bord ( $c_b$  et  $u_b$  obtenues par (9a) et (9b)) doivent être reprises au moyen d'un support complet, c'est-à-dire un support capable de reprendre des forces dans une direction quelconque.

Des combinaisons symétriques de plusieurs P.H. peuvent conduire à des simplifications des conditions des supports. Par exemple, aux arêtes de n'importe quelle voûte symétrique à arêtes, il ne reste que les forces contenues dans le plan de l'arête, car les forces normales à ce plan se compensent par symétrie.



On doit faire quelques considérations importantes sur l'analyse pratique. On doit garder présent à l'esprit, par exemple, que lorsqu'on examine les points d'un treillis formé par les génératrices, la largeur réelle de chaque intervalle change avec sa position, mais que les contraintes agissant en chaque point d'intersection sont des contraintes unitaires (par unité de longueur). Quand on translate les contraintes d'un bout à l'autre d'une génératrice la différence de longueur des intervalles sur lesquels les contraintes agissent à chaque extrémité doivent être prises en considération.

Cependant, si on se sert des projections des contraintes :  $v_x$  et  $v_y$  et des projections des intervalles sur le plan  $xOy$  on obtient un treillis uniforme dans lequel les intervalles sont constants. Pour traduire les contraintes on doit d'abord trouver  $v_x$  à partir de  $c_x$  à une extrémité, traduire  $v_x$  à l'autre extrémité, et alors en déduire  $c_x$ . Ce procédé est explicité dans les exemples qui suivent.

## VII.- EXEMPLE NUMERIQUE

Voûte à arêtes sur plan carré, formée par l'intersection de deux P.H. à axes verticaux (cf. fig. et tables num.)

données : longueur du plan :  $L = 20$  m  
 hauteur sous sommet  $H = 10$  m  
 épaisseur : 4 cm

$$\frac{w}{2} = \arctg \frac{5}{10} = 26^\circ 34' \quad w = 53^\circ 8'$$

Comme le plan de la structure est carré, le travail est assez simple. On doit seulement examiner le triangle 1 - 6 - 16 - 1 (1/8 de la structure).

ON PROCEDE COMME SUIT :

- 1.- Trouver les coordonnées des points du bord 1 à 30 de la grille des génératrices combinées sur la surface, après avoir déterminé la valeur numérique du paramètre  $k$  du P.H. (colonnes 1, 2, 3)

$$k = \frac{z_{16}}{x_{16} y_{16}} = \frac{10}{16,77051 \times (-5,59017)} = -0,106667$$

- 2.- Trouver les valeurs de base de  $u$ ,  $v$  et  $v_x$  aux points 1 à 30, par les équations (20a) (20<sub>b</sub>) et (20<sub>c</sub><sup>x</sup>) (cas B, colonnes 4,5,6)
- 3.- Le bord 6 - 16 est laissé libre, sans contrainte normale ou tangentielle et donc sans renfort. A l'aide des équations (24a) et (24b), on trouve les valeurs de  $c_x$  et  $c_y$  annulant les contraintes normales et tangentielles  $c_b$  et  $u_b$  sur le bord 6 - 16 (colonnes 9 et 10).

