EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 Indica un instrumento adecuado para obtener las siguientes cantidades.

a) La masa de tu mochila llena de libros.

b) Tu estatura.

c) La cantidad de jarabe para una toma.

a) Báscula.

b) Metro enrollable.

c) Cucharilla graduada.

11.2 En competiciones deportivas, ¿qué instrumento se utiliza para medir el tiempo?

El cronómetro.

11.3 Explica si es adecuado utilizar una regla graduada en centímetros para medir el alto y el ancho de una puerta.

No es adecuado, porque las dimensiones de la puerta son demasiado grandes. Se debe utilizar un metro enrollable.

11.4 Estima la medida de estos lápices.

Una posible estimación es 10 cm para el lápiz pequeño, y 15 cm para el grande.

11.5 Sabiendo que la superficie de una hoja de un libro de tamaño DIN-A4 es de 6,24 decímetros cuadrados, calcula aproximadamente la superficie que ocupa el libro cuando está abierto.

El libro ocupa aproximadamente $2 \cdot 6{,}24 = 12{,}48 \text{ dm}^2$.

11.6 Si se acota la longitud de la barra anterior entre 3 y 3,5 centímetros, ¿qué se puede afirmar del error absoluto?

Se puede afirmar que el error cometido es $E < 3{,}5 - 3 = 0{,}5$ cm.

11.7 ¿Cuál es la aproximación por exceso de un objeto que pesa más de 120 gramos si la cota de error es de 15 gramos?

Si la cota de error es de 15 gramos, $a - 120 < 15 \text{ g} \Rightarrow a < 120 + 15 = 135$ g. Por tanto, la aproximación por exceso en gramos ha de ser $a = 134$ g.

11.8 Calcula cuántos días equivalen a 3 años no bisiestos.

1 año equivale a 365 días. Por tanto, 3 años equivalen a $3 \cdot 365 = 1095$ días.

11.9 ¿Cuántos años son 96 meses?

$96 : 12 = 8$; por tanto, 96 meses equivalen a 8 años.

11.10 Expresa en forma incompleja.

a) 1 h 30 min

b) 4 min 25 s

c) 2 h 40 min 15 s

d) 1 h 35 min 26 s

a) 1 h 30 min = 60 min + 30 min = 90 min

b) 4 min 25 s = $4 \cdot 60 + 25 = 240 + 25 = 265$ s

c) 2 h 40 min 15 s = $2 \cdot 3600 + 40 \cdot 60 + 15 = 7200 + 2400 + 15 = 9615$ s

d) 1 h 35 min 26 s = $1 \cdot 3600 + 35 \cdot 60 + 26 = 3600 + 2100 + 26 = 5726$ s

11.11 Expresa en forma compleja.

a) 95 s

b) 104 min

c) 839 s

d) 547 s

a) 95 s = 1 min 35 s

$$\begin{array}{r|l} 95 & 60 \\ \cline{2-2} 35 & 1 \end{array}$$

b) 104 min = 1 h 44 min

$$\begin{array}{r|l} 104 & 60 \\ \cline{2-2} 044 & 1 \end{array}$$

c) 839 s = 13 min 59 s

$$\begin{array}{r|l} 839 & 60 \\ \cline{2-2} 239 & 13 \\ 59 & \end{array}$$

d) 547 s = 9 min 7 s

$$\begin{array}{r|l} 547 & 60 \\ \cline{2-2} 007 & 9 \end{array}$$

11.12 Escribe 104 días en meses y semanas e indica cuál es la forma compleja y cuál la forma incompleja.

104 días = 3 meses y 2 semanas. 104 días es forma incompleja. 3 meses y 2 semanas es forma compleja.

$$\begin{array}{r|l} 104 & 30 \\ \cline{2-2} 014 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & 7 \\ \cline{2-2} 00 & 2 \end{array}$$

11.13 Realiza las siguientes operaciones.

a) 2 h 50 min 33 s + 5 h 40 min 19 s

b) 3 h 28 min 42 s − 1 h 36 min 23 s

a) 2 h 50 min 33 s + 5 h 40 min 19 s = 7 h 90 min 52 s = 7 h 1 h 30 min 52 s = 8 h 30 min 52 s

b) 3 h 28 min 42 s − 1 h 36 min 23 s = 2 h 88 min 42 s − 1 h 36 min 23 s = 1 h 52 min 19 s

11.14 Calcula.

a) El triple de 1 h 50 min 18 s

b) La mitad de 7 h 53 min 20 s

a) 3 · (1 h 50 min 18 s) = 3 h 150 min 54 s = 3 h 2 h 30 min 54 s = 5 h 30 min 54 s

b) (7 h 53 min 20 s) : 2 = 3 h 56 min 40 s

$$\begin{array}{r|l} 7 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 113 & 2 \\ \cline{2-2} 001 & 56 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 80 & 2 \\ \cline{2-2} 00 & 40 \end{array}$$

1 h = 60 min → 60 + 53 = 113 min 1 min = 60 s → 60 + 20 = 80 s

11.15 Expresa en forma incompleja.

a) 3′ 40″

b) 24° 33′

c) 8° 5′ 31′

d) 16° 20′ 54″

a) 3′ 40″ = 3 · 60 + 40 = 180 + 40 = 220″

b) 24° 33′ = 24 · 60 + 33 = 1440 + 33 = 1473″

c) 8° 5′ 31″ = 8 · 3600 + 5 · 60 + 31 = 29 131″

d) 16° 20′ 54″ = 16 · 3600 + 20 · 60 + 54 = 58 854″

11.16 Expresa en forma compleja.

a) 168″ **c) 6427″**

b) 492′ **d) 17 983″**

a) 168″ = 2′ 48″

$$\begin{array}{l|l} 168 & 60 \\ \hline 048 & 2 \end{array}$$

c) 6427″ = 1° 47′ 7″

$$\begin{array}{llll} 6427 & \multicolumn{1}{|l}{60} & & \\ \cline{2-4} 0427 & 107 & \multicolumn{1}{|l}{60} & \\ \cline{3-3} 007 & 47 & 1 & \end{array}$$

b) 492′ = 8° 12′

$$\begin{array}{l|l} 492 & 60 \\ \hline 012 & 8 \end{array}$$

d) 17 983″ = 4° 59′ 43″

$$\begin{array}{lll} 17983 & \multicolumn{1}{|l}{60} & \\ \cline{2-3} 598 & 107 & \multicolumn{1}{|l}{60} \\ \cline{3-3} 583 & 59 & 4 \\ 43 & & \end{array}$$

11.17 Calcula.

a) 43° 29′ 54″ + 76° 15′ 40″

b) 6° 49′ 10″ − 4° 7′ 32″

a) 43° 29′ 54″ + 76° 15′ 40″ = 119°44′94″ = 119° 44′ 1′ 34″ = 119° 45′ 34″

b) 6° 49′ 10″ − 4° 7′ 32″ = 2° 41′ 38″

11.18 Realiza las siguientes operaciones.

a) (18° 43′ 15″) · 5

b) (97° 38′ 12″) : 6

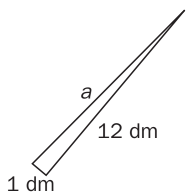
a) (18° 43′ 15″) · 5 = 90° 215′ 75″ = 90° 3° 35′ 1′ 15″ = 93° 36′ 15″

b) (97° 38′ 12″) : 6 = 16° 16′ 22″

$$\begin{array}{l|l} 97 & 6 \\ \hline 37 & 16 \\ 01 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 98 & 6 \\ \hline 38 & 16 \\ 02 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 132 & 6 \\ \hline 012 & 22 \\ 000 & \end{array}$$

1° = 60′ → 60 + 38 = 98′ 2′ = 120″ → 120 + 12 = 132″

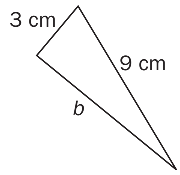
11.19 Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 1 y 12 decímetros, respectivamente.



$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 12^2 + 1^2 = 144 + 1 = 145\ \text{dm}^2$

$a^2 = 145 \Rightarrow a = \sqrt{145} = 12{,}04\ \text{dm}$

11.20 Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 9 centímetros, y un cateto, 3 centímetros, halla la medida del otro cateto.

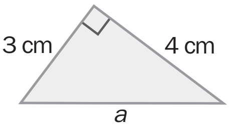


$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9^2 = b^2 + 3^2 \Rightarrow$

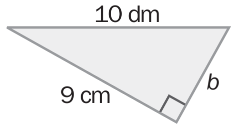
$\Rightarrow b^2 = 72 \Rightarrow b = \sqrt{72} = 8{,}49\ \text{cm}$

11.21 Calcula el lado desconocido en cada triángulo:

a)



b)



a) Aplicando el teorema de Pitágoras: $a^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow a = \sqrt{25} = 5$ cm

b) En primer lugar se expresan todas las dimensiones en la misma unidad, y a continuación se aplica el teorema de Pitágoras:

$10 \text{ dm} = 100 \text{ cm}; b^2 + 9^2 = 100^2 \Rightarrow b^2 = 100^2 - 9^2 = 10\,000 - 81 = 9919 \Rightarrow b = \sqrt{9919} = 99{,}59$ cm

11.22 Estudia, sin hacer el dibujo, si son rectángulos los triángulos cuyos lados tienen las siguientes medidas:

a) 6, 10 y 8 decímetros.

b) 50, 120 centímetros y 130 milímetros.

c) 11, 9 y 2 centímetros.

a) Sí es rectángulo, porque verifica el teorema de Pitágoras: $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

b) No es rectángulo, porque no verifica el teorema de Pitágoras: 130 mm = 13 cm;
$13^2 + 50^2 = 2669 \neq 120^2 = 14\,400$

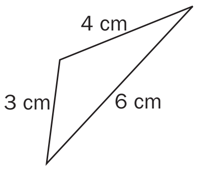
c) No es rectángulo, porque no verifica el teorema de Pitágoras:
$2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85 \neq 11^2 = 121$

11.23 Los lados de un triángulo miden 3, 4 y 6 centímetros.

a) Dibuja el triángulo y mide sus ángulos. ¿Es rectángulo?

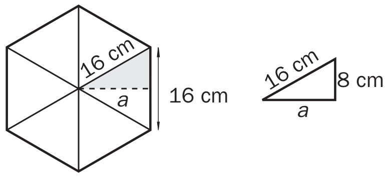
b) Comprueba que no cumple el teorema de Pitágoras.

a) No es rectángulo:



b) No cumple el teorema de Pitágoras: $3^2 + 4^2 = 25 \neq 36 = 6^2$

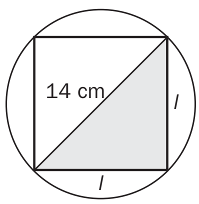
11.24 Halla la apotema de un hexágono regular cuyo lado mide 16 centímetros.



$a^2 + 8^2 = 16^2 \Rightarrow a^2 + 64 = 256 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 = 256 - 64 = 192 \Rightarrow a = \sqrt{192} = 13{,}86$ cm

11.25 ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 7 centímetros de radio?



Aplicando el teorema de Pitágoras:

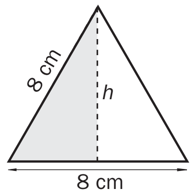
$l^2 + l^2 = 14^2 \Rightarrow 2l^2 = 196 \Rightarrow l^2 = 98 \Rightarrow l = 9{,}9$ cm

11.26 Calcula la medida de los siguientes segmentos.

a) La altura de un triángulo equilátero de 8 centímetros de lado.

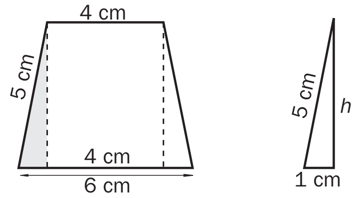
b) La altura de un trapecio isósceles de bases 4 y 6 centímetros, y lados iguales de 5 centímetros.

a)



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow h^2 + 16 = 64 \Rightarrow h^2 = 48 \Rightarrow \mathrm{h} = \sqrt{48} = 6{,}93$ cm



b) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$h^2 + 1^2 = 5^2 \Rightarrow h^2 + 1 = 25 \Rightarrow h^2 = 24 \Rightarrow h = \sqrt{24} = 4{,}9$ cm

11.27 ¿Es posible guardar una regla de madera de 35 centímetros en una caja con forma cúbica de 20 centímetros de lado?

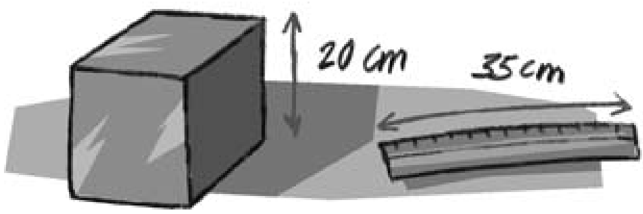
No es posible. Para resolver el problema es necesario aplicar dos veces el teorema de Pitágoras:

1. Cálculo de la medida de la diagonal de la base:

$h^2 = 20^2 + 20^2 = 400 + 400 = 800 \Rightarrow h = \sqrt{800} = 28{,}28$ cm

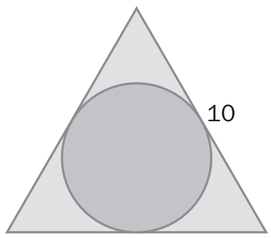
2. Cálculo de la medida de la diagonal del cubo:

$d^2 = 28{,}28^2 + 20^2 = 800 + 400 = 1200 \Rightarrow d = \sqrt{1200} = 34{,}64$ cm



La diagonal del cubo es más corta que la regla, por lo que esta no cabe en la caja.

11.28 En un agujero con forma de triángulo equilátero de 10 cm de lado queremos introducir un tubo cilíndrico. ¿Cuál es el diámetro del tubo más grueso que podemos usar?



En primer lugar, se trazan las alturas del triángulo inicial.

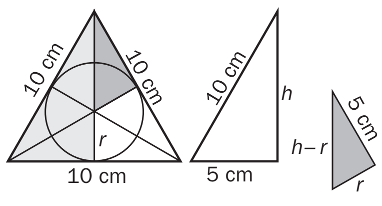
Los dos triángulos coloreados son rectángulos, por lo que se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

Triángulo 1: $h^2 + 5^2 = 10^2 \Rightarrow h = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8{,}66$ cm

Triángulo 2: $r^2 + 5^2 = (h - r)^2 \Rightarrow r^2 + 25 = \left(\sqrt{75} - r\right)^2 \Rightarrow r^2 + 25 = 75 + r^2 - 2\sqrt{75}\, r \Rightarrow$

$$\Rightarrow 100 = 2r\sqrt{75} \Rightarrow r = \frac{100}{2\sqrt{75}} = 5{,}77 \text{ cm}$$

El diámetro del tubo más grueso es $5{,}77 \cdot 2 = 11{,}55$ cm



CÁLCULO MENTAL

11.29 Calcula una cota de error en las siguientes medidas.

a) La capacidad de un vaso está comprendida entre 200 y 250 centilitros.

b) La longitud de un rotulador está entre 16 y 16,5 centímetros.

c) Una pelota de tenis pesa entre 175 y 200 gramos.

a) $E < 250 - 200 = 50$ centilitros.

b) $E < 16{,}5 - 16 = 0{,}5$ centímetros.

c) $E < 200 - 175 = 25$ gramos.

11.30 Expresa en forma compleja.

a) 65 s
b) 82 min
c) 124 s
d) 92 min
e) 100 s
f) 138 s
g) 270 s
h) 375 min

a) 65 s = 1 min 5 s

$$\begin{array}{l|l} 65 & 60 \\ \cline{2-2} 05 & 1 \end{array}$$

b) 82 min = 1 h 22 min

$$\begin{array}{l|l} 82 & 60 \\ \cline{2-2} 22 & 1 \end{array}$$

c) 124 s = 2 min 4 s

$$\begin{array}{l|l} 124 & 60 \\ \cline{2-2} 004 & 2 \end{array}$$

d) 92 min = 1 h 32 min

$$\begin{array}{l|l} 92 & 60 \\ \cline{2-2} 32 & 1 \end{array}$$

e) 100 s = 1 min 40 s

$$\begin{array}{l|l} 100 & 60 \\ \cline{2-2} 040 & 1 \end{array}$$

f) 138 s = 2 min 18 s

$$\begin{array}{l|l} 138 & 60 \\ \cline{2-2} 018 & 2 \end{array}$$

g) 270 s = 4 min 30 s

$$\begin{array}{l|l} 270 & 60 \\ \cline{2-2} 030 & 4 \end{array}$$

h) 375 min = 6 h 15 min

$$\begin{array}{l|l} 375 & 60 \\ \cline{2-2} 015 & 6 \end{array}$$

11.31 Expresa en forma incompleja.

a) 1 min 20 s
b) 2 h 10 min
c) 5 h 40 min
d) 30 min 17 s
e) 1 h 20 min 5 s
f) 3 h 10 min 6 s

a) 1 min 20 s $= 1 \cdot 60 + 20 = 80$ s
b) 2 h 10 min $= 2 \cdot 60 + 10 = 130$ min
c) 5 h 40 min $= 5 \cdot 60 + 40 = 340$ min
d) 30 min 17 s $= 30 \cdot 60 + 17 = 1817$ s
e) 1 h 20 min 5 s $= 1 \cdot 3600 + 20 \cdot 60 + 5 = 4805$ s
f) 3 h 10 min 6 s $= 3 \cdot 3600 + 10 \cdot 60 + 6 = 11\,406$ s

11.32 Calcula.

a) $5°\ 30' + 4°\ 30'$
b) $10'\ 45'' + 50'\ 15''$
c) $3°\ 24'\ 10'' + 17°\ 36'\ 51''$
d) $25°\ 40'\ 5'' - 5°\ 39'\ 2''$
e) $72°\ 58' - 11°\ 5'$
f) $2 \cdot (15°\ 40')$
g) $(8°\ 10') \cdot 5$
h) $(42°\ 30') : 3$