| Point | 1        | 2        | 3        | 4       | 5       | 6       |
|-------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|
|       | Y(m)     | X(m)     | Z(m)     | u(kg/m) | v(kg/m) | w(kg/m) |
| 1     | 0.0000   | 0.0000   | 0.0000   | 750     | 450     | 450     |
| 2     | 1.11803  | 1.11803  | -0.1333  | 753     | 450     | 450     |
| 3     | 2.23607  | 2.23607  | -0.5333  | 776     | 449     | 449     |
| 4     | 3.35411  | 3.35411  | -1.0000  | 808     | 449     | 449     |
| 5     | 4.47215  | 4.47215  | -1.5333  | 850     | 449     | 449     |
| 6     | 5.59019  | 5.59019  | -2.1333  | 901     | 450     | 450     |
| 7     | 6.70823  | 6.70823  | -2.8000  | 963     | 420     | 533     |
| 8     | 7.82627  | 7.82627  | -3.5333  | 1035    | 416     | 600     |
| 9     | 8.94431  | 8.94431  | -4.3333  | 1117    | 525     | 820     |
| 10    | 10.06235 | 10.06235 | -5.2000  | 1205    | 648     | 1022    |
| 11    | 11.18039 | 11.18039 | -6.1333  | 1306    | 808     | 1199    |
| 12    | 12.29843 | 12.29843 | -7.1333  | 1421    | 994     | 1406    |
| 13    | 13.41647 | 13.41647 | -8.2000  | 1550    | 1200    | 1618    |
| 14    | 14.53451 | 14.53451 | -9.3333  | 1693    | 1419    | 1835    |
| 15    | 15.65255 | 15.65255 | -10.5333 | 1850    | 1646    | 2053    |
| 16    | 16.77059 | 16.77059 | -11.8000 | 2024    | 1879    | 2276    |
| 17    | 17.88863 | 17.88863 | -13.1333 | 2215    | 2127    | 2502    |
| 18    | 19.00667 | 19.00667 | -14.5333 | 2423    | 2390    | 2730    |
| 19    | 20.12471 | 20.12471 | -16.0000 | 2648    | 2667    | 2960    |
| 20    | 21.24275 | 21.24275 | -17.5333 | 2890    | 2958    | 3192    |
| 21    | 22.36079 | 22.36079 | -19.1333 | 3149    | 3263    | 3426    |
| 22    | 23.47883 | 23.47883 | -20.8000 | 3425    | 3582    | 3662    |
| 23    | 24.59687 | 24.59687 | -22.5333 | 3718    | 3915    | 3900    |
| 24    | 25.71491 | 25.71491 | -24.3333 | 4028    | 4262    | 4140    |
| 25    | 26.83295 | 26.83295 | -26.2000 | 4355    | 4623    | 4382    |
| 26    | 27.95099 | 27.95099 | -28.1333 | 4700    | 5000    | 4626    |
| 27    | 29.06903 | 29.06903 | -30.1333 | 5062    | 5392    | 4872    |
| 28    | 30.18707 | 30.18707 | -32.2000 | 5441    | 5800    | 5120    |
| 29    | 31.30511 | 31.30511 | -34.3333 | 5838    | 6223    | 5370    |
| 30    | 32.42315 | 32.42315 | -36.5333 | 6253    | 6662    | 5622    |

TABLEAUX DES CALCULS  
D'UNE VOUTE A ARÊTES FORMÉES  
PAR L'INTERSECTION DE DEUX  
P.H. A AXE VERTICAL - SUR PLAN  
CARRÉ

UNITÉ. DANS L'ORDRE DES COLON.

$\theta$  : m  
 $x$  : m  
 $z$  : m  
 $u$  : kg/m  
 $v_x$  : "  
 $v_y$  : "  
 $a$  : degré et minute  
 $b_1$  : "  
 $c_x$  : kg/m  
 $c_y$  : "  
 $\bar{u}_x$  : "  
 $\bar{u}_y$  : "  
 $\bar{\Delta v}_x$  : "  
 $\bar{\Delta v}_y$  : "  
 $\Delta v_x$  : "  
 $\Delta v_y$  : "  
 $\bar{v}_x$  : "  
 $\bar{v}_y$  : "  
 $\bar{c}_x$  : "  
 $\bar{c}_y$  : "

$a$  : deg. et min.  
 $b_2$  : "  
 $c_0$  : kg/m  
 $u_0$  : "  
interval réel : m  
 $F_{c0}$  : kg/m  
 $F_{u0}$  : "  
 $F_{H_{u0}}$  : kg  
 $F_{V_{u0}}$  : "  
 $F_{H_{c0}}$  : "  
 $F_{V_{c0}}$  : "  
 $F_H$  : "  
 $F_V$  : "

| Point | 7         | 8         | 9     | 10    | 11          | 12          | 13           | 14           |
|-------|-----------|-----------|-------|-------|-------------|-------------|--------------|--------------|
|       | $a^\circ$ | $b^\circ$ | $c_x$ | $c_y$ | $\bar{u}_x$ | $\bar{u}_y$ | $\Delta v_x$ | $\Delta v_y$ |
| 6     | 45° 11'   | 42° 25'   | -401  | -901  | -901        | -901        | -1351        | -1251        |
| 7     | 46° 17'   | 43° 12'   | -332  | -1074 | -923        | -923        | -1343        | -1256        |
| 8     | 47° 23'   | 44° 18'   | -264  | -1247 | -946        | -946        | -1335        | -1261        |
| 9     | 48° 29'   | 45° 24'   | -195  | -1420 | -1068       | -1068       | -1327        | -1266        |
| 10    | 49° 35'   | 46° 30'   | -126  | -1593 | -1190       | -1190       | -1319        | -1271        |
| 11    | 50° 41'   | 47° 36'   | -57   | -1766 | -1312       | -1312       | -1311        | -1276        |
| 12    | 51° 47'   | 48° 42'   | 12    | -1939 | -1434       | -1434       | -1303        | -1281        |
| 13    | 52° 53'   | 49° 48'   | 81    | -2112 | -1556       | -1556       | -1295        | -1286        |
| 14    | 53° 59'   | 50° 54'   | 150   | -2285 | -1678       | -1678       | -1287        | -1291        |
| 15    | 55° 05'   | 51° 00'   | 219   | -2458 | -1800       | -1800       | -1279        | -1296        |
| 16    | 56° 11'   | 52° 06'   | 288   | -2631 | -1922       | -1922       | -1271        | -1301        |