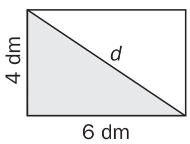
a) $5°\ 30' + 4°\ 30' = 9°\ 60' = 10°$
b) $10'\ 45'' + 50'\ 15'' = 60'\ 60'' = 1°\ 1'$
c) $3°\ 24'\ 10'' + 17°\ 36'\ 51'' = 20°\ 60'\ 61'' = 21°\ 1'\ 1''$
d) $25°\ 40'\ 5'' - 5°\ 39'\ 2'' = 20°\ 1'\ 3''$
e) $72°\ 58' - 11°\ 5' = 61°\ 53'$
f) $2 \cdot (15°\ 40') = 30°\ 80' = 31°\ 20'$
g) $(8°\ 10') \cdot 5 = 40°\ 50'$
h) $(42°\ 30') : 3 = 14°\ 10'$

11.33 Comprueba cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos.

a) 3 cm, 4 cm, 5 cm
b) 2 cm, 8 cm, 6 cm
c) 12 cm, 13 cm, 5 cm
d) 7 cm, 1 cm, 9 cm

a) Sí es rectángulo: $3^2 + 4^2 = 5^2$
b) No es rectángulo: $2^2 + 6^2 \neq 8^2$
c) Sí es rectángulo: $5^2 + 12^2 = 13^2$
d) No es rectángulo: $1^2 + 7^2 \neq 9^2$

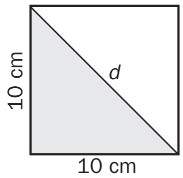
11.34 Halla la medida de la diagonal de un rectángulo de lados 4 y 6 decímetros.



Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = 6^2 + 4^2 = 36 + 16 = 52 \Rightarrow d = \sqrt{52} = 7{,}21 \text{ dm}$$

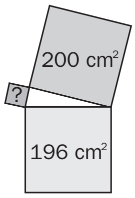
11.35 Calcula la diagonal de un cuadrado de 10 centímetros de lado y da un valor aproximado de la misma.



Por el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200 \Rightarrow d = \sqrt{200} = 14{,}14$ cm

11.36 En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa mide 200 centímetros cuadrados, y el de un cateto, 196 centímetros cuadrados. ¿Cuánto mide el otro?



A la vista del dibujo: $a^2 = 200$, y $b^2 = 196$

Por el teorema de Pitágoras:

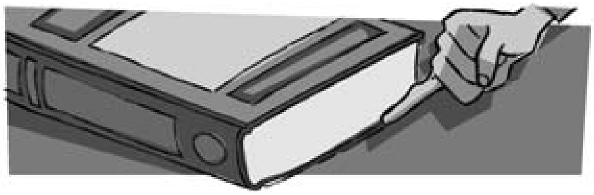
$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 200 = 196 + c^2 \Rightarrow 200 - 196 = c^2 \Rightarrow c^2 = 4$ cm^2

El cuadrado del otro cateto mide 4 cm^2. El cateto mide, por tanto, 2 cm.

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

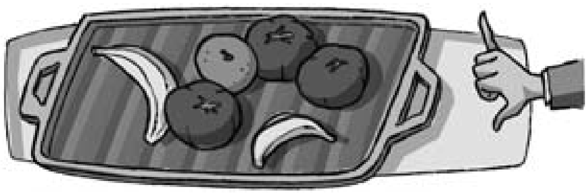
Estimación

11.37 Estima el grosor de este diccionario si cada dedo mide aproximadamente 1 centímetro.



Aparentemente, el grosor es de unos cuatro dedos, luego se estima que mide 4 cm.

11.38 Haz una estimación de las dimensiones de esta bandeja.



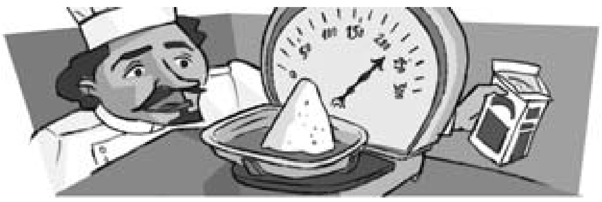
Aparentemente, la bandeja mide un palmo y medio de ancho y tres palmos de largo, por lo que se estima que las dimensiones son 30×60 cm.

11.39 Explica cómo se podría calcular de forma aproximada la cantidad de agua que cabe en un vaso.

Se puede comprobar cuántos vasos se pueden llenar con el contenido de un envase de capacidad conocida de agua, leche o zumo, por ejemplo.

Errores y acotación

11.40 Observa el dibujo y di dos valores entre los que se puede aproximar el azúcar que se está pesando.



La medida se puede aproximar entre 225 y 250 gramos.

11.41 Un reloj digital marca las 13:25. Indica entre qué dos valores próximos se puede acotar la hora exacta. Halla un valor de la cota de error.

La hora exacta viene dada en horas, minutos y segundos. Si el reloj marca las 13:25, esto indica que la hora exacta está entre las 13:25:00 y las 13:25:59. Por tanto, una cota del error es $59 - 0 = 59$ segundos.

11.42 Se ha medido con una jarra graduada de 50 en 50 centilitros una cantidad inferior a 200 decilitros. Da una aproximación de la medida por defecto.

200 dl $=$ 2000 cl. Para llenar una jarra de 2000 cl hacen falta $2000 : 50 = 40$ jarras. Por tanto, la medida es 39 jarras, y ha sobrado una cantidad inferior a una jarra. Una aproximación por defecto será, por tanto, $39 \cdot 50 = 1950$ cl.

11.43 ¿Cuál es la cota del mayor error que se puede cometer al medir una varilla con una regla graduada en milímetros?

La cota mayor del error es de 1 mm.

Medida del tiempo. Operaciones

11.44 Expresa en forma incompleja.

a) 3 h 20 min

b) 18 min 35 s

c) 5 h 9 min 16 s

d) 4 h 27 min 43 s

a) 3 h 20 min $= 3 \cdot 60 + 20 = 200$ min

b) 18 min 35 s $= 18 \cdot 60 + 35 = 1115$ s

c) 5 h 9 min 16 s $= 5 \cdot 3600 + 9 \cdot 60 + 16 = 18\,556$ s

d) 4 h 27 min 43 s $= 4 \cdot 3600 + 27 \cdot 60 + 43 = 16\,063$ s

11.45 Expresa en forma compleja.

a) 872 s

b) 238 min

c) 5103 s

d) 13 820 s

a) 872 s = 14 min 32 s

$$\begin{array}{r|l} 872 & 60 \\ \cline{2-2} 272 & 14 \\ 032 & \end{array}$$

b) 238 min = 3 h 58 min

$$\begin{array}{r|l} 238 & 60 \\ \cline{2-2} 058 & 3 \end{array}$$

c) 5103 s = 1 h 25 min 3 s

$$\begin{array}{r|l} 5103 & 60 \\ \cline{2-2} 0303 & 85 \;|\; 60 \\ 03 & 25 \quad 1 \end{array}$$

d) 13 820 s = 3 h 50 min 20 s

$$\begin{array}{r|l} 13820 & 60 \\ \cline{2-2} 18 & 230 \;|\; 60 \\ 020 & 50 \quad 3 \end{array}$$

11.46 Realiza las siguientes operaciones.

a) 8 h 45 min 37 s + 6 h 10 min 28 s
b) 3 h 5 min 42 s + 1 h 20 min 18 s
c) 4 h 36 min 53 s + 2 h 19 min 15 s
d) 5 h 40 min 16 s − 3 h 34vmin 9 s
e) 7 h 20 min − 4 h 53 min
f) 9 h 29 min 18 s − 8 h 48 min 52 s
g) 3 · (5 h 40 min)
h) 2 · (6 h 18 min 24 s)
i) 4 · (2 h 35 min 19 s)
j) (20 h 42 min) : 2
k) (15 h 27 min) : 5
l) (8 h 15 min 42 s) : 3

a) 8 h 45 min 37 s + 6 h 10 min 28 s = 14 h 55 min 65 s = 14 h 55 min 1 min 5 s = 14 h 56 min 1 s
b) 3 h 5 min 42 s + 1 h 20 min 18 s = 4 h 25 min 60 s = 4 h 25 min 1 min = 4 h 26 min
c) 4 h 36 min 53 s + 2 h 19 min 15 s = 6 h 55 min 68 s = 6 h 55 min 1 min 8 s = 6 h 56 min 8 s
d) 5 h 40 min 16 s − 3 h 34 min 9 s = 2 h 6 min 7 s
e) 7 h 20 min - 4 h 53 min = 6 h 80 min − 4 h 53 min = 2 h 27 min
f) 9 h 29 min 18 s − 8 h 48 min 52 s = 8 h 89 min 18 s − 8 h 48 min 52 s = 8 h 88 min 78 s − 8 h 48 min 52 s = 40 min 26 s
g) 3 · (5 h 40 min) = 15 h 120 min = 15 h 2 h = 17 h
h) 2 · (6 h 18 min 24 s) = 12 h 36 min 48 s
i) 4 · (2 h 35 min 19 s) = 8 h 140 min 76 s = 8 h 2 h 20 min 1 min 16 s = 10 h 21 min 16 s
j) (20 h 42 min) : 2 = 10 h 21 min