| Point | 15           | 16           | 17          | 18          | 19          | 20          |
|-------|--------------|--------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
|       | $\Delta v_x$ | $\Delta v_y$ | $\bar{u}_x$ | $\bar{u}_y$ | $\bar{c}_x$ | $\bar{c}_y$ |
| 16    | -5582        | -2576        | -2370       | -1200       | -2044       | -2288       |
| 17    | -5456        | -2570        | -2403       | -1458       | -2003       | -2479       |
| 18    | -4720        | -2640        | -3111       | -1700       | -1998       | -2786       |
| 19    | -4304        | -2723        | -2812       | -1466       | -1974       | -2310       |
| 20    | -3455        | -2907        | -2578       | -1242       | -1712       | -1877       |
| 21    | -3605        | -2544        | -2369       | -1029       | -1622       | -1478       |
| 22    | -3235        | -2207        | -2125       | -841        | -1511       | -1161       |
| 23    | -3126        | -1903        | -2184       | -693        | -1405       | -900        |
| 24    | -2946        | -1646        | -2094       | -568        | -1306       | -713        |
| 25    | -2766        | -1456        | -2067       | -534        | -1228       | -615        |
| 26    | -2742        | -1352        | -2037       | -538        | -1144       | -614        |
| 27    | -2619        | -1243        | -1998       | -647        | -1026       | -708        |
| 28    | -2496        | -1132        | -1946       | -826        | -845        | -882        |
| 29    | -2372        | -1027        | -1886       | -1029       | -740        | -1116       |
| 30    | -2248        | -915         | -1806       | -1327       | -645        | -1396       |
| 1     | -2154        | -814         | -1749       | -1744       | -549        | -1749       |

| Point | 21        | 22        | 23     | 24    | 25          | 26          | 27          |
|-------|-----------|-----------|--------|-------|-------------|-------------|-------------|
|       | $a^\circ$ | $b^\circ$ | $c_x$  | $c_y$ | $\bar{u}_x$ | $\bar{u}_y$ | $\bar{c}_x$ |
| 16    | 38° 43'   | 152° 44'  | -636   | 1334  | 0.7984      | -508        | -1093       |
| 17    | 39° 30'   | 152° 34'  | -856   | 1385  | 1.5615      | -1323       | 2463        |
| 18    | 40° 26'   | 152° 41'  | -1156  | 1462  | 2.4499      | -1725       | 2181        |
| 19    | 41° 23'   | 152° 54'  | -1777  | 1573  | 3.4241      | -1107       | 1813        |
| 20    | 42° 10'   | 153° 59'  | -2488  | 1703  | 4.5378      | -663        | 1429        |
| 21    | 43° 01'   | 154° 28'  | -3268  | 1854  | 5.7964      | -347        | 1107        |
| 22    | 43° 52'   | 154° 01'  | -4111  | 2037  | 7.2000      | -175        | 970         |
| 23    | 44° 43'   | 153° 45'  | -5000  | 2250  | 8.7500      | -17         | 973         |
| 24    | 45° 34'   | 153° 32'  | -5936  | 2494  | 10.4304     | +19         | 586         |
| 25    | 46° 25'   | 153° 20'  | -6919  | 2768  | 12.2500     | -1          | 422         |
| 26    | 47° 16'   | 153° 07'  | -7950  | 3072  | 14.2000     | -113        | 269         |
| 27    | 48° 07'   | 152° 54'  | -9039  | 3406  | 16.2800     | -307        | 230         |
| 28    | 48° 58'   | 152° 41'  | -10186 | 3770  | 18.4800     | -561        | 56          |
| 29    | 49° 49'   | 152° 28'  | -11391 | 4165  | 20.7900     | -851        | -64         |
| 30    | 50° 40'   | 152° 15'  | -12654 | 4590  | 23.2100     | -1166       | -215        |
| 1     | 51° 31'   | 152° 02'  | -13975 | 5044  | 25.7400     | -1497       | -597        |

| Point | 28       | 29           | 30           | 31           | 32    | 33    |
|-------|----------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|
|       | $F_{u0}$ | $F_{V_{u0}}$ | $F_{H_{u0}}$ | $F_{V_{c0}}$ | $F_H$ | $F_V$ |
| 16    | 633      | 896          | -324         | 236          | 299   | 1132  |
| 17    | 1306     | 1224         | -851         | 646          | 655   | 2370  |
| 18    | 1379     | 1690         | -1057        | 862          | 322   | 2532  |
| 19    | 1200     | 1359         | -617         | 572          | 553   | 1931  |
| 20    | 991      | 1027         | -362         | 354          | 624   | 1381  |
| 21    | 805      | 754          | -179         | 190          | 626   | 949   |
| 22    | 740      | 627          | -83          | 98           | 657   | 725   |
| 23    | 601      | 484          | -70          | 27           | 581   | 481   |
| 24    | 489      | 323          | -77          | -11          | 492   | 312   |
| 25    | 402      | 227          | 0            | -1           | 402   | 228   |
| 26    | 316      | 149          | -28          | 59           | 288   | 208   |
| 27    | 245      | 87           | -55          | 146          | 160   | 227   |
| 28    | 92       | 34           | -63          | 223          | 29    | 257   |
| 29    | -63      | -12          | -47          | 247          | -110  | 235   |
| 30    | -244     | -20          | -17          | 179          | -231  | 159   |
| 1     | -177     | 0            | 0            | 0            | -177  | 0     |

Pour ceci, on a besoin de connaître les valeurs de  $a$  et  $b$  aux points 6 - 16, on les obtient grâce aux équations (7) et (8) (colonnes 7 et 8).

- 4.- En appliquant les relations (4), les valeurs de  $\overline{v_x}$  et  $\overline{v_y}$  sont déterminées pour ces points (colonnes 11 et 12).
- 5.- Trouver les valeurs des fonctions d'intégration  $f_1(y) = \int \overline{v_x} dy$  et  $f_2(x) = \int \overline{v_y} dx$  aux points 6 - 16, différences entre les valeurs de base de  $\overline{v_x}$  et  $\overline{v_y}$  (colonnes 5 et 6) et celles trouvées au paragraphe 4 (col. 11 et 12). On les inscrit dans les colonnes 13 et 14.
- 6.- Lorsque les contraintes de base des points 6 - 16 sont modifiées, celles de l'arête 16 - 30 - 1 sont aussi modifiées, car  $\int \overline{v_x} dy$  et  $\int \overline{v_y} dx$  doivent être constants tout le long des génératrices. Les valeurs  $\int \overline{v_x} dy$  et  $\int \overline{v_y} dx$  des fonctions  $f_1(y)$  et  $f_2(x)$  apparaissent aux colonnes 15 et 16, et les valeurs modifiées de  $\overline{v_x}$  et  $\overline{v_y}$  en 17 et 18.
- 7.- Avec les expressions (4),  $\overline{v_x}$  et  $\overline{v_y}$  sont transformées respectivement en  $c_x$  et  $c_y$  (col. 19 et 20).
- 8.- Des équations (9a) et (9b) on tire les valeurs de  $c_b$  et  $u_b$  sur le bord 16 - 30 - 1 (col. 23 et 24). On doit d'abord trouver les valeurs de  $a$  et de  $b$  en ces points (col. 21 et 22) grâce aux équations (7) et (8).
- 9.- Comme  $c_b$  et  $u_b$  sont des contraintes par unité de longueur du bord, lorsqu'elles sont multipliées par les intervalles réels correspondants (col. 25), on obtient les forces  $F_{cb}$  et  $F_{ub}$  concentrées aux points de la trame. (col. 26 et 27).
- 10.- Les forces  $F_{ub}$ , contenues dans le plan de l'arête, sont décomposées en une composante horizontale  $F_{Hub}$  et une composante verticale  $F_{Vub}$  (col. 28 et 29).  $F_{Hub}$  est considérée comme positive quand elle est dirigée de 1 vers 16,  $F_{Vub}$  est positive quand elle est dirigée vers le bas.
- 11.- Les forces  $F_{cb}$  agissent le long du plan normal à la parabole 1 - 16 en chaque point, mais comme il s'agit de contraintes de membranes; elles doivent être parallèles au plan tangent au P.H. en chaque point. Leurs directions sont donc les intersections des plans tangents au P.H. avec le plan normal à la parabole 1 - 16 en chaque point. En général leurs projections horizontales ne sont pas normales à la projection de l'arête 1 - 16.  
Une fois sa direction trouvée, on peut décomposer  $F_{cb}$  en sa composante verticale et sa composante horizontale. Cette dernière a à son tour une composante normale et une composante tangentielle à la projection de l'arête. La composante normale est équilibrée par les forces provenant de la partie contigüe et symétrique de la structure. Les composantes horizontale  $F_{Hcb}$  et verticale  $F_{Vcb}$



restantes apparaissent aux colonnes 30 et 31.