$\begin{array}{l|l} 20\text{ h} & 2 \\ \cline{2-2} 00 & 10\text{ h} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l|l} 42\text{ min} & 2 \\ \cline{2-2} 00 & 21\text{ min} \end{array}$

k) (15 h 27 min) : 5 = 3 h 5 min 24 s

$\begin{array}{l|l} 15\text{ h} & 5 \\ \cline{2-2} 00 & 3\text{ h} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l|l} 27\text{ min} & 5 \\ \cline{2-2} 02 & 5\text{ min} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l|l} 120\text{ min} & 5 \\ \cline{2-2} 00 & 24\text{ s} \end{array}$

l) (8h 15min 42s) : 3 = 2 h 45 min 14 s

$\begin{array}{l|l} 8\text{ h} & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 2\text{ h} \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l|l} 135\text{ h} & 3 \\ \cline{2-2} 015 & 45 \\ \ \ 00 & \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l|l} 42\text{ s} & 3 \\ \cline{2-2} 12 & 14 \\ 00 & \end{array}$

2 min = 120 s $\longrightarrow$ $\qquad$ 2 h = 120 min → 120 + 15 = 135 min $\longrightarrow$

Medidas de ángulos. Operaciones

11.47 Expresa en forma incompleja.

a) 8° 46′ 52″
b) 17° 43′ 25″
c) 45° 36′ 20″
d) 90° 45′ 30″

a) 8° 46′ 52″ = 8 · 3600 + 46 · 60 + 52 = 31 612″
b) 17° 43′ 25″ = 17 · 3600 + 43 · 60 + 25 = 63 805″
c) 45° 36′ 20″ = 45 · 3600 + 36 · 60 + 20 = 164 180″
d) 90° 45′ 30″ = 90 · 3600 + 45 · 60 + 30 = 326 730″

11.48 **Expresa en forma compleja:**

a) 44 469″ **c) 21 342″**

b) 83 775″ **d) 117 952″**

a) 44 469″ = 12° 21′ 9″

$$\begin{array}{lll} 44469 & \underline{|\,60} & \\ 0246 & 741 & \underline{|\,60} \\ \;\;069 & 141 & 12 \\ \;\;\;\;\;9 & \;\;21 & \end{array}$$

c) 21 342″ = 5° 55′ 42″

$$\begin{array}{lll} 21342 & \underline{|\,60} & \\ \;\;334 & 355 & \underline{|\,60} \\ \;\;\;342 & \underline{55} & 5 \\ \;\;\;\;\;42 & & \end{array}$$

b) 83 775″ = 23° 16′ 15″

$$\begin{array}{lll} 83775 & \underline{|\,60} & \\ 237 & 1396 & \underline{|\,60} \\ \;\;577 & \;\;196 & 23 \\ \;\;\;375 & \;\;\;\underline{16} & \\ \;\;\;\;\;15 & & \end{array}$$

d) 117 952″ = 32° 45′ 52″

$$\begin{array}{lll} 117952 & \underline{|\,60} & \\ \;\;579 & 1965 & \underline{|\,60} \\ \;\;\;395 & \;\;165 & 32 \\ \;\;\;\;352 & \;\;\;\underline{45} & \\ \;\;\;\;\;52 & & \end{array}$$

11.49 **Realiza las siguientes operaciones.**

a) 39° 17′ 43″ + 52° 48′ 30″

b) 46° 53′ 8″ + 20° 6′ 53″

c) 70° 18′ 33″ − 49° 20′ 15″

d) 65° 34′ 28″ − 5° 17′ 38″

e) 2 · (44° 30′ 12″)

f) 5 · (10° 24′ 8″)

g) (64° 29′) : 3

h) (43° 7′ 5″) : 7

a) 39° 17′ 43″ + 52° 48′ 30″ = 91° 65′ 73″ = 91° 1° 5′ 1′ 13″ = 92° 6′ 13″

b) 46° 53′ 8″ + 20° 6′ 53″ = 66° 59′ 61″ = 66° 59′ 1′ 1″ = 66° 60′ 1″ = 67° 1″

c) 70° 18′ 33″ − 49° 20′ 15″ = 69° 78′ 33″ − 49° 20′ 15″ = 20° 58′ 18″

d) 65° 34′ 28″ − 5° 17′ 38″ = 65° 33′ 88″ − 5° 17′ 38″ = 60° 16′ 50″

e) 2 · (44° 30′ 12″) = 88° 60′ 24″ = 88° 1° 24″ = 89° 24″

f) 5 · (10° 24′ 8″) = 50° 120′ 40″ = 50° 2° 40″ = 52° 40 ″

g) (64° 29′) : 3 = 21° 29′ 40″

$$\begin{array}{ll} 64^\circ & \underline{|\,3} \\ 04 & 21^\circ \\ 01 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 89' & \underline{|\,3} \\ 29 & 29' \\ 02 & \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 120'' & \underline{|\,3} \\ 000 & 40'' \\ \;\;00 & \end{array}$$

$$\xrightarrow{1^\circ = 60 \text{ min} \to 60 + 29 - 89'} \quad \xrightarrow{2' = 120''}$$

h) (43° 7′ 5″) : 7 = 6° 9′ 35″

$$\begin{array}{ll} 43^\circ & \underline{|\,7} \\ \;\;1 & 6^\circ \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 67' & \underline{|\,7} \\ \;\;4 & 9' \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 245'' & \underline{|\,7} \\ \;\;35 & 35'' \\ \;\;00 & \end{array}$$

$$\xrightarrow{1^\circ = 60' \to 60 + 7 = 67'} \quad \xrightarrow{4' = 4 \cdot 60'' = 240 \to 240'' + 5 = 245''}$$

Medidas indirectas. Teorema de Pitágoras

11.50 Estudia, sin dibujarlos, si los siguientes triángulos son rectángulos.

a) Sus lados miden: 5, 7 y 8 centímetros.

b) Isósceles de lados iguales de 9 centímetros, y desigual de 15 centímetros.

a) No es rectángulo, ya que no se verifica el teorema de Pitágoras.

En efecto, $5^2 + 7^2 = 74 \neq 8^2 = 64$

b) No es rectángulo, ya que no se verifica el teorema de Pitágoras.

En efecto, $9^2 + 9^2 = 162 \neq 225 = 15^2$

11.51 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 centímetros, y uno de los catetos, 10 centímetros. ¿Cuánto mide el otro?

Aplicando el teorema de Pitágoras:

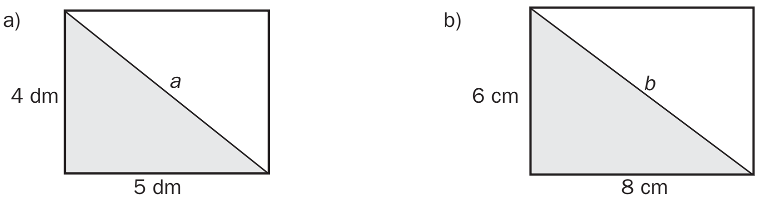
$20^2 = 10^2 + b^2 \Rightarrow 400 - 100 = b^2 \Rightarrow b = \sqrt{300} = 17{,}32$. El otro cateto mide 17,32 cm.

Cálculo de distancias

11.52 Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados tienen las siguientes medidas.

a) 5 y 4 decímetros

b) 8 y 6 centímetros



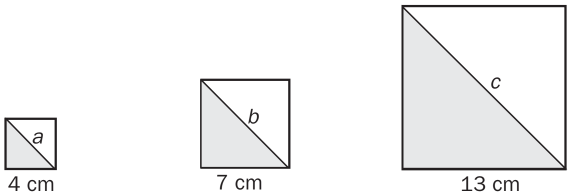
En ambos casos se aplica el teorema de Pitágoras:

a) $a^2 = 4^2 + 5^2 = 16 + 25 = 41 \Rightarrow a = \sqrt{41} = 6{,}40$ dm

b) $b^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow a = \sqrt{100} = 10$ cm

11.53 Calcula la diagonal de un cuadrado cuyo lado tiene la siguiente medida en centímetros.

a) 4 **b) 7** **c) 13**



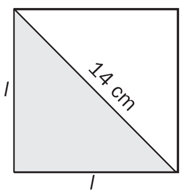
En todos los casos se aplica el teorema de Pitágoras:

a) $a^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 5{,}66$ cm

b) $b^2 = 7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98 \Rightarrow a = \sqrt{98} = 9{,}9$ cm

c) $c^2 = 13^2 + 13^2 = 169 + 169 = 338 \Rightarrow a = \sqrt{338} = 18{,}38$ cm

11.54 Halla la medida del lado de un cuadrado cuya diagonal es de 14 centímetros.

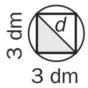


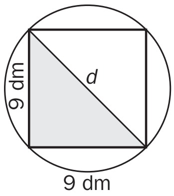
Aplicando el teorema de Pitágoras: $14^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow$

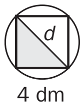
$\Rightarrow 196 = 2\,l^2 \Rightarrow l^2 = 98 \Rightarrow l = \sqrt{98} = 9{,}90$ cm

11.55 Calcula el radio de la circunferencia en la que está inscrito un cuadrado cuyo lado mide lo siguiente en decímetros.

a) 3 **b) 9** **c) 4**







El diámetro de la circunferencia se corresponde con la diagonal del cuadrado inscrito.

a) $d^2 = 3^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18 \Rightarrow d = \sqrt{18} = 4{,}24$ dm $\Rightarrow$ El diámetro de la circunferencia mide 4,24 dm.