- 12.- On pointe alors les charges verticales. On additionne les composantes verticales de  $F_{ub}$  et  $F_{cb}$  aux points de l'arête 1 - 16 (par lesquels toutes les charges sont transmises au support) et on compare le résultat avec le poids total du triangle 1 - 6 - 16 - 1. C'est une première vérification.

Incidentement, c'est une des manières de calculer la surface exacte du P.H., car l'intégration directe par intégrale double est impossible. Le contrôle est seulement approximatif et il est réalisé en assimilant la projection de l'aire avec la surface réelle qui est représentée par la somme des forces verticales divisée par  $g$ .

- 13.- On calcule l'arête 16 - 1 - 16 avec les charges transmises des deux côtés. Les forces sont représentées dans les colonnes 32 et 33, multipliées par deux. La première colonne représente les forces horizontales, la seconde, les verticales.

L'arête peut être considérée là comme une arche à trois articulations, car ses sections en V deviennent presque plates au sommet et produisent pratiquement une articulation. On accroît d'ordinaire un peu l'épaisseur de la plaque des deux côtés de l'arête pour former une arête un peu plus forte. Dans la voûte de l'église de "LAS HUERTAS", l'épaisseur ainsi accrue atteint 10 cm sur une largeur de 60cm de chaque côté.

Bien sûr, le nombre des colonnes de chaque tableau a été réduit pour ne donner que les résultats principaux des calculs - le nombre réel de colonnes ou d'opérations est d'environ 170 quand les calculs sont faits avec une machine à calculer de bureau.

L'utilisation de machines électroniques avec des programmations adéquates est assez appréciable pour ce genre de travaux. (L'exemple que nous venons de voir a été traité par l'I.B.M.650 du Centre de Calcul Electronique de l'Université de Mexico.).

-----

## FELIX CANDELA

ou la synthèse de l'architecte, de l'ingénieur et de l'entrepreneu

-----

Les structures qui ont rendu fameux le nom de FELIX CANDELA ne pouvaient être créées qu'à notre époque et peut-être même qu'au Mexique ou dans un pays présentant des conditions climatiques et sociales semblables. Mais elles auraient aussi bien pu ne point être créées du tout. Si elles le furent avec une telle profusion et une telle variété, elles le doivent à la personnalité de l'homme lui-même.

Candela n'a pas inventé les coques de béton, il ne fut pas non plus le premier à employer les Paraboloïdes Hyperboliques - surfaces géométriques dont il s'est servi avec une telle virtuosité -. D'autres que lui ont construit des coques plus grandes, ont contribué plus que lui à affiner l'analyse théorique des structures en coque. Mais personne n'exploita avec autant de maîtrise et de virtuosité les surfaces du second degré.

Tout d'abord, il y a CANDELA lui-même. En tant qu'être humain, il possède de nombreuses et attachantes qualités dont la plus importante est l'honnêteté intellectuelle. Honnêteté qui l'oblige à aller droit au coeur du problème, écartant ce qui n'est pas essentiel, évitant le pompeux, le factice et les idées toutes faites. Il construit à partir des idées et de l'expérience d'autres hommes tant que celles-ci lui sont utiles et ne ménagent pas ses témoignages de reconnaissance. Mais il ne travaille pas avec ces matériaux sans les avoir d'abord critiqués ; il repense les problèmes de sa propre manière et écarte ce qu'il ne peut totalement comprendre ou ce dont il doute - il s'agit la plupart du temps de la même chose - et ce qui ne lui est pas utile. Assimiler selon optique ce qu'il a appris est devenu sa principale démarche intellectuelle, ce qui l'oblige à avoir une connaissance poussée de la géométrie descriptive, de la résistance des matériaux, en même temps qu'un sens aigu de la beauté des surfaces dépouillées.

Il sait ce qu'il veut : faire quelque chose de vivant, mais en telle sorte qu'il prenne plaisir à le créer, ce qui stimule son activité intellectuelle et satisfait son sens artistique. Mais savoir ce qu'il faut construire et comment le construire ne suffit pas. Heureusement il possède la science de la nature humaine, de ce qui influe sur les décisions et des désirs profonds du client, ce qui est également nécessaire à la réalisation de ses rêves.

Il a eu également la chance de pouvoir se limiter à une seule spécialité : la construction de couvertures légères en béton. Depuis qu'il a construit sa première coque, voici une douzaine d'années, il n'est pas revenu en arrière, il bâtit sur sa propre expérience et est devenu un virtuose des surfaces du second degré. La technique qu'il emploie est également limitée : béton coulé "in situ" sur des coffrages et armé en son coeur par un treillis métallique. Cette

technique est à la fois liée aux conditions locales (main d'oeuvre bon marché) et idéale pour son génie créateur, car elle ignore les restrictions de la mécanisation et de la production en série.