Por tanto, el radio de la circunferencia es $r = \frac{4{,}24}{2} = 2{,}12$ dm.

b) $d^2 = 9^2 + 9^2 = 81 + 81 = 162 \Rightarrow d = \sqrt{162} = 12{,}73$ dm $\Rightarrow$ El diámetro de la circunferencia mide 12,73 dm.

Por tanto, el radio es: $r = \frac{12{,}73}{2} = 6{,}37$ dm

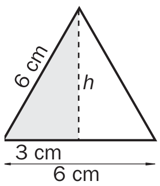
c) $d^2 = 4^2 + 4^2 = 16 + 16 = 32 \Rightarrow d = \sqrt{32} = 5{,}66$ dm $\Rightarrow$ El diámetro de la circunferencia mide 5,66 dm.

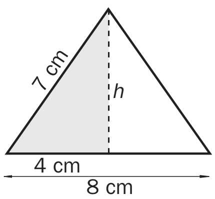
Por tanto, el radio es: $r = \frac{5{,}66}{2} = 2{,}83$ dm

11.56 Calcula la altura de estos triángulos.

a) Un triángulo equilátero de 6 centímetros de lado.

b) Un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 7 centímetros, y el desigual, 8 centímetros.





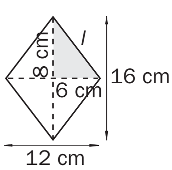
En ambos casos, la altura divide el triángulo inicial en dos triángulos rectángulos. Por tanto, se aplica el teorema de Pitágoras:

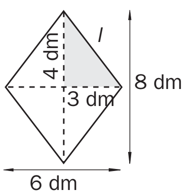
a) $h^2 + 3^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27} = 5{,}19$ cm

b) $h^2 + 4^2 = 7^2 \Rightarrow h^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33 \Rightarrow h = \sqrt{33} = 5{,}75$ cm

11.57 Calcula el lado de un rombo sabiendo que sus diagonales miden lo siguiente.

a) 12 y 16 centímetros **b) 6 y 8 decímetros**

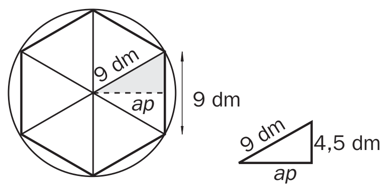




a) $l^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow l^2 = 64 + 36 = 100 \Rightarrow l = \sqrt{100} = 10$ cm

b) $l^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow l^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow l = \sqrt{25} = 5$ dm

11.58 ¿Cuánto mide la apotema de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 9 decímetros de radio?



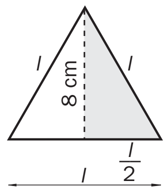
$(4,5)^2 + ap^2 = 9^2 \Rightarrow 20,25 + ap^2 = 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow ap^2 = 81 - 20,25 = 60,75 \Rightarrow ap = \sqrt{60,75} = 7,79$ dm

11.59 La altura de un triángulo equilátero mide 8 centímetros. Calcula la medida del lado.

La altura divide el triángulo inicial en dos triángulos rectángulos iguales.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

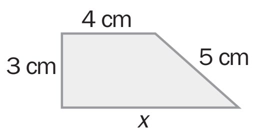


$$l^2 = 8^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow$$

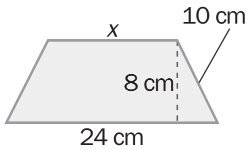
$$\Rightarrow \frac{3}{4}l^2 = 64 \Rightarrow l^2 = \frac{4 \cdot 64}{3} = 85,33 \Rightarrow l = \sqrt{85,33} = 9,24 \text{ cm}$$

11.60 Calcula los lados desconocidos de estos trapecios.

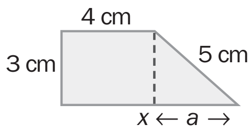
a)



b)



a)



En primer lugar, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo:

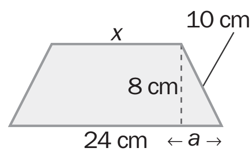
$5^2 = 3^2 + a^2 \Rightarrow a^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$ cm

A la vista del dibujo, la base del trapecio mide: $x + a = 4 + 4 = 8$ cm

b) En primer lugar, se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo:

$a^2 + 8^2 = 10^2 \Rightarrow a^2 + 64 = 100 \Rightarrow a^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow a = \sqrt{36} = 6$ cm

A la vista del dibujo, la base menor del trapecio mide: $24 - 2a = 24 - 12 = 12$ cm



PROBLEMAS PARA APLICAR

11.61 Martín ha medido la capacidad de un vaso con una jarra graduada cada 20 centilitros. El vaso contiene entre 200 y 220 centilitros y se toma 3 vasos cada día. ¿Entre qué medidas se puede acotar la leche que Martín bebe diariamente?

La cantidad de leche que Martín bebe está acotada entre $200 \cdot 3 = 600$ cl y $220 \cdot 3 = 660$ cl.

Si c es dicha cantidad, se escribe: $600 \text{ cl} < c < 660 \text{ cl}$

11.62 Iria ha plantado un árbol y quiere saber cuánto mide, pero solo ha encontrado un metro de sastre como el de la figura.

a) ¿Entre qué medidas está acotada la altura del árbol?

b) Indica una cota de error.

a) La altura del árbol está acotada entre 60 y 70 cm. Si h es dicha altura, se escribe: 60 cm $< h <$ 70 cm

b) El error cometido ha de ser siempre menor que $70 - 60 = 10$ cm, es decir: $e < 10$ cm

11.63 En una competición ciclista, los tres mejores tiempos han sido los siguientes:
Ciclista *A*: 1 h 25 min 32 s
Ciclista *B*: 84 min 50 s
Ciclista *C*: 5130 s
¿En qué orden han llegado a la meta?

En primer lugar se expresan todos los tiempos en segundos. A continuación se ordenan:

Ciclista *A*: 1 h 25 min 32 s $= 1 \cdot 3600 + 25 \cdot 60 + 32 = 5132$ s

Ciclista *B*: 84 min 50 s $= 84 \cdot 60 + 50 = 5090$ s

Ciclista *C*: 5130 s

Puesto que 5090 s $<$ 5130 s $<$ 5132 s, el orden de llegada ha sido: primer puesto, ciclista *B*; segundo puesto, ciclista *C*, y último puesto, ciclista *A*.

11.64 Un ángulo recto se divide en 4 ángulos iguales. Expresa en forma compleja la medida de cada uno de ellos.

Basta dividir 90° entre 4:

$$\begin{array}{r|l} 90^\circ & 4 \\ \hline 10 & 22^\circ \\ 2 & \end{array} \quad \xrightarrow{2^\circ = 120'} \quad \begin{array}{r|l} 120' & 4 \\ \hline 00 & 30' \\ 0 & \end{array}$$

11.65 La medida del ángulo desigual de un triángulo isósceles es de 50° 25′.
Calcula la medida de los dos ángulos iguales.

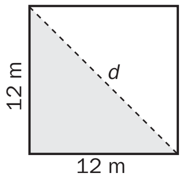
Los tres ángulos de un triángulo suman 180°.

$180^\circ - 50^\circ\,25' = 179^\circ\,60' - 50^\circ\,25' = 129^\circ\,35'$ mide la suma de los dos ángulos iguales. Para conocer la medida de cada uno de los ángulos, basta dividir entre 2 dicha cantidad:

$$\begin{array}{r|l} 129^\circ & 2 \\ \hline 09 & 64^\circ \\ 01 & \end{array} \quad \xrightarrow{1^\circ = 60' \to 60 + 35 = 95} \quad \begin{array}{r|l} 95' & 2 \\ \hline 15 & 47' \\ 01 & \end{array} \quad \xrightarrow{1' = 60''} \quad \begin{array}{r|l} 60'' & 2 \\ \hline 00 & 30'' \end{array}$$

Cada uno de los ángulos iguales mide: 64° 47′ 30″

11.66 Cuando un gimnasta realiza un ejercicio de suelo, ¿qué longitud recorre en cada diagonal si el recinto donde está es un cuadrado de 12 metros de longitud?

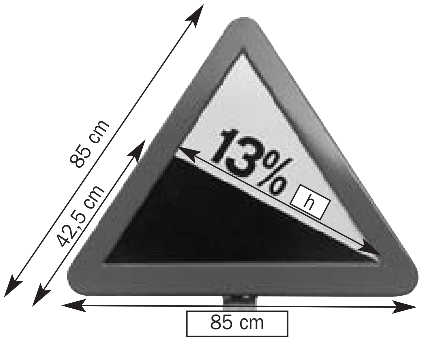


Aplicando el teorema de Pitágoras:

$d^2 = 12^2 + 12^2 = 144 + 144 = 288 \Rightarrow d = \sqrt{288} = 16{,}97$ m

El gimnasta recorre 16,97 m en cada diagonal.