En quelque sorte, CANDELA est le type de l'architecte complet tel qu'il existait autrefois : il n'est pas seulement ingénieur, ou architecte, ou entrepreneur, mais tout cela à la fois. Et ceci est le fait le plus important.

En règle générale, un bâtiment moderne est nécessairement l'oeuvre de plusieurs cerveaux, chacun ayant ses arrière-pensées, ses habitudes, ses aspirations propres, ce qui empêche généralement l'achèvement de la parfaite unité de l'oeuvre. Il n'en est plus de même lorsque l'oeuvre de coordination peut être opérée dans un seul cerveau qui connaît et comprend tous les facteurs influant la décision.

La coordination, l'attribution des priorités, le choix entre ce qui est essentiel et ce qui n'est que désirable commencent alors dès la naissance de l'idée, quand l'imagination ne fait encore que survoler le champ des possibilités et commence à rejeter et à choisir.

Quand tout ceci est réalisé par le chef de l'équipe, que ce soit l'architecte, l'ingénieur ou l'entrepreneur, celui-ci ne peut être en possession de tous les faits significatifs qui formeront la décision et qui, mésestimés, seront l'origine de beaucoup de difficultés ultérieures, car le projet ne peut s'élaborer avec des matériaux aisément communicables, mais bien au contraire par ces intuitions qui chez l'homme d'art permettent de concilier technique, économie et beauté.

CANDELA a le bonheur de pouvoir diriger tous ses travaux de bout en bout. En tant qu'entrepreneur, il connaît le coût des techniques de construction qui lui sont propres et quand il songe à de nouveaux croquis, la technique de construction et son coût sont constamment présentes à son esprit. Néanmoins, ses projets ne ressemblent point aux projets typiquement d'entrepreneurs. Il préfère rechercher la solution économique en utilisant son habileté inventive à réduire au minimum la quantité de matériaux à employer. Cependant il ne cherche pas à réaliser les choses plus difficilement que nécessaire, ce qui pourrait en détruire l'élégance, mais cherche à employer le béton d'une manière telle qu'il ne puisse se reprocher d'avoir fait quelque chose de trop.

Pendant que CANDELA -l'ingénieur- rêve, CANDELA -l'entrepreneur- garde les deux pieds sur terre. Son attitude vis-à-vis de la théorie des structures est caractéristique : il reconnaît la valeur de l'analyse des contraintes comme outil et se réjouit de sa discipline et de sa rigueur intellectuelle, mais il est également conscient de ses limites. En particulier il doute de la valeur de l'application de la théorie élastique au béton. Il a tendance à suspecter les calculs compliqués qui suggèrent une habileté toute factice destinée à couvrir l'ignorance ou le manque de hardiesse et qui sont à peu près inutiles à l'entrepreneur. Le problème du projeteur est d'arriver aussi rapidement que possible à la disposition correcte des structures, à la résistance des matériaux, il suppose cette disposition déjà fixée et ne peut qu'indiquer les contraintes inhérentes à cette disposition.



L'ingénieur doit donc surtout travailler avec sons sens des structures, sens acquis par une longue expérience et guidé par des calculs grossiers pour enfin affiner sa recherche grâce à une analyse plus sérieuse, mais ultérieure. Et enfin on peut imaginer des structures qui "tiennent" et qui n'en défont pas moins par leur complexité toutes les ressources actuelles de l'analyse mathématique.

Dans les travaux de Candella, nous avons un exemple de ce que l'assimilation en un seul esprit de tous les faits qui jouent dans la création d'un projet peut produire comme oeuvre d'une perfection et d'un équilibre qui en font une oeuvre d'art.

La morale d'une telle aventure est l'affirmation que tous les faits et possibilités qui portent sur un projet peuvent être compris et assimilés avant que le projet ne soit "gelé" et que le tout peut prendre place avant le particulier.

Maintenant reste à savoir si Candella est le dernier représentant d'une race d'architecte qui nous a donné les chefs d'oeuvre du Moyen Age, ou bien si sa réussite dans la technique limitée des coques en béton peut s'étendre à d'autres domaines.....

## RAPPORT SUR L'ARCHITECTURE MEXICAINE

Par Pierre-Denis CART

Un des lieux communs des plus répandus et des plus soigneusement entretenus par le cinéma et la littérature veut que le Mexique soit le pays des cactus et des maisons en pisée où sommeille toute une population coiffée d'immenses sombreros. Un autre, que contraire, prétend que le Mexique est, en quelque sorte, une colonie des Etats-Unis, d'où toute technique est importée et calquée sans grand souci d'opportunité. Aussi à mon départ de Paris -fort de ces idées toute simples- je ne m'attendais guère à apprendre grand chose sur les techniques de la construction et encore moins à découvrir un style original d'architecture. C'est pourquoi ma surprise fut grande de découvrir une profusion de constructions audacieuses d'esthétique peu conventionnelle, mais noyées dans une masse de maisons "typiques" et fort lépreuses. S'agissait-il de produits d'exportation Américaine ou de l'expression d'un génie local ? Les entretiens que nous avons eu avec deux grands architectes mexicains nous permirent de mieux comprendre les grandes lignes du phénomène architectural mexicain.