11.67 La señal de la fotografía es un triángulo equilátero de 85 centímetros de lado. La línea que delimita la zona pintada de negro es la altura sobre uno de los lados. ¿Cuánto mide?



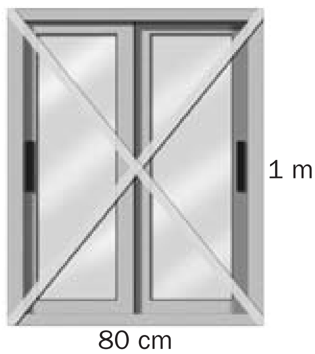
La altura es la mediatriz del lado del triángulo, por lo que divide el triángulo inicial en dos triángulos rectángulos iguales. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$85 : 2 = 42{,}5$ cm; $h^2 + (42{,}5)^2 = 85^2 \Rightarrow h^2 + 1806{,}25 = 7225 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 7225 - 1806{,}25 = 5418{,}75 \Rightarrow h = \sqrt{5418{,}75} = 73{,}61$ cm

La altura del triángulo mide: 73,61 cm

11.68 En un bloque de viviendas en construcción, las ventanas han sido señaladas con una cruz de cinta adhesiva como las de la figura.
¿Cuántos metros de cinta se han utilizado en un piso que tiene 4 ventanas como esa?



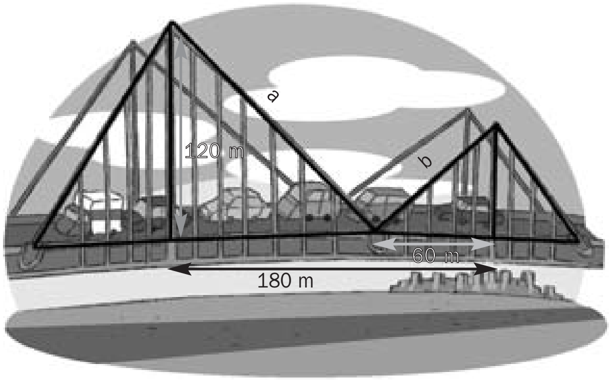
Cada diagonal de la ventana divide la misma en dos triángulos rectángulos iguales. En primer lugar, es necesario expresar todas las dimensiones en la misma unidad. A continuación se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de una diagonal.

80 cm = 0,8 m

$d^2 = 0{,}8^2 + 1^2 = 0{,}64 + 1 = 1{,}\ 64 \Rightarrow d = \sqrt{1{,}64} = 1{,}28$ m

Para cada diagonal hacen falta 1,28 m de cinta. En cuatro ventanas hay ocho diagonales. Por ello, en total hacen falta $1{,}28 \cdot 8 = 10{,}25$ m de cinta.

11.69 **Calcula las longitudes *a* y *b* de los tirantes del puente de 180 metros representado en la figura.**



En la figura se ven dos triángulos rectángulos de hipotenusas *a* y *b*, respectivamente.

Los catetos del triángulo grande miden 120 m cada uno. Por el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 120^2 + 120^2 = 28\,800 \Rightarrow a = 28\,800 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{28\,800} = 169{,}71$ m

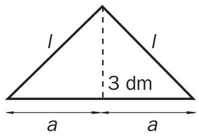
El triángulo pequeño es semejante al grande. Sea *x* la medida del cateto desconocido. Por el teorema de Tales:

$$\frac{60}{180} = \frac{x}{120} \Rightarrow x = \frac{60 \cdot 120}{180} = 40$$

Aplicando finalmente el teorema de Pitágoras:

$b^2 = 60^2 + 60^2 = 7200 \Rightarrow b = \sqrt{7200} = 84{,}85$ m

11.70 **Un carpintero quiere construir una escuadra con dos lados iguales. La altura sobre el lado desigual debe medir 3 decímetros. Dispone de un listón de madera de 1,75 metros. ¿Tiene suficiente o debe comprar otro más grande?**



La altura sobre el lado desigual divide la escuadra en dos triángulos rectángulos iguales. Los triángulos pequeños y el grande son semejantes, ya que comparten la medida de sus ángulos. Por tanto, los triángulos pequeños han de ser isósceles como la escuadra. Así, $a = 3$ dm, y la hipotenusa de la escuadra es $a + a = 3 + 3 = 6$ dm.

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo grande, $l^2 + l^2 = 6^2 \Rightarrow 2l^2 = 36 \Rightarrow l^2 = 18 \Rightarrow$

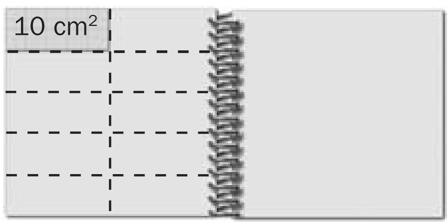
$\Rightarrow l = \sqrt{18} = 4{,}24$ cm

El perímetro de la escuadra es de $4{,}24 + 4{,}24 + 6 = 14{,}48$ dm $= 1{,}45$ m, por lo que el carpintero tiene suficiente con el listón de madera.

REFUERZO

Estimación

11.71 **De una hoja de papel milimetrado se recorta un rectángulo de 10 centímetros cuadrados para medir la superficie de una hoja de esta agenda. ¿Cuál es su medida aproximada?**



En una hoja de la agenda caben 10 rectángulos como el de la figura. Por tanto, la superficie es de $10 \cdot 10 = 100$ cm^2.

Medida del tiempo. Operaciones

11.72 **Expresa en forma incompleja.**

a) 3h 45s

b) 45min 32s

c) 1h 35min 26s

a) 3h 45s $= 3 \cdot 3600 + 45 = 10\,845$s

b) 45min 32s $= 45 \cdot 60 + 32 = 2732$s

c) 1h 35min 26s $= 1 \cdot 3600 + 35 \cdot 60 + 26 = 5726$s

11.73 En una carrera popular, el tiempo del primero en llegar a la meta fue de 56 min 12 s, y el del último, de 1 h 18 min 34 s. ¿Qué diferencia de tiempo hay entre ambos corredores?

La diferencia de tiempo es: 1 h 18 min 34 s − 56 min 12 s = 78 min 34 s − 56 min 12 s = 22 min 22 s

Medida de ángulos. Operaciones

11.74 Cada uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles mide 42° 30′. Calcula la medida del ángulo desigual.

La suma de los ángulos de un triángulo es 180°.

La suma de los dos ángulos iguales es 2 · (42° 30′) = 84° 60′ = 85°.

Por tanto, la medida del ángulo desigual es 180° − 85° = 95°.

11.75 ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos en que queda dividido por su bisectriz otro de 47° 39′?

La bisectriz de un ángulo divide el mismo en dos ángulos iguales.

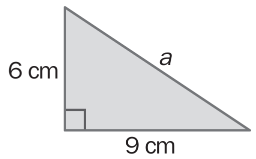
$$\begin{array}{l|l} 47° & 2 \\ \hline 07 & 23° \\ 01 & \end{array} \xrightarrow{1° = 60' \to 60 + 39 = 99'} \begin{array}{l|l} 99' & 2 \\ \hline 19 & 49' \\ 01 & \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{l|l} 60'' & 2 \\ \hline 00 & 30'' \\ 00 & \end{array}$$

Cada uno de los ángulos iguales mide 23° 49′ 30″

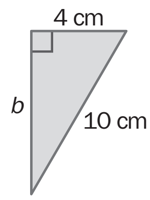
Medidas indirectas. Teorema de Pitágoras

11.76 Calcula la longitud del lado desconocido.

a)



b)



a) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 \Rightarrow a = \sqrt{117} = 10{,}82$ cm

b) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$4^2 + b^2 = 10^2 \Rightarrow b^2 = 10^2 - 4^2 = 100 - 16 = 84 \Rightarrow b = \sqrt{84} = 9{,}17$ cm

11.77 Estudia si son rectángulos los triángulos cuyos lados miden:
a) 7, 11 y 9 cm.
b) 8, 6 y 10 cm.

a) No es rectángulo, ya que no verifica el teorema de Pitágoras. En efecto:

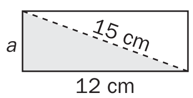
$7^2 + 9^2 = 49 + 81 = 130 \neq 11^2 = 121$

b) Es rectángulo, ya que verifica el teorema de Pitágoras. En efecto:

$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$

Cálculo de distancias

11.78 La diagonal de un rectángulo mide 15 centímetros, y uno de los lados, 12 centímetros. Calcula la medida del otro lado.



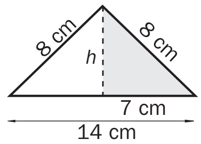
Aplicando el teorema de Pitágoras:

$a^2 + 12^2 = 15^2 \Rightarrow a^2 + 144 = 225 \Rightarrow a^2 = 225 - 144 = 81 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \sqrt{81} = 9$ cm

El otro lado mide 9 cm.

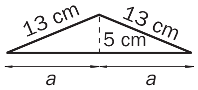
11.79 El lado desigual de un triángulo isósceles mide 14 centímetros, y los lados iguales, 8 centímetros. Calcula la altura sobre el lado desigual.



La altura del triángulo divide el mismo en dos triángulos rectángulos iguales. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$7^2 + h^2 = 8^2 \Rightarrow h^2 = 8^2 - 7^2 = 64 - 49 = 15 \Rightarrow h^2 = 15 \Rightarrow h = \sqrt{15} = 3{,}87$ cm

11.80 Halla el lado desigual de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 centímetros, y la altura, 5 centímetros.

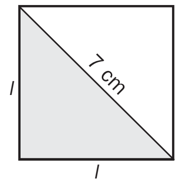


Se traza la altura del triángulo isósceles. De este modo, el triángulo queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales. Aplicando el teorema de Pitágoras en uno de esos triángulos:

$a^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow a^2 + 25 = 169 \Rightarrow a^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow a^2 = 144 \Rightarrow a = \sqrt{144} = 12$ cm

El lado desigual mide, por tanto, $12 \cdot 2 = 24$ cm.

11.81 Calcula el lado de un cuadrado sabiendo que su diagonal mide 7 centímetros.



La diagonal de un cuadrado divide el mismo en dos triángulos rectángulos iguales. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$l^2 + l^2 = 7^2 \Rightarrow 2 \cdot l^2 = 49 \Rightarrow l^2 = \dfrac{49}{2} = 24{,}5$ cm $\Rightarrow l = \sqrt{24{,}5} = 4{,}95$ cm

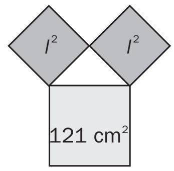
El lado del cuadrado mide 4,95 cm.

AMPLIACIÓN

11.82 Expresa 2357 horas en meses, días y horas.

Las equivalencias son 1 mes = 30 días, y 1 día = 24 horas.
Dividiendo 2357 entre 24, se tiene que $2357 = 98 \cdot 24 + 5$.
Diviendo 98 días entre 30, se tiene que $98 = 3 \cdot 30 + 8$.
Por tanto, 2357 = 3 meses 8 días y 5 horas.

11.83 En un triángulo rectángulo isósceles, la superficie del cuadrado construido sobre la hipotenusa mide 121 centímetros cuadrados.
Calcula la medida de cada cateto.

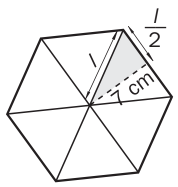


Aplicando el teorema de Pitágoras:

$l^2 + l^2 = 121 \Rightarrow 2 \cdot l^2 = 121 \Rightarrow l^2 = \dfrac{121}{2} = 60{,}5$ cm $\Rightarrow l = \sqrt{60{,}5} = 7{,}78$ cm

Cada cateto mide 7,78 cm.

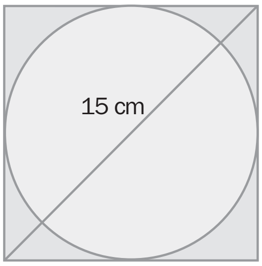
11.84 Calcula el lado de un hexágono inscrito en una circunferencia sabiendo que su apotema mide 7 centímetros.



Un hexágono regular está compuesto por seis triángulos equiláteros iguales. Las apotemas del hexágono se corresponden con la altura de estos triángulos. Esta altura divide cada triángulo en dos triángulos rectángulos iguales. Aplicando el teorema de Pitágoras en uno de estos triángulos:

$$7^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow 49 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{4 \cdot 49}{3} = 65{,}34 \Rightarrow l = \sqrt{65{,}34} = 8{,}08 \text{ cm}$$

11.85 Calcula el radio de esta circunferencia conociendo la medida de la diagonal del cuadrado.

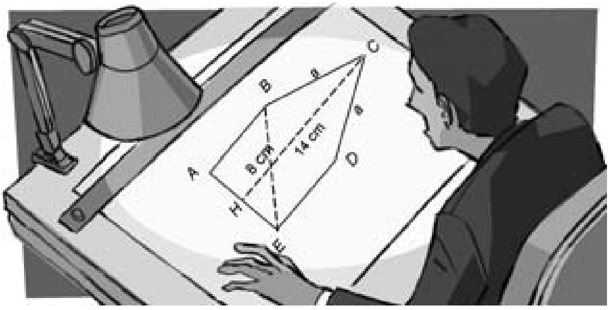


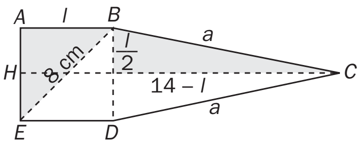
El lado del cuadrado circunscrito se corresponde con el diámetro de la circunferencia. Aplicando el teorema de Pitágoras a uno de los triángulos rectángulos del dibujo:

$$l^2 + l^2 = 15^2 = 225 \Rightarrow 2 \cdot l^2 = 225 \Rightarrow l^2 = \frac{225}{2} = 112{,}5 \text{ cm} \Rightarrow l = \sqrt{112{,}5} = 10{,}61 \text{ cm}$$

El radio de la circunferencia mide $r = \dfrac{10{,}61}{2} = 5{,}30$ cm

11.86 Halla *a* en la figura siguiente, teniendo en cuenta que *ABDE* es un cuadrado.





En primer lugar se calcula el lado del cuadrado *ABDE*, aplicando el teorema de Pitágoras a uno de los dos triángulos rectángulos en los que divide la diagonal al cuadrado:

$$l^2 + l^2 = 8^2 \Rightarrow 2 \cdot l^2 = 64 \Rightarrow l^2 = \frac{64}{2} = 32 \text{ cm} \Rightarrow l = \sqrt{32} = 5{,}66 \text{ cm}$$

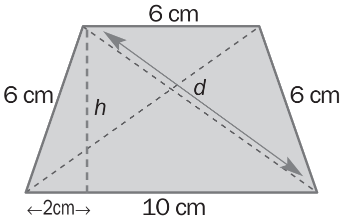
El lado del cuadrado mide 5,66 cm.

a es la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Uno de los catetos mide la mitad del lado del cuadrado, es decir, $\dfrac{5{,}66}{2} = 2{,}83$ cm. El otro cateto mide $14 - 5{,}66 = 8{,}34$ cm.

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = 2{,}83^2 + 8{,}34^2 \Rightarrow a^2 = 8 + 69{,}56 = 77{,}56$ cm.

El valor de a es, por tanto, $a = \sqrt{77{,}56} = 8{,}81$ cm.

11.87 Calcula las diagonales del trapecio isósceles de la figura.



En primer lugar se traza la altura del trapecio desde uno de los vértices superiores.

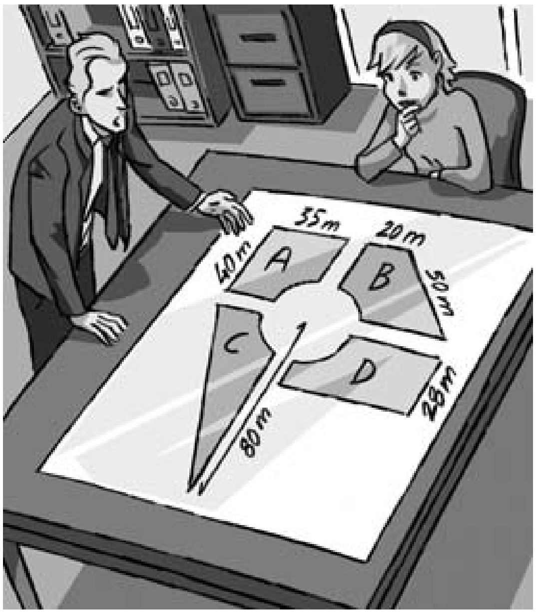
Se obtienen así dos triángulos rectángulos en los que se puede aplicar el teorema de Pitágoras.

Altura del trapecio: $h^2 + 2^2 = 6^2 \Rightarrow h^2 = 36 - 4 = 32 \Rightarrow h = \sqrt{32} = 5{,}66$ cm

Diagonal del trapecio: $d^2 = (5{,}66)^2 + 8^2 = 32 + 64 = 96 \Rightarrow d = \sqrt{96} = 9{,}8$ cm

11.88 Cuatro parcelas

Elvira quiere comprar una parcela en una urbanización. Tiene la posibilidad de elegir una de las cuatro que aparecen en la figura. ¿Cuál escogerá si quiere la de mayor superficie?



Todas las parcelas miden lo mismo. En efecto:

El círculo central no forma parte de las parcelas y quita a cada una de ellas la misma superficie, ya que está centrado en el dibujo. Por tanto, basta con calcular las áreas de las parcelas como si no existiera tal círculo. De este modo:

Área de *A*: Se trata de un rectángulo, luego el área es $b \cdot h = 35 \cdot 40 = 1400$ m^2.