Nous avons donc eu le plaisir de rencontrer Messieurs Vladimir Kaspé-diplômé de l'Ecole des Beaux Arts de Paris- et Ramon Corona Martin-membre de l'Académie d'Architecture Française et vice-président de l'Union Internationale d'Architecture. Il est d'ailleurs très agréable de remarquer combien ces deux grands architectes sont attachés à la France par la langue, par la culture et pour le premier par la formation ; ce qui est fréquent au Mexique. Tous deux parfaits humanistes, nous ont parlé avec une simplicité remarquable et une amabilité parfaite de leur pays, de son avenir, et évidemment, de ses relations avec la France.

Selon eux, le Mexique, aux anciennes civilisations raffinées, débouche, après un trop long sommeil "colonial", sur le monde moderne. Il faut donc agir vite, en profondeur et d'une manière originale. Vite : car il faut rattraper le temps perdu ; en profondeur, pour effacer le clivage très profond qui sépare les deux classes lettrée et inculte -c'est-à-dire riche et pauvre- ; et original, pour créer une "Nation".

L'enjeu est énorme, mais les moyens et la liberté d'en user sont à sa mesure. En effet le Mexique, seul pays d'Amérique Latine à posséder un gouvernement républicain stable depuis plusieurs dizaines d'années, bénéficie de l'"amitié" de la plupart des nations riches cherchant à aggrandir leur cercle d'influence et qui ne peuvent faire moins que d'accorder des prêts aussi généreux que ceux des voisins.

La liberté est grande car tout est à faire, car les règlements pratiquement inexistant ne limitent pas l'inspiration des architectes aux abords d'une modeste médiocrité, car les constructions prééxistantes ne peuvent gêner l'extension d'un ouvrage -rien de durable n'étant encore bâti, car aucune banlieue, comme il en est d'habitude dans les pays en voie de développement, n'étouffe les villes, et enfin car les difficultés qu'offrent le sous-sol et le haut caractère sismique du Mexique sont tels que jamais ailleurs on n'a osé les affronter, ce qui offre l'avantage d'obliger architectes et ingénieurs à trouver des solutions originales.

Mais ces facteurs bénéfiques ne vont pas sans leur contrepartie. S'il faut faire vite c'est parce que le pays souffre surtout du manque d'industrie lourde, d'hôpitaux, d'écoles. On ne construit donc que pour ces secteurs privilégiés, ce qui peut faire paraître choquant l'aspect d'usines splendides et magnifiquement entretenues dressés au milieu de maisons d'habitation sordides, spectacle courant aux portes de Mexico.

De même s'il faut effacer le clivage entre les deux classes de la population, ce ne sera qu'en construisant de somptueuses écoles dans



tous les villages et ceci pour démontrer aux paysans que l'instruction est le seul moyen de posséder aussi un poste de télévision et une aussi belle demeure que ceux de l'instituteur. Cet argument semble enfantin, mais ne vaut-il pas mieux que tous les discours humanitaires ?

Ce mélange aussi intime qu'ahurissant d'ultra-moderne et de sordide, s'il est un facteur dynamique par le besoin de beau qu'il crée, n'en est pas moins décevant pour l'esprit. Car à quoi bien construire si rien n'est aménagé ? Les immeubles poussent là où ils veulent sans aucun souci de plan d'urbanisme. Il existe bien un quartier neuf de bureaux à Mexico mais l'ensemble de bâtiments qui tous pris individuellement satisfont l'esthète le plus sévère, n'en est pas moins aussi inhumain qu'une cité de H.L.M.... Heureusement Maximilien avait une femme qui ne pouvait vivre à Mexico et pour qui l'on construisit un château aux environs, la voie triomphale aménagée pour le relier à la ville fut et demeure l'unique exemple d'un ensemble créé avec ordre.

Il n'en reste pas moins que la majeure partie des constructions neuves - datant le plus souvent de moins de cinq ans - ne semblent point avoir d'équivalent à l'étranger et ceci pour plusieurs raisons.