Área de *B*: Se trata de un trapecio isósceles que se puede descomponer en un rectángulo y un triángulo rectángulo.

Área del rectángulo: $b \cdot h = 20 \cdot 40 = 800$ m^2.

Para calcular el área del triángulo es necesario calcular en primer lugar la medida de los catetos.

Por el teorema de Pitágoras, $40^2 + b^2 = 50^2 \Rightarrow b^2 = 50^2 - 40^2 = 900 \Rightarrow b = \sqrt{900} = 30$ m.

Por tanto, el área del triángulo es $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{30 \cdot 40}{2} = 600$ m^2.

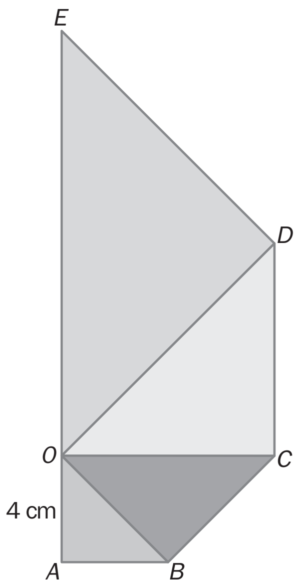
El área total de la parcela es entonces: $800 + 600 = 1400$ m^2.

Área de *C*: Se trata de un triángulo rectángulo, y su área es $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{80 \cdot 35}{2} = 1400$ m^2.

Área de *D*: Se trata de un rectángulo cuya base mide $20 + 30 = 50$ m, y cuya altura mide 28 m. Su área es, por tanto, $50 \cdot 28 = 1400$ m^2.

11.89 Hipotenusas

Los triángulos *OAB*, *OBC*, *OCD* y *ODE* son todos isósceles y rectángulos. Calcula la longitud de la hipotenusa *OE*.



Como los triángulos son isósceles,

$$OA = AB,\ OB = BC,\ OC = CD \text{ y } OD = DE$$

Aplicando el teorema de Pitágoras a cada uno de los triángulos, se tiene:

$$OB^2 = AO^2 + AB^2 = 4^2 + 4^2 = 32$$

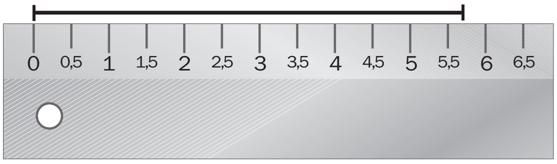
$$OC^2 = OB^2 + BC^2 = 32 + 32 = 64$$

$$OD^2 = OC^2 + CD^2 = 64 + 64 = 128$$

$$OE^2 = DE^2 + OD^2 = 128 + 128 = 256 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Longitud de la hipotenusa $OE = \sqrt{256} = 16$ cm

11.A1 Observa este dibujo.



a) ¿Entre qué valores se encuentra la medida exacta del segmento?
b) Da una cota de error.

a) Entre 5,5 y 6

b) Una cota del error es $6 - 5{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow E < 0{,}5$

11.A2 Calcula.
a) 5h 43min 13s + 3h 28min 54s **b) 9h 17min 40s − 4h 2min 59s**

a) 5h 43min 13s + 3h 28min 54s = 8h 71min 67s = 8h 1h 11min 1min 7s = 9h 12min 7s
b) 9h 17min 40s − 4h 2min 59s = 9h 16min 100s − 4h 2min 59s = 5h 14min 41s

11.A3 Realiza las siguientes operaciones.
a) $(8° \ 15' \ 20'') \cdot 4$ **b) $(19° \ 36') : 5$**

a) $(8° \ 15' \ 20'') \cdot 4 = 32° \ 60' \ 80'' = 32° \ 1° \ 1' \ 20'' = 33° \ 1' \ 20''$
b) $(19° \ 36') : 5 = 3° \ 55' \ 12''$

$$\begin{array}{r|l} 19° & 5 \\ \hline 04 & 3° \end{array} \xrightarrow{4° = 240' \to 240 + 36 = 276'} \begin{array}{r|l} 276' & 5 \\ \hline 026 & 55' \\ 01 & \end{array} \xrightarrow{1' = 60''} \begin{array}{r|l} 60'' & 5 \\ \hline 00 & 12'' \\ 00 & \end{array}$$

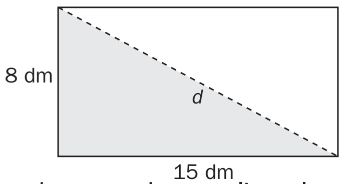
11.A4 ¿Es rectángulo el triángulo de lados 6, 9 y 14 centímetros?

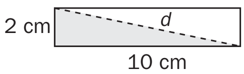
No es rectángulo, ya que no verifica el teorema de Pitágoras. En efecto: $6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117 \neq 14^2 = 196$

11.A5 La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 8 centímetros, y uno de sus catetos, 4 centímetros. ¿Cuánto mide el otro?

Por el teorema de Pitágoras, $a^2 + 4^2 = 8^2 \Rightarrow a^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow a = \sqrt{48} = 6{,}93$. El otro cateto mide 6,93 cm.

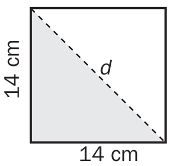
11.A6 Calcula la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden lo siguiente.
a) 15 y 8 decímetros **b) 10 y 2 centímetros**

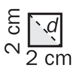


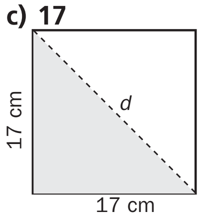


En ambos casos basta aplicar el teorema de Pitágoras:
a) $15^2 + 8^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 64 = 289 \Rightarrow d = \sqrt{289} = 17$. La diagonal mide 17 dm.
b) $10^2 + 2^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 100 + 4 = 104 \Rightarrow d = \sqrt{104} = 10{,}2$. La diagonal mide 10,2 dm.

11.A7 Halla la diagonal de un cuadrado cuyos lados tienen las siguientes medidas, en centímetros.
a) 14 **b) 2** **c) 17**

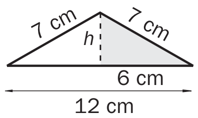






a) $14^2 + 14^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 196 + 196 = 392 \Rightarrow d = \sqrt{392} = 19{,}8$. La diagonal mide 19,8 cm.
b) $2^2 + 2^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 4 + 4 = 8 \Rightarrow d = \sqrt{8} = 2{,}83$. La diagonal mide 2,83 cm.
c) $17^2 + 17^2 = d^2 \Rightarrow d^2 = 289 + 289 = 578 \Rightarrow d = \sqrt{578} = 24{,}04$. La diagonal mide 24,04 cm.

11.A8 **Los lados iguales de un triángulo isósceles miden 7 centímetros, y el lado desigual, 12. Calcula la altura sobre el lado desigual.**

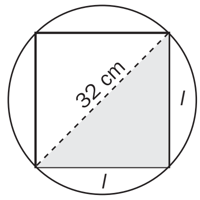


En primer lugar se traza la altura del triangulo, obteniéndose de este modo dos triángulos rectángulos iguales. Aplicando el teorema de Pitágoras a uno de estos triángulos se tiene

$h^2 + 6^2 = 7^2 \Rightarrow h^2 + 36 = 49 \Rightarrow h^2 = 49 - 36 = 13 \Rightarrow h = \sqrt{13} = 3{,}61$

La altura mide 3,61 cm.

11.A9 **Halla el lado de un cuadrado inscrito en una circunferencia de 16 centímetros de radio.**



Trazando la diagonal del cuadrado, este queda dividido en dos triángulos rectángulos iguales.

La hipotenusa del triángulo coincide con el diámetro de la circunferencia.

Mide, por tanto, $16 \cdot 2 = 32$ cm.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$l^2 + l^2 = 32^2 \Rightarrow 2 \cdot l^2 = 1024 \Rightarrow l^2 = 512 \Rightarrow l = \sqrt{512} = 22{,}63$ cm

El lado del cuadrado mide 22,63 cm.

J U G A N D O   C O N   L A S   M A T E M Á T I C A S

Cómo llenar un recipiente

La madre de Paz le ha mandado que traiga tres litros de agua de la fuente y le ha dado dos recipientes: uno de nueve litros y otro de cinco litros.
¿Cómo se las tiene que ingeniar Paz para llevarle exactamente tres litros de agua a su madre?

Paz ha de seguir los siguientes pasos:

Pasos	Acciones	Resultado
1	Llenar el depósito grande.	Recipiente grande lleno. Recipiente pequeño vacío.
2	Echar 5 L del depósito grande en el pequeño. Vaciar el pequeño.	Recipiente grande con 4 L. Recipiente pequeño vacío.
3	Echar los 4 L de agua que contiene el depósito grande en el pequeño.	Recipiente grande vacío. Recipiente pequeño con 4 L.
4	Llenar el depósito grande con 9 L. Pasar 1 L al pequeño. Vaciar el pequeño.	Recipiente grande con 8 L. Recipiente pequeño vacío.
5	Echar 5 de los 8 litros del depósito grande en el pequeño. Vaciar el pequeño.	Recipiente grande con 3 L. Recipiente pequeño vacío.