Tout d'abord parce que le Mexique possède un climat tropical original du aux diverses combinaisons des latitudes et des altitudes. Les constructions en sont tout naturellement tributaires. On peut cependant remarquer que bien souvent les jeunes architectes mexicains l'oublient dans leur légitime souci de vouloir faire mieux que leurs collègues étrangers ils suivent donc les grandes modes internationales et en sont actuellement comme tout le monde au style "scandinave". On peut ainsi voir fréquemment le spectacle étonnant de bureaux entièrement vitrés où toutes les ouvertures sont fermées raison de la chaleur par des stores vénitiens intérieurs (hérésie quant à la thermique mais nécessité quand à l'esthétique) complétés par d'épais rideaux et où l'éclairage électrique sert toute la journée ! Il y a donc un problème de conception des plans qui ne peut être

résolu qu'avec une bonne connaissance des effets climatiques. Les écoles d'architectures mexicaines s'en sont aperçu et et travaillent dans ce sens.

La conception doit également être originale, car contrairement aux pays riches, la main d'œuvre y est très bon marché et le matériel rare. Ces conditions économiques particulières permettent de construire avec raison de très nombreuses voûtes à double rayon de courbure dont le coffrage sur platelage de bois est quasi artisanal. Aussi voit-on de très nombreuses usines aux lignes dépouillées et sculpturales.

Enfin comme il est dit plus haut, le grand passé précolombien du Mexique fournit de nombreux éléments esthétiques originaux dont les architectes ne peuvent manquer de s'inspirer. Ainsi peut-on rapprocher la célèbre Cité Universitaire de Mexico des anciens temples Mayas, et Toltèques par la forme massive des bâtiments, l'importance des lignes droites, l'éclat des gigantesques mosaïques de pierres naturelles et la faible importance des ouvertures.

Cependant si les architectes et les ingénieurs conçoivent des ouvrages beaux et économiques quant à l'utilisation des matériaux, il semble que d'une manière générale ils ne savent pas construire pour durer. Mais peut-être est-ce là une des conséquences d'un climat très dur. Néanmoins il est désolant de constater la dérépitude -par exemple- de la cité universitaire de Mexico, inaugurée voici cinq ans, et dont le béton pourrit, les raidisseurs se détachent et les revêtements métalliques rouillent ! Mais ce n'est pas un problème spécifique au Mexique, il suffit pour s'en assurer de regarder les immeubles non traditionnels français. En effet si la pierre qui vieillit gagne en cachet ce qu'elle perd en propreté, le béton ou le métal de façade "vieux" et non-entretenu ne peut qu'être sale. Avec les matériaux modernes doit apparaître une nouvelle science : la durabilité.

A lire ce rapport on pourrait penser que je n'ai voulu retenir de ce voyage au Mexique que les erreurs ou les malfagas. Il serait regrettable

de n'en retenir que cet aspect. En effet, si l'architecture Mexicaine souffre de maux universellement répandus -spécialement en France- elle possède de très grandes qualités dont la principale est de savoir créer des constructions belles et douvent humaines. Il n'est pas dans mes capacités de savoir décrire et expliquer le beau, ce n'est d'ailleurs pas le but de ce rapport. Il suffit de savoir qu'au Mexique, la majorité des constructions neuves sont belles et que le dilemne quantité-qualité n'est pas insoluble puisque les Mexicains savent le résoudre.

Par contre il faut souligner un phénomène important au Mexique et qui n'apparaît que timidement en France : la collaboration architecte-ingénieur-entrepreneur. Cette association -interdite en France- par les règles de l'ordre des Architectes- permet de concevoir dès l'origine et le plus adroitement possible un ouvrage en fonction du matériau, du procédé de construction et surtout des habitudes de chacun de ces trois protagonistes. C'est très important, et l'exemple mexicain montre que l'esthétique des ouvrages ne peut qu'y gagner. Cette collaboration pour être fructueuse suppose que chacun respecte l'autre et surtout possède une formation leur permettant de deviner les difficultés que l'autre doit surmonter c'est-à-dire par exemple que l'architecte ait de bonnes connaissances techniques. C'est le but que se propose les Ecoles d'Architecture Mexicaine, l'idéal étant évidemment de former des architectes-ingénieurs. L'exemple mexicain le plus fameux en est Felix Candella pour lequel une étude particulière est faite plus bas.

En conclusion, on peut retenir de notre voyage au Mexique plusieurs morales. D'une part que l'audace en matière d'architecture ne doit pas être réfrénée par des règlements trop stricts tant qu'architectes et ingénieurs possèdent tous les éléments nécessaires pour se comprendre et concevoir des constructions durables



pensées en fonction d'un climat, d'un matériau, d'un sol. Et d'autre part que si nul progrès n'est fait en France, on risque bien de voir les jeunes architectes se tourner vers Mexico au lieu de Paris